თინა ბექაური, გიორგი ბექაური,

ნოდარ ზარიძე, ავთანდილ საგინაშვილი

მ ა თ ე მ ა ტ ი კ ა 11

მეთერთმეტე კლასი

რედაქტორი ავთანდილ საგინაშვილი

მასწავლებლის წიგნი

თბილისი 2024

თინა ბექაური, გიორგი ბექაური,

ნოდარ ზარიძე, ავთანდილ საგინაშვილი

მათემატიკა

XI კლასი

მასწავლებლის წიგნი

სარჩევი

შესავალი

მე-11 კლასის სახელმძღვანელო აგებულია საშუალო საფეხურის სტანდარტის გათვალისწინებით.

მოსწავლის სახელმძღვანელოს სტრუქტურა

სახელმძღვანელოს საბაზო ერთეულია პარაგრაფი, რომელიც ერთ ან რამოდენიმე გაკვეთილზეა გათვლილი. მასში, სახელმწიფო სტანდარტების მოთხოვნებიდან გამომდინარე, ჩამოყალიბებულია მიზნები, რომელთა მიღწევასაც ემსახურება მოცემულ პარაგრაფში მოყვანილი სასწავლო შინაარსი და სავარჯიშოები.

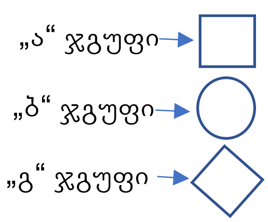
პარაგრაფის ტიპური აგებულება ასეთია:

- ჩამოყალიბებულია პარაგრაფის მიზანი, რომელშიც აღწერილია, რა უნდა აითვისოს მოსწავლემ ამ პარაგრაფში. მიზნები ემსახურება საგნობრივი სტანდარტით განსაზღვრული სასწავლო მიზნების მიღწევას.
- განხილული და ამოხსნილია შესასწავლ მასალასთან დაკავშირებული მაგალითები და ამოცანები.
- განხილულ ამოცანებზე დაყრდნობით ახსნილია თეორიული მასალა.
- ამოხსნილია კლასში შესასრულებელი ტიპური სავარჯიშოები.

პარაგრაფის მომდევნო კითხვებისა და სავარჯიშოების ნაწილი გათვალისწინებულია საშინაო დავალებებისა და კლასში მუშაობისათვის. მასში მოცემულია:

✓ კითხვები, რომლებიც მოსწავლეს აძლევს თვითშემოწმების საშუალებას;
✓ „ა“ ჯგუფის, სავალდებულო სავარჯიშოები;
✓ „ბ“ ჯგუფის, გართულებული ტიპის სავარჯიშოები;
✓ „გ“ ჯგუფის, მომდევნო პარაგრაფისათვის საჭირო საკითხების გასამეორებელი სავარჯიშოები.

იმისათვის, რომ ჩამოთვლილი სამი სახის სავარჯიშო მოსწავლემ ადვილად გაარჩიოს, სახელმძღვანელოში მათი ნუმერაცია განსხვავებულ ფერებსა და განსხვავებულ ფიგურებშია ჩასმული.



სახელმძღვანელოში გვხვდება დავალებები, რომელთა შესასრულებლად ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიების გამოყენებაა საჭირო. ასეთი დავალებები მრავალფეროვანია: გამოთვლების, ალგებრული ჩანაწერის, ცხრილის, დიაგრამის, გრაფიკის შესადგენად და მისი ცვლილების შესასრულებლად კომპიუტერის შესაბამისი პროგრამის გამოყენება, ინფორმაციის ინტერნეტის საძიებო სისტემების საშუალებით მოპოვება, კომპლექსურ დავალებებზე მუშაობა, პრეზენტაცია და სხვ.

პარაგრაფები თემების მიხედვით გაერთიანებულია თავებად. სახელმძღვანელოში სულ 7 თავია:

1. მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები;
2. ნამდვილი რიცხვები;
3. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები;
4. სტერეომეტრიის საწყისები;
5. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები;
6. ვექტორები;
7. სტატიატიკა და ალბათობა.

ყოველ თავს აქვს თავფურცელი, რომელშიც მოცემულია ამ თავის საკითხთა ჩამონათვალი, თავის მიზნები და კომპლექსური დავალება, რომელიც თავის თემატიკის მიხედვითაა შედგენილი.

ყველა კომლექსური დავალება პრაქტიკული ხასიათისაა და თავში მოცემული თეორიული მასალის პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად გამოყენების უნარის განვითარებას ემსახურება. ჩვენ შევეცადეთ, რომ ეს დავალებები რეალურად შესრულებადი და მე-11 კლასის მოსწავლისთვის საინტერესო ყოფილიყო.

ყველა თავში არის მოცემული თავის თემატიკასთან დაკავშირებული ტესტები (სახელმძღვანელოში სულ 16 ტესტია). ტესტები შეიცავენ, როგორც ამოსარჩევი პასუხების მქონე, ისე ღია დავალებებს.

დავალებებს შორის მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სხვადასხვა რუბრიკა, როგორებიცაა: „აბა, სცადე!“, „შესაძლებელია თუ არა?“, „წყვილებში სამუშაო“. მათი მიზანია, მათემატიკური ცოდნის გაღრმავებასთან ერთად, მიაჩვიოს მოსწავლე კრიტიკულ აზროვნებას, სამუშაოს დაგეგმვას, საჭირო ინფორმაციის დამოუკიდებლად მოპოვებასა და დამუშავებას.

მოსწავლის სახელმძღვანელოს შინაარსი

სახელმძღვანელოს პირველი თავი – „მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები“ მე-10 კლასის სახელმძღვანელოში მოცემული შესაბამისი მასალის გამეორებასთან ერთად, შეიცავს ისეთ საკითხებს, როგორებიცაა გამონათქვამთა ჭეშმარიტების არე, მათემატიკური გამონათქვამების სახეები, მათემატიკური თეორიის აგების სქემა და სხვ. ამ თავის კომპლექსური დავალების – „აუცილებელი და საკმარისი“ შესრულება მოსწავლეებს დაეხმარება უკეთ გაერკვნენ მოვლენათა და გამონათქვამთა მიზეზ-შედეგობრივ მიმართებებში.

მეორე თავის მიზანია მოსწავლეებს კიდევ ერთხელ შევახსენოთ რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების სტრუქტურა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, როგორც უსასრულო პერიოდული და არაპერიოდული ათწილადების ერთობლიობა. ამავე თავში ერთი პარაგრაფი ეძღვნება რიცხვის რაციონალური ხარისხის თვისებების გამეორებას. თავის ბოლო პარაგრაფში გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებით გამოითვლება ბანკში ყოველწლიური შენატანით დაგროვილი თანხისა და ბანკიდან აღებული სესხის დასაფარი ყოველწლიური გადასახადის რაოდენობები. ამ თავის კომპლექსური დავალება მოცემული ფორმულების კონკრეტულ საფინანსო სიტუაციაცთან მისადაგებისა და სწორი დასკვნების გამოტანის უნარის განვითარებას ეძღვნება. ამ დავალების წარმატებით შესასრულებლად მოსწავლეებს მოუწევთ მოცემულ ფორმულათა შინაარსის სწორი გააზრება, საკმაოდ რთული ასოითი გამოსახულებების რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა (მათ შორის კალკულატორის გამოყენებით), მიღებული შედეგებიდან შესაბამისი დასკვნის გამოტანა და სხვა.

სახელმძღვანელოს მესამე თავი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, როგორც რიცხვითი ფუნქციების შესწავლასა და მათი გამოყენებით სამკუთხედების ამოხსნას (კოსინუსებისა და სინუსების თეორემები და მათი შედეგები) ეძღვნება. თავის პირველ პარაგრაფში, ბუნებასა და მათემატიკაში არსებული განმეორებადი პროცესების მაგალითებზე დაყრდნობით, მოცემულია პერიოდული ფუნქციის ცნება და მოყვანილია აღნიშნული ფუნქციების გრაფიკების ნიმუშები. მომდევნო პარაგრაფებში პერიოდულობის თვისება გამოყენებულია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკების ასაგებად და ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოსახსნელად.

აქამდე მოსწავლეები იცნობდნენ მხოლოდ მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს. ამ თავში ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ჯერ განიმარტება ნებისმიერი გრადუსული არგუმენტისთვის, როგორც ერთეულოვანი წრის წერტილთა კოორდინატები, ხოლო შემდეგ, კუთხის რადიანული ზომის შემოღებით, როგორც რიცხვითი არგუმენტის ფუნქციები. მოცემულია ერთი და იმავე არგუმენტის და დაყვანის ფორმულები, ტრიგონომეტრიულ

ფუნქციათა გრაფიკები და თვისებები, უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამონახსნთა ფორმულები.

ამ თავის შესაბამისი კომპლექსური დავალება – „გეომეტრიული გაზომვები ტრიგონომეტ-რიის გამოყენებით“, ორნაწილიანია. პირველ ნაწილში მოსწვლე თავის შესწავლით მიღებული თეორიული ცოდნის საფუძველზე ხსნის პრაქტიკული შინაარსის მქონე ამოცანებს, რომლებ-შიც მოცემული ერთი გრძივი პარამეტრითა და კუთხეებით უნდა დაადგინოს ობიექტის ზომე-ბი ან ობიექტამდე მანძილი. მეორე ნაწილში კი მიღებული ცოდნა უნდა გამოიყენოს ზომებისა და მანძილების რეალურ გარემოში დასადგენად.

მეოთხე თავის მიზანია სივრცეში მოცემული ფიგურების ურთიერთგანლაგების შემთხვევე-ბის განხილვა და დახასიათება. მსჯელობა-დასაბუთების უნარის განვითარება-გაღრმავების მიზნით თავში სტერეომეტრიის ძირითადი თეორემები (წრფისა და სიბრტყის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის ნიშნები, ორი სიბრტყის პარალელობისა და პერპენდიკილარობის ნიშნები, სამი მართობის თეორემა და სხვ.) სტერეომეტრიის აქსიომებზე დაყრდნობითაა დამტკიცებული. ამასთან ერთად, სივრცეში ორიენტაციის, სივრცული ფიგურების სიბრტყე-ზე დაგეგმილებისა და სტერეომეტრიული ნახაზების სწორად შესრულების უნარების განვი-თარების მიზნით ყველა დებულებასა თუ ამოცანას ახლავს შესაბამისი ნახაზი. ამავე მიზნის მისაღწევად დავალებათა უმრავლესობაში მოსწავლეს შესაბამისი ნახაზის შესრულება მოეთხოვება.

ამ თავის კომპლექსური დავალებაში „სტერეომეტრია საყოფაცხოვრებო არქიტექტურაში“ მოსწავლეს ევალება სამეურნეო დანიშნულების შენობის (ქოხის) დაპროექტება. ამ დავა-ლებაში ხაზგასმითაა მოთხოვნილი, რომ მოსწავლემ გეომეტრიის ტერმინებში დაახასიათოს და მაკეტსა თუ ნახაზზე მიუთითოს მის მიერ შედგენილ პროექტში მოცემული დეტალების განლაგება (პარალელური , პერპენდიკულარული და აცდენილი მონაკვეთები, პარალელური და მართობული სიბრტყეები, ორწახნაგა კუთხეები და სხვ.) შესაბამისი კითხვები მოცემულია მასწავლებლის წიგნის მეოთხე თავის მატრიცაში.

მეხუთე თავი მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების შესწავლას ეთმობა. ამ თავში ფუნქციათა გრაფიკებისა და თვისებების გარდა ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი განტო-ლებები და უტოლობები და მათი გამოყენებით პრაქტიკული ამოცანების (ნახევრად დაშლის პერიოდი, მოსახლეობის ცვლილება, საბანკო ანგარიშების ზრდა-კლება და სხვ.) გადაწყვეტის მეთოდები შეისწავლება.

მეხუთე თავის კომპლექსური დავალება – „საქართველოს მოსახლეობა“ ისეთ აქტუალურ თემას ეხება, როგორიც ბოლო ათწლეულების დემოგრაფიულ პრობლემებია, რაც აბორიგენი მოსახლეობის გადინებასთანაა დაკავშირებული. გარდა მათემატიკური მოდელირებისა და გამოთვლებისა, რაც მოსწავლეებს დავალების პირველ ნაწილში მოეთხოვება, მათ აგრეთვე, მოუწევთ პრობლემის გადაწყვეტის გზებზე მსჯელობა, საკუთარი აზრის გამოთქმა და დასა-ბუთება.

ვექტორები, მათზე წრფივი მოქმედებები და კოორდინატებში ჩაწერა მე-9 კლასში ისწავლება. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს მეექვსე თავში, ამ საკითხების გამეორებასთან ერთად, მოცემულია სკალარული ნამრავლის განმარტება, თვისებები და კოორდინატებში გამოსახვა. ორგანზომილებიანი შემთხვევის შემდეგ მოცემულია კოორდინატთა სისტემა სივრცეში და მოქმედებები სამგანზომილებიან ვექტორებზე. გადმოცემულია ვექტორის წარ-მოდგენა არაკომპლანარული ვექტორების (მათ შორის ორტების) საშუალებით და ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის კოორდინატების საშუალებით გამოთვლის ფორმულები.

თავის კომპლექსური დავალება – „დაგეგმარება ვექტორებით“ ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველი ნაწილი მოცემული სქემის გამოკვლევას (პუნქტებს შორის მანძილებისა და

მიმართულებებს შორის კუთხეთა ზომების დადგენას), ხოლო მეორე – საკუთარი რეალური გეგმის შედგენას გულისხმობს.

მე-7 თავში პირველი ორი პარაგრაფი სტატისტიკის საკითხებს ეძღვნება.

მოსწავლეთათვის კარგად ცნობილი ისეთი საკითხების გამეორებასთან ერთად, როგორიცაა, მონაცემთა წარმოდგენის ფორმები, ცენტრალური ტენდენციის საზომი ერთეულები და სხვ., მარტივ მაგალითებზე დაყრდნობით მოცემულია ისეთი ცნებების განმარტებები, როგორიცაა ტიპური და გამორჩეული მონაცემები, დაგროვილი სიხშირე, მონაცემთა რანგი, სტანდარტული გადახრა და სხვ. ამავე თავის ბოლო ორი პარაგრაფი ეძღვნება ალბათობის საკითხებს. ერთ პარაგრაფში კიდევ ერთხელაა მოცემული თეორიის ძირითადი ცნებები (ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, ხდომილობა, ალბათობა, არათავსებადი და დამოუკიდებელი ხდომილობები, ალბათობის კლასიკური სქემა, მოქმედებები ხდომილობებზე და მათი დიაგრამით გამოსახვა და სხვ.) ბოლო პარაგრაფში მარტივ მაგალითებზე დაყრდნობით შემოდის პირობითი ალბათობის ცნება და მოცემულია პირობითი ალბათობის ფორმულა. მნიშვნელოვანია, რომ მოსწავლეებმა კარგად გაიაზრონ ამ ცნების შინაარსი, როგორც ორი ხდომილობის საეთო ნაწილის ალბათობა არა მთლიან სივრცეში, არამედ პირობად სახელდებული ხდომილობით მოცემულ ქვესივრცეში.

თავის თემატიკის შესაბამისი კომპლექსური დავალება – „პირობითი ალბათობის სტატისტიკური ანალიზი“ ისევე, როგორც წინა თავების დავალებები, ორი – თეორიული და პრაქტიკული ნაწილისაგან შედგება. პირველ ნაწილში მოსწავლეს ეძლევა პირობითი ალბათობის ცნებასთან დაკავშირებული მარტივი ყოფითი ამოცანები. ამ ამოცანებში ერთი შეხედვით ტოლად მოსალოდნელ ხდომილობებს განსხვავებული ალბათობა აქვს. მაგალითად, თუ ოჯახში ერთ-ერთი ბავშვი გოგონაა, მეორე ბაშვი გოგონაა თუ ბიჭი თითქოს ტოლადაა მოსალოდნელი, მაგრამ ბიჭის ალბათობა 2-ჯერ მეტია გოგონას ალბათობაზე.

მეორე დავალებაში მოსწავლემ პრაქტიკულად უნდა შეამოწმოს თეორიულად მიღებული შედეგები. ჩაატაროს გამოკითხვა მისთვის ხელმისაწვდომ სოციუმში: კლასში, სკოლაში მეზობლებში, მოიძიოს ინტერნეტში და სტატისტიკურად დაამუშაოს მიღებული მონაცემები.

მასწავლებლის წიგნში მოცემულია:

- სასწავლო გეგმა (კურიკულუმი)
- თითოეული თავის ძირითადი მიზნები;
- იმ ცოდნისა და უნარების ჩამონათვალი, რომელსაც შეიძენს მოსწავლე თითოეული პარაგრაფის შესწავლის შედეგად;
- კომპლექსური დავალებები თავების მიხედვით და მათი შესრულების ეტაპების დეტალური ანალიზი;
- მეთოდური რეკომენდაციები;
- სავარჯიშოთა უმრავლესობის ამოხსნები, კომენტარები და პასუხები;
- ქვიზების ამოხსნები და პასუხები;
- შემაჯამებელი წერის ნიმუშები ორ ვარიანტად (ვარიანტებს შორის მხოლოდ რიცხვითი მონაცემებია განსხვავებული) და მათი შეფასების სქემები.

მე-11 კლასის სასწავლო გეგმა (კურიკულუმი) მათემატიკაში

თვე	თემა	საკითხი / საკითხები ცნება / ქვეცნებები	კომპლექსური დავალება
სექტემბერი 2 კვირა	ლოგიკა	**ლოგიკა** • გამონათქვამი, გამონათქვამთა ჯამი და ნამრავლი, მათი ჭეშმარიტების ცხრილი; • გამონათქვამის უარყოფა; • გამონათქვამთა ჯამისა და ნამრავლის უარყოფა; • თეორემის დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვებით; • შებრუნებული, მოპირდაპირე და ტოლფსი თეორემები.	**„აუცილებელი და საკმარისი“**
ოქტიმბერი 2კვირა	რიცხვები	**რიცხვები** • რიცხვითი სიმრავლეები; • რაციონალური რიცხვები; • წილადის პერიოდულ ათწილადად და, პირიქით, პერიოდული ათწილადის წილადად ჩაწერა; • ათწილადის თანრიგობრივ შესაკ-რებთა ჯამის სახით ჩაწერა; • ირაციონალური რიცხვის, როგორც არაპერიოდული ათწილადის სტრუქტურა; • ხარისხი რაციონალური მაჩვენებლით; • საფინანსო საქმიანობასთან დაკავშირებული ამოცანები.	**„საბანკო სესხის წლიური გადასახადის გამოთვლა“**
ოქტომბერი -ნოემბერი **6** კვირა ნოემბერი 2 კვირა	ტრიგონო-მეტრიული ფუნქციები ტრიგონომეტრი ა და გეომეტრია	**ტრიგონომეტრია** • პერიოდული ფუნქციები; • ერთეულოვანი წრე; • რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები; • განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე, ლუწ-კენტობა, პერიოდი; • დაყვანის ფორმულები • ძირითადი დამოკიდებულებები ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგო-ნომეტრიულ ფუნქციებს შორის; • უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები. **სამკუთხედების ამოხსნა** • კოსინუსების თეორემა; • პარალელოგრამის თვისება; • სინუსების თეორემა; • სამკუთხედების ამოხსნა;	**„გეომეტრიული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით“**

		• ფართობის გამოთვლა ტრიგონომეტრიის გამოყენებით.	
დეკემბერი — იანვარი **6 კვირა**	**სტერეომეტრიის საწყისები**	• სტერეომეტრიის აქსიომები; • წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის მიმართებები სივრცეში; • პარალელობა სივრცეში (წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის) • დაგეგმილება სიბრტყეზე; • მართობულობა სივრცეში (წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის); • დახრილი და გეგმილი, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის; • სამი პერპენდიკულარის თეორემა; • მანძილები სივრცეში (წერტილდან წრფემდე, წერტილიდან სიბრტყემდე, წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის); • ორწახნაგა კუთხე; • ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე; • კუთხე სიბრტყეებს შორის.	**„სტერეომეტრია საყოფაცხოვრებო არქიტექტურაში“**
თებერვალი - მარტი **8 კვირა**	**მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები**	• მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი (განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე, ზრდადობა-კლებადობა); • მაჩვენებლიანი განტოლება; • ლოგარითმის თვისებები; • ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი (განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე, ზრდადობა-კლებადობა); • ლოგარითმული განტოლება; • მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები.	**„საქართველოს მოსახლეობა“**
აპრილი **4 კვირა**	**ვექტორები**	• ვექტორები სიბრტყეზე (ტოლი, თანამიმართული, კოლინეალური, არაკოლინეალური); • წრფივი მოქმედებები ვექტორებზე (რიცხვზე გამრავლება, შეკრება, გამოკლება); • ვექტორის კოორდინატები (ვექტორის სიგრძისა და მოქმედებების ჩაწერა კოორდინატებში); • ვექტორთა სკალარული ნამრავლი;	**„დაგეგმარება ვექტორებით“**

		• ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა კოორდინატებით; • კოორდინატები სივრცეში; • ვექტორები სივრცეში.	
მაისი 4 კვირა	**სტატისტიკა და ალბათობა**	**ა)სტატისტიკა** • მონაცემთა მოწესრიგებული ერთობლიობების რაოდე-ნობრივი და თვისობრივი ნიშნები: ტიპური და ექსტრემალური; დაგროვილი სიხშირე, დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე; მონაცემთა პოზიციის მახასიათებელი – რანგი. • შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლები თვისობრივი და დაუჯგუფებელი რაოდენობრივი მონაცემებისათვის: მონაცემთა გაფანტულობის საზომები (დიაპაზონი, სტანდარტული გადახრა). **ბ)ალბათობა** • ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე; • ხდომილობის ალბათობა • ალბათობის კლასიკური სქემა; • მოქმედებები ხდომილობებზე (საწინააღმდეგო ხდომილობა, ხდომილობათა ჯამი და ნამრავლი); • არათავსებადი და დამოუკიდებელი ხდომილობები; • მოქმედებათა გამოსახვა ვენის დიაგრამით; • პირობითი ალბათობა; • ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის გამოთვლა პირობითი ალბათობის გამოყენებით.	**„პირობითი ალბათობის სტატისტიკური ანალიზი“**
ივნისი 1 კვირა	**1. გამეორება**	მთელი კურსის გასამეორებელი სავარჯიშოები	

სათადარიგო დრო 1 კვირა.

მიზნები, მეთოდური რეკომენდაციები, კომპლექსური დავალებები, კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

თავი 1. მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

თავის მიზანია, მოსწავლემ შეძლოს:

- ლოგიკური მოქმედებების (დიზიუნქციის, კონიუნქციის, იმპლიკაციისა და ექვივალენციის) შესრულება გამონათქვამებზე;
- ჭეშმარიტების ცხრილის შედგენა და გამოყენება გამონათქვამთა შორის მიმართების დასადგენად;
- პრედიკატის (ცვლადიანი გამონათქვამის) ჭეშმარიტების არის დადგენა;
- კონტრმაგალითის გამოყენება ცვლადიანი გამონათქვამის მცდარობის დასამტკიცებლად;
- მათემატიკური გამონათქვამების სახეობათა გარჩევა;
- თეორემის შებრუნებულის, მოპირდაპირისა და ტოლფასის აგება;
- თეორემის დასამტკიცებლად დედუქციისა და საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდების გამოყენება.

მატრიცა

თემა - ლოგიკა **საკითხი** - აუცილებელი და საკმარისი პირობები **სამიზნე ცნება - ლოგიკური ოპერაციები; გამონათქვამი (შედეგი მათ.საშ. 8. 9.) ქვეცნება** - მათემატიკური გამონათქვამი: განმარტება, აქსიომა, თეორემა. **ქვესაკითხი:** აუცილებელი და საკმარისი პირობები.		
საკვანძო შეკითხვა - რა შემთხვევაშია A გამონათქვამი აუცილებელი B გამონათქვამისთვის? საკმარისი? - როგორ იწარმოება მოცემული პირობითი გამონათქვამისაგან შებრუნებილი, მოპირდაპირე და შებრუნებულის მოპირდაპირე გამონათქვამები? - რომელი მათგანია მოცემული გამონათქვამის ტოლფასი?		
სამიზნე ცნებასთან/ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები <u>მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:</u>	**შეფასების კრიტერიუმი** <u>მოსწავლეს შეუძლია:</u>	<u>ნაშრომში პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:</u>
ლოგიკური ოპერაციები	• ლოგიკური მოქმედებების (დიზიუნქციის, კონიუნქცი-	• რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა

1. ლოგიკური ოპერაციები საშულებას იძლევა მოცემული გამონათქვამებით შევადგინოთ ახალი გამონათქვამები, რომელთა ჭეშმარიტება-მცდარობა დამოკიდებულია მხოლოდ შედგენილ გამონათქვამში მონაწილე გამონათქვამების ჭეშმარიტებასა და მცდარობაზე (მიუხედავად მათი შინაარსისა). შედგენილი გამონათქვამის ჭეშმარიტება-მცდარობის დასადგენად ჭეშმარიტების ცხრილებს ვიყენებთ. **გამონათქვამი** 2. გამონათქვამი წინადადებაა, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს ორი მნიშვნელობიდან მხოლოდ ერთი: იყოს ჭეშმარიტი ან იყოს მცდარი. **მათემატიკური გამონათქვამი** **3.** მათემატიკური გამონათქვამი სამ სახეობად იყოფა: განმარტება, აქსიომა და თეორემა. თეორემა ჭეშმარიტი პირობითი გამონათქვამია, რომელიც განმარტებებს, აქსიომებსა და უკვე დამტკიცებულ თეორემებზე დაყრდნობით, ლოგიკის წესების გამოყენებით მტკიცდება. თეორემის დამტკიცება ნიშნავს პირობის ჭეშმარიტებიდან დასკვნის ჭეშმარიტების გამოყვანას.	ის, იმპლიკაციისა და ექვინალენციის) შესრულება გამონათქვამებზე; **(მკვ.წ.1)** • ჭეშმარიტების ცხრილის შედგენა და გამოყენება გამონათქვამთა შორის მიმართების დასადგენად;**(მკვ.წ.1)** • პრედიკატის (ცვლადიანი გამონათქვამის) ჭეშმარიტების არის დადგენა; **(მკვ.წ.2**) • კონტრმაგალითის ცვლადიანი გამონათქვამის მცდარობის დასამტკიცებლად გამოყენება; **(მკვ.წ.2** • მათემატიკური გამონათქვამების სახეობათა გარჩევა; **(მკვ.წ.3)** • თეორემის შებრუნებულის, მოპირდაპირესა და ტოლფასის აგება; **(მკვ.წ.3)** • თეორემის დასამტკიცებლად დედუქციისა და საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდების გამოყენებას. **(მკვ.წ.3)**	დაგეხმარა დავალების შესრულებაში; • რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს; • ყოფისა და მეცნიერების რა სფეროებიდან მოიძიე შესაბამისი მაგალითები; • დასაბუთების რა მეთოდები გამოიყენე; • სასკოლო სახელმძღვანელოს გარდა კიდევ რა ლიტერატურა დაგჭირდა დავალების შესასრულებლად.

კომპლექსური დავალება

„აუცილებელი და საკმარისი“

ადამიანს, ამა თუ იმ მიზნის მისაღწევად, გარკვეული გადაწყვეტილების მიღება და შესაბამისი მოქმედების განხორციელება ესაჭიროება.

გადაწყვეტილების მიღებისას მნიშვნელოვანია გავარკვიოთ, რამდენად აუცილებელი ან რამდენად საკმარისია დასახული მიზნისთვის ესა თუ ის ქმედება.

იმისათვის, რომ თეორიული ან პრაქტიკული პრობლემა გადაჭრა, აუცილებელია კარგად გაიაზრო მისი არსი, დასახო მოქმედებათა ის მინიმუმი, რომელიც შედეგამდე მიგიყვანს, ანუ უნდა დაადგინო პრობლემის გადაჭრისთვის აუცილებელი და საკმარისი მოქმედებები.

მათემატიკაში დებულებების ჩამოყალიბება სიტყვებით „აუცილებელი“ და „საკმარისი“ ცნებათა თვისებებისა და მათ შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირის ნათლად წარმოდგენაში გვეხმარება. მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითები:

იმისათვის, რომ ნატურალური რიცხვი 6-ზე გაიყოს, საკმარისია, ეს რიცხვი გაიყოს 12-ზე. თუმცა, ეს არაა აუცილებელი. მაგალითად, 18 იყოფა 6-ზე, მაგრამ არ იყოფა 12-ზე.

იმისათვის, რომ რიცხვი 6-ზე გაიყოს, აუცილებელია, რომ რიცხვი გაიყოს 3-ზე, მაგარამ ეს არაა საკმარისი. მაგალითად, 9 იყოფა 3-ზე და არ იყოფა 6-ზე.

იმისათვის, რომ რიცხვი 6-ზე გაიყოს აუცილებელია და საკმარისი, რიცხვი გაიყოს 2-სა და 3-ზე.

შენი დავალება:

1. მოცემულ წინადადებებში გამოტოვებულ ადგილას ჩასვი შემდეგი სიტყვებიდან ერთ-ერთი: „აუცილებელია და არაა საკმარისი“, ,,საკმარისია და არაა აუცილებელი“, „აუცილებელია და საკმარისი“ ისე, რომ მიღებული წინადადება იყოს მართებული:

ა) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი . . . სამივე კუთხე ჰქონდეთ ტოლი;
ბ) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი . . . სამივე გვერდი ჰქონდეთ ტოლი;
გ) იმისათვის, რომ პარალელოგრამი იყოს მართკუთხედი . . . მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;
დ) იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი იყოს მართკუთხედი . . . მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;
ე) იმისათვის, რომ $A \Rightarrow B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი . . . A იყოს მცდარი;
ვ) იმისათვის, რომ $A \vee B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი . . . A იყოს ჭეშმარიტი;
ზ) იმისათვის, რომ $A \wedge B$ გამონათქვამი იყოს მცდარი . . . A იყოს მცდარი.

2. ჩასმის შედეგად მიღებული წინადადებების მართებულობა დაასაბუთე დედუქციის, კონტრმაგალითის ან საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენებით.

3. შეადგინე მართებული წინადადებები მათემატიკის, მეცნიერებისა და ყოფა-ცხოვრების სხვადასხვა სფეროდან, რომელთა ჩამოყალიბებაში მონაწილეობას მიიღებს სიტყვათა წყობა: „აუცილებელია და არაა საკმარისი“, „საკმარისია და არაა აუცილებელი“, „აუცილებელია და საკმარისი“.

4. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენს მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- ყოფისა და მეცნიერების რა სფეროებიდან მოიძიე შესაბამისი მაგალითები;
- დასაბუთების რა მეთოდები გამოიყენე;

- სასკოლო სახელმძღვანელოს გარდა კიდევ რა ლიტერატურა დაგჭირდა დავალების შესასრულებლად.

კომპლექსური დავალების განხორციელების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები, შეკითხვები)

ეტაპი I – კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა

რესურსები/განსახილველი ქეისები:

რესურსი 1. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს პირველი თავი;

რესურსი 2. მე-10 კლასის სახელმძღვანელო, პირველი ნაწილი, მეორე თავი;

რესურსი 3. ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიები.

<u>კომპლექსური დავალების პირობის გააზრებაზე ორიენტირებული შეკითხვები:</u>

- $A \Rightarrow B$ პირობით გამონათქვამში, რომელი გამონათქვამია პირობა და რომელი გამონათქვამი დასკვნა?
- რა შემთხვევაშია $A \Rightarrow B$ პირობითი გამონათქვამი მცდარი?
- $A \Rightarrow B$ სახის თეორემაში რომელია აუცილებელი და რომელი საკმარისი გამონათქვამი?
- რა შემთხვევაში ჩაითვლება თეორემა დამტკიცებულად?
- თეორემის დამტკიცების რა მეთოდები იცი?
- რა შემთხვევაში ყალიბდება თეორემა სიტყვათა კომბინაციით: „აუცილებელია და საკმარისი“.
- რა შემთხვევაშია A გამონათქვამი B გამონათქვამისთვის საკმარისი და არა აუცილებელი?
- რა შემთხვევაშია A და B გამონათქვამები ტოლფასი?

ქვესაკითხი - **კომპლექსური დავალება**

- შენი სიტყვებით ჩამოაყალიბე, რას შეეხება მოცემული დავალება, რომელზეც რამდენიმე გაკვეთილის განმავლობაში უნდა იმუშაო.
- მსგავსი ფორმის, ან შინაარსის დავალება სხვა დროს თუ შეგისრულებია?

ეტაპი II – კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა

ქვეცნებები -

გამონათქვამთა ჯამის, სხვაობის, პირობითი გამონათვამისა და ტოლფასობის ჭეშმარიტების ცხრილების შედგენა (პარ. 1.1);

ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არის დადგენა (პარ. 1.2);

კონტრმაგალითის გამოყენება გამონათქვამის მცდარობის დასამტკიცებლა (პარ. 1.3);

გამონათქვამთა ჯამისა და ნამრავლის უარყოფის ფორმულების ჭეშმარიტების ცხრილის საშუალებით დამტკიცება (პარ. 1.3);

პირობითი გამონათქვამის შებრუნებულის, მოპირდაპირეს და ტოლფასის კონტრუქ- ციების აგება და შესაბამისი ფორმულების დასამტკიცებლად გამოყენება (პარ. 1.3);

მათემატიკური გამონათქვამის სახეობათა განხილვა (პარ. 1.4);

თეორემის დამტკიცება დედუქციური და საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდების გამოყენებით (პარ. 1.4).

ქვესაკითხები -

- მათემატიკური გამონათქვამის სახეობათა განხილვა (პარ. 1.4);
- გამონათქვამებს შორის „აუცილებელი“, „საკმარისი“, „აუცილებელი და საკმარისი“ მიმართებების დადგენა (პარ. 1.1, 1.4);

ნაბიჯი 1. 1-ელი და მე-2 დავალების შესრულება;

მოვიყვანოთ 1-ელი და მე-2 დავალებების შესრულების ნიმუში:

ა) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი **აუცილებელია და არაა საკმარისი** სამივე კუთხე ჰქონდეთ ტოლი;

დასაბუთება: ის რომ ტოლ სამკუთხედებს კუთხეები ტოლი აქვთ ტოლობის განმარტე- ბიდან გამომდინარეობს, ხოლო კუთხეების ტოლობა რომ არასაკმარისია, ამისათვის კონტრმაგალითად შეგვიძლია მოვიყვანოთ ორი სხვადასხვა ზომის ტოლგვერდა სამკუთხედი.

ბ) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი, **აუცილებელია და საკმარისი** სამივე გვერდი ჰქონდეთ ტოლი;

დასაბუთება: აუცილებლობა გამომდინარეობს ტოლობის განმარტებიდან, ხოლო საკმარისობა – სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშანია;

გ) იმისათვის, რომ პარალელოგრამი იყოს მართკუთხედი, **აუცილებელია და საკმარისი,** რომ მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;

დასაბუთება: აუცილებლობა მართკუთხედის დიაგონალების ტოლობის თვისებაა, ხოლო საკმარისობა მტკიცდება ტოლფერდა სამკუთხედის იმ თვისებით, რომ ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

დ) იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი იყოს მართკუთხედი, **აუცილებელია და არაა საკმარისი,** მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;

დასაბუთება: აუცილებლობა მართკუთხედის დიაგონალების ტოლობის თვისებაა; არასაკმარისობის საილუსტრაციოდ შეგვიძლია მოვიყვანოთ ტოლფერდა ტრაპეციის მაგალითი;

ე) იმისათვის, რომ $A \Rightarrow B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი, **საკმარისია და არაა აუცილე- ბელი**, A იყოს მცდარი;

დასაბუთება: საკმარისობა გამომდინარეობს პირობითი გამონათქვამის განმარტებიდან; არაა უცილებლებელი იმიტომ, რომ პირობითი გამონათქვამი ჭეშმარიტი მაშინაცაა, როდესაც A და B ჭეშმარიტი გამონათქვამებია.

ვ) იმისათვის, რომ $A \vee B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი, **საკმარისია და არაა აუცილებელი**, A იყოს ჭეშმარიტი;

დასაბუთება: საკმარისობა გამომდინარეობს გამონათქვამთა ჯამის განმარტებიდან; არაა უცილებლებელი იმიტომ, რომ ჯამი ჭეშმარიტი მაშინაცაა, როდესაც A მცდარი, ხოლო B ჭეშმარიტი გამონათქვამია.

ზ) იმისათვის, რომ $A \wedge B$ გამონათქვამი იყოს მცდარი **საკმარისია და არაა აუცილებელი**, A იყოს მცდარი.

დასაბუთება: საკმარისობა გამომდინარეობს გამონათქვამთა ნამრავლის განმარტებიდან; არაა უცილებლებელი იმიტომ, რომ ნამრავლი მცდარი მაშინაცაა, როდესაც B არის მცდარი გამონათქვამი.

პირველ დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- რაში მდგომარეობს სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშანი?
- რაში მდგომარეობს ა) პარალეოგრამის; ბ)მართკუთხედის დიაგონალების თვისება?
- რა არის პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტების აუცილებელი და საკმარისი პირობა?
- რა განსხვავებაა გ) და დ) გამონათქვამებს შორის?
- რა შემთხვევაშია ორი გამონათქვამი ტოლფასი;
- რა მასალა დაგეხმარა შევსებული გამონათქვამების ჭეშმარიტების დასაბუთებაში?

ნაბიჯი 2. მესამე დავალებაზე მუშაობა

- რა მასალა გამოიყენე მე-3 დავალების შესასრულებლად?
- მათემატიკურ გამონათქვამების გარდა, კიდევ რა სახის გამონათვამების მაგალითები მოიძიე?

შენიშვნა 1. არამათემატიკური გამონათქვამების მაგალითები მრავლადაა ჩვენი ავტორობით გრიფირებულ მე-10 კლასის სახელმძღვანელოში.

ნაბიჯი 4. ნაშრომის საპრეზენტაციოდ მომზადება

პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- ყოფისა და მეცნიერების რა სფეროებიდან მოიძიე შესაბამისი მაგალითები;
- დასაბუთების რა მეთოდები გამოიყენე;

- სასკოლო სახელმძღვანელოების გარდა კიდევ რა ლიტერატურა დაგჭირდა დავა-ლების შესასრულებლად.

1.1 მოქმედებები გამონათქვამებზე

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- გამონათქვამებზე ოთხი ლოგიკური მოქმედების (დიზიუნქცია, კონიუნქცია, იმპლიკაცია, ექვივალენცია) განმარტება;
- შედგენილი გამონათქვამების ჭეშმარიტების ცხრილის აგება;
- ჭეშმარიტების ცხრილის გამონათქვამთა ტოლფასობის დასადგენად გამოყენება.

შენიშვნა: ამ პარაგრაფის ყველა თემა მე-10 კლასის სახემძღვანელოში უფრო დაწვრილებით არის განხილული. აქ მოცემული მასალა გამეორების მიზანს ემსახურება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ. №1. ა), დ) და ე).

სავ. №2. ამ გამონათქვამების ტოლფასობა უშუალოდ მათი განმარტებებიდან გამომდინარეობს.

შენიშვნა. სასურველია, ამ და სხვა ტოლფასი გამონათქვამებისათვის მოვიყვანოთ შესაბამისი ანალოგიური ტოლობები სიმრავლეთა თეორიიდან. ამისათვის საკმარისია, $\vee$ შევცვალოთ სიმრავლეთა გაერთიანების „$\cup$“ ნიშნით, ხოლო $\wedge$ ნიშანი – სიმრავლეთა თანაკვეთის „$\cap$“ ნიშნით.

სავ. №3. მცდარია ლუკას ვარაუდი.

სავ. №4-5. ტატომ შეასრულა, ნიცამ არა.

სავ. №6-7. ვიყენებთ ფორმულას: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$. პასუხი: 6-ში 13, 7-ში 3.

სავ. №8. მცდარია ა).

სავ.№9. ა) და დ).

სავ. №10. მტკიცდება ჭეშმარიტების ცხრილით ან მსჯელობით.

სავ. №11. მტკიცდება მარტივი მსჯელობით: თუ P მცდარია, მაშინ ცხადია, ხოლო თუ P ჭეშმარიტია, მაშინ Q -ც ჭეშმარიტია და ამიტომ R -ც ჭეშმარიტი იქნება.

შენიშვნა. ამ ფაქტზეა დამყარებული დედუქციური მსჯელობა. მოსწავლეებს ეს იმპლიკაცია წავაკითხოთ სიტყვებით: „თუ P-დან გამომდინარეობს Q, ხოლო Q-დან გამომდინარეობს R, მაშინ P-დან გამომდინარეობს R“. მოვიყვანოთ მაგალითი სიმრავლეთა თეორიიდან: $P\subset Q\subset R\Rightarrow P\subset R$ და შესაბამისი ვენის დიაგრამა.

სავ. №12. სამზე გაყოფის ნიშანია.

სავ.№13-14. პარალელოგრამის შემთხვევაში ტოლფასია, ხოლო ოთხკუთხედების შემთხვევაში არა. მაგალითად, ტრაპეციაში შეიძლება დიაგონალები იყოს ურთიერთმართობული.

სავ. №15. არაა ტოლფასი, რადგან $B\Rightarrow A$ მცდარია.

სავ. №16. პითაგორას თეორემა და მისი შებრუნებულია. შებრუნებული შეგვიძლია დავამტკიცოთ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის გამოყენებით.

სავ. 17. $A\Rightarrow B$ ჭეშმარიტია, რადგან ნატურალური m რიცხვის ყოველ k გამყოფს აქვს მეწყვილე გამყოფი $m:k$. თუ გამყოფები კენტია ე.ი. ერთ-ერთი გამყოფი მეწყვილეს ტოლია. $m:k=k$. აქედან, $m=k^2$.

$B \Rightarrow A$ ჭეშმარიტია, რადგან თუ $m=k^2$, მაშინ k იქნება ის ერთადერთი გამყოფი, რომელსაც k-სგან განსხვავებული მეწყვილე არ აქვს.

სავ. №18. უნდა დავამტკიცოთ, რომ ტოლობის თითოეული მხარის ჭეშმარიტებიდან გამომდინარეობს მეორე მხარის ჭეშმარიტება.

სავ. №19. წინა სავარჯოშოს ანალოგიურია სიმრავლეთა შემთხვევაში.

1.2 ცვლადიანი გამონათქვამი (პრედიკატი)

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- ცვლადიანი გამონათქვამების ამოცნობა;
- ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არისა და ტოლფასობის ცნებათა განმარტება;
- ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არის დადგენა.

განტოლებები, უტოლობები, სისტემები და მათემატიკური გამონათქვამების უმეტესობა ცვლადიანი გამონათქვამებია. ჭეშმარიტების არის და ტოლფასი ცვლადიანი გამონათქვამების ცნებების შემოტანა საშუალებას გვაძლევს განსხვავებული კუთხით ვაჩვენოთ მოსწავლეებს ის თემები, რომელთა შესწავლას დიდი ადგილი ეთმობა სასკოლო მათემატიკაში.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ. №1. გ).

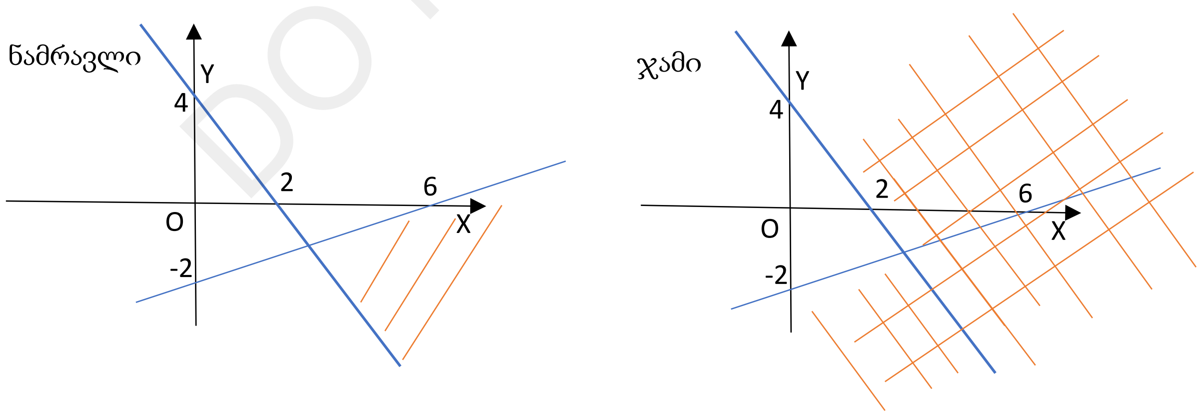
სავ. №2. ა) $\{-2;+2\}$; ბ) $\{1;3\}$; გ) $[3;5]$; დ) $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$.

სავ. №3. ა) 10-ის ჯერადები; ბ) 5-ის ჯერადები; გ) ლუწი რიცხვები; დ) კენტი რიცხვები.

სავ. №4. ნამრავლი – $\varnothing$, ჯამი – $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

სავ. №5. ნამრავლი – წერტილი კოორდინატებით (2;5), ჯამი –ორი წრფის გაერთიანება.

სავ.6.

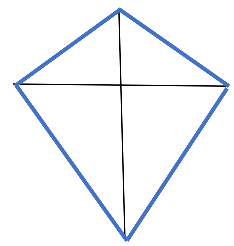


სავ. №7. ნამრავლი – რგოლი ცენტრით კოორდინათთა სათავეში; ჯამი – მთელი სიბრტყე.

სავ. №8. მოცემული გამონათქვამია „თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლი და ურთიერთმართობულია, მაშინ ოთხკუთხედი კვადრატია“.

ამ პრედიკატის ჭეშმარიტების არეა პარალელოგრამებისა და იმ ოთხკუთხედების ერთობლიობა, რომელთა დიაგონალები არატოლი ან ურთიერთარამართობულია.

მართლაც, პარალელოგრამის შემთხვევაში დიაგონალების ტოლობა და ურთიერთ-მართობულობა იწვევს მის კვადრატობას, ხოლო არატოლი ან ურთიერთარამართობული დიაგონალების ოთხკუთხედებისთვს მცდარია მოცემული პირობითი გამონათქვამის პირობა.



ის, რომ ნებისმიერი ოთხკუთხედისთვის ეს გამონათქვამი არაა ჭეშმარიტი, შეგვიძლია კონტრმაგალითით დავასაბუთოთ. საკმარისია განვიხილოთ ოთხკუთხედი (მაგალითად, ფრანი), რომლის ერთ-ერთ დიაგონალს გადაკვეთის წერტილი შუაზე არ ჰყოფს, ან ტრაპეცია, რომელსაც დიაგონალები ტოლი და ურთიერთმართობული აქვს.

1.3 გამონათქვამის უარყოფა. კონტრმაგალითი

მიზანი. მოსწვალემ შეძლოს:

- გამონათქვამის უარყოფის კონსტრუქციის აგება;
- გამონათქვამის მცდარობის კონტრმაგალითის მეთოდით დამტკიცება;
- „და“ და „ან“ კავშირების უარყოფის ფორმულების დასაბუთება და მაგალითებით დემონსტრირება;
- გამონათქვამის მოპირდაპირეს და შებრუნებულის მოპირდაპირეს აგება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ. №1.

A	$\bar{A}$
ჭ	მ
მ	ჭ

სავ. №4. შეიძლება ორივე ჭეშმარიტი ან ორივე მცდარი იყოს, რაც ეწინააღმდეგება უარყოფის განმარტებას.

სავ. №5. ა) 1; ბ) 25; გ) $\sqrt{2}$; დ) ნებისმიერი მართკუთხედი, რომელიც არაა კვადრატი.

სავ. №6. ა) არსებობს რიცხვი, რომელიც არც რაციონალურია და არც ირაციონალური; გ) არსებობს სპორტსმენი, რომელიც სწრაფი არაა, ან მოქნილი არაა.

სავ. №7. გამომდინარეობს უარყოფის განმარტებიდან.

სავ. №8-9. დამტკიცდება მსჯელობით ან ჭეშმარიტების ცხრილით.

სავ. №10. ჭეშმარიტია მოცემული გამონათქვამი, რადგან $n(n+5)$ ლუწი რიცხვია.

1.4 გამონათქვამები მათემატიკაში

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

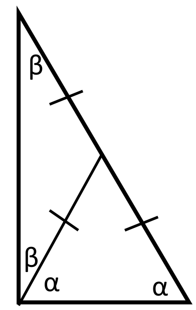
- მათემატიკური გამონათქვამების ამოცნობა-დახასიათება;
- თეორემის დამტკიცების მეთოდების გამოყენება;
- შებრუნებული, საპირისპირო და ტოლფასი თეორემების ამოცნობა, ჩამოყალიბება და დასაბუთება;
- მათემატიკური თეორიის კონსტრუქციის დახასიათება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.6. ა) ტოლფასი თეორემაა: „ თუ n ლუწი რიცხვია, მაშინ n^2 ლუწი რიცხვია“. მართლაც, თუ $n = 2k$, მაშინ $n^2 = 4k^2$.

ბ) ტოლფასი თეორემაა: „ თუ რიცხვი იყოფა 3-ზე და იყოფა 5-ზე, მაშინ რიცხვი გაიყოფა 15-ზე“. ცხადია, რადგან $15=3\cdot5$.

გ) დავუშვათ p არაა მარტივი. მაშინ, მას ექნება გამყოფი k>1 და k<p. მაგრამ, k იქნება n-ის გამყოფიც. ეს კი ნიშნავს, რომ p არაა n-ის გამყოფებს შორის უმცირესი.



სავ.7. ა) ნახაზიდან ჩანს, რომ $2\alpha+2\beta=180° \Leftrightarrow \alpha+\beta=90°$.

ბ) „მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევარია“. მტკიცდება, მაგალითად, ჰიპოტენუზის შუა წერტილიდან კათეტზე პერპენდიკულარის დაშვებით.

სავ.8. ვთქავთ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია და მისი ელემენტე-ბია: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. მაშინ, $1+m_1\cdot m_2\cdot \ldots \cdot m_n$ ჯამი შედგენილი რიცხვია, რადგან არ უდრის არცერთ მარტივ რიცხვს. მაგრამ, ეს რიცხვი არ იყოფა არცერთ მოცემულ მარტივ რიცხვზე, რაც ნიშნავს, რომ ის არაა შედგენილი რიცხვი.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №1

1. დ; 2. გ; 3. ბ; 4. ა; 5. გ; 6. დ;

7.

A	B	$A \vee B$
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ
მ	ჭ	ჭ
მ	მ	მ

8.

A	B	$A \Rightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ

9. $A \vee \overline{A}$ ჭეშმარიტი, ხოლო $A \wedge \overline{A}$ მცდარი გამონათქვამია. ამიტომ $A \vee \overline{A} \Rightarrow A \wedge \overline{A}$ მცდარი გამონათქვამია.

10. A-ს მცდარობიდან გამომდინარეობს, რომ მირიანია ფეხბურთელი, გიორგი - არა; B-ს ჭეშმარიტებიდან კი – შიო არაა ფეხბურთელი.

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

თავი 2. ნამდვილი რიცხვები

თავის მიზანია, მოსწავლემ შეძლოს:

- ✓ რაციონალი რიცხვების სხვადასხვა ფორმით ჩაწერა;
- ✓ პერიოდული ათწილადის წილადის სახით წარმოდგენა;
- ✓ ირაციონალური რიცხვების განმარტება და ამოცნობა;
- ✓ კალკულატორის ირაციონალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების მოცემული სიზუსტით გამოსათვლელად გამოყენება;
- ✓ ნამდვილი რიცხვის, როგორც უსასრულო ათწილადის დახასიათება;
- ✓ რიცხვის რაციონალური ხარისხის განმარტება და გამოყენება;
- ✓ ირაციონალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების, როგორც ზღვრული პროცესის შედეგის გააზრება და განმარტება;
- ✓ რიცხვის ირაციონალური ხარისხის, როგორც ზღვრული პროცესის შედეგის გააზრება და განმარტება;
- ✓ საფინანსო მოქმედებათა (ფასის მრავალჯერადი კლება-მატება, დაგროვილი ანაბარი, სესხის დაფარვა და სხვ.) მათემატიკური ანალიზი.

მატრიცა

<table>
<tr><td colspan="3">თემა - რიცხვები

საკითხი - ნამდვილი რიცხვები

სამიზნე ცნება - ნამდვილი რიცხვი (შედეგი მათ.საშ.1. მათ.საშ. 3) ქვეცნება - რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები ქვესაკითხი: ფინანსური მათემატიკა</td></tr>
<tr><td colspan="3">საკვანძო შეკითხვა - რის შედეგად წარმოიშვება პერიოდული ათწილადი?

- რა მათემატიკური მოდელით ხდება საბანკო სესხის დაფარვა?</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებასთან/ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები
<u>მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:</u></td><td>შეფასების კრიტერიუმი
<u>მოსწავლეს შეუძლია:</u></td><td><u>ნაშრომში/ნაშრომში პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:</u></td></tr>
<tr><td>რიცხვები
1.ნამდვილი რიცხვი პერიოდული და არაპერიოდული ათწილადების ერთობლიობაა.</td><td>• ნამდილი რიცხვის, როგორც უსასრულო ათწილადის განმარტება;</td><td>• რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა</td></tr>
</table>

რაციონალური რიცხვები 2. რაციონალური რიცხვი ორი მთელი რიცხვის შეფარდებას წარმოადგენს. რაციონალური რიცხვი შეგვიძლია სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით ჩავწეროთ. ორ რაციონალურ რიცხვის შორის უამრავი რაციონალური რიცხვია. **ირაციონალური რიცხვები** 3. ირაციონალური რიცხვი უსასრულო არაპერიოდული ათწილადია. 4. ირაციონალურ რიცხვებს შეგვიძლია რაციონალური რიცხვებით ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ. **ფინანსური მათემატიკა** 5. საფინანსო მოქმედებათა წარმოებაში გამოიყენება მათემატიკური ფომულები: მაგალითად, მარტივი და რთული პროცენტის ფორმულები, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრისა და წევრთა ჯამის ფორმულები და ა.შ. 6. ანაბარის დაგროვებას, როგორც წესი, რთული პროცენტის ფორმულით ითვლიან. 7. თუ ბანკში n-წლითა და p-პროცენტით აღებულია b ლარი, მაშინ მის დასაფარად ყოველწლიური (მუდმივი) გადასახადი გამოითვლება ფორმულით: $a=\frac{bq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$, სადაც $q=1+\frac{p}{100}$.	• რაციონალური რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა ფორმის გამოყენება (წილადის, ათწილადის, პროცენტის, შერეული რიცხვის, უსასრულო პერიოდული ათწილადის); • ირაციონალური რიცხვების დასახელება და სასრული ათწილადით მისი ნებისმიერი სიზუსტით მიახლოება; • დადებითი რიცხვის რაციონალური ხარისხის მოცემული სიზუსტით ტექნოლოგიების საშუალებით გამოთვლა; • რაციონალური ხარისხის შემცველ გამოსახულებებზე მოქმედებები; • ფასის მრავალჯერადი კლება-მატების შედეგის გამოთვა; • ანაბრის დაგროვილი თანხის დადგენა; • საბანკო სესხის დასაფარი ყოველწლი გადასახადის გამოთვლა.	დაგეხმარა დავალების შესრულებაში; • რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს; • სასკოლო სახელმძღვანელოს გარდა კიდევ რა ლიტერატურა დაგჭირდა დავალების შესასრულებლად. • როგორ გამოთვალე სანდროს მიერ ყოველთვიურად გადასახდელი თანხის ოდენობა? • რა განსხვავებაა სესხის კალკულატორით და შენ მიერ გამოთვლილ თვიურ გადასახადს შორის? • როგორ ფიქრობ, რამ გამოიწვია ეს განსხვავება? • რა ტექნიკური საშუალებები და საძიებო სისტემები გამოიყენე დავალების შესასრულებლად.

კომპლექსური დავალება

„საბანკო სესხის წლიური გადასახადის გამოთვლა“

თანამედროვე მსოფლიოში ადამიანის საქმიანობის ყველა სფეროში მნიშვნელოვანი ადგილი ფინანსებს უკავია. ფინანსები განსაზღვრავს მრეწველობის, სოფლის მეურნეობის, მეცნიერების, განათლების, თავდაცვის, მედიცინისა და სპორტის მიღწევებსა და განვითარების დონეს. საფინანსო ორგანიზაციების სწორად წარმართულ და ოპტიმალურად გათვლილ მოქმედებებზეა დიდწილად დამოკიდებული ქვეყნის ეკონომიკური პროგრესი.

ფინანსურ საქმიანობაში, ნებსით თუ უნებლიეთ, ყველა ადამიანია ჩართული: დაწყებული ბავშვიდან, რომელიც მაღაზიაში 1 ლარად კანფეტს ყიდულობს, დამთავრებული ბიზნესმენით, რომელიც ბანკიდან 1 მილიარდიან სესხს იღებს. ამიტომ მნიშვნელოვანია, რომ ყველა ფლობდეს საფინანსო საქმიანობის ელემენტარულ უნარ-ჩვევებს, როგორებიცაა მაგალითად, ამა თუ იმ პროდუქტზე პროცენტული ფასდაკლების ან/და ფასნამატის გამოთვლა, ბანკში ანაბარზე შეტანილი თანხის ნამატის გამოთვლა, ბანკიდან ასაღები სესხის პირობების ანალიზი, სესხის პროცენტის მიხედვით წლიური გადასახადის დადგენა და სხვ.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, კარგად გავარკვიოთ აღებული სესხის დაფარვის პირობები და მოვარგოთ ის ჩვენს ფინანსურ შესაძლებლობებს, რათა არ აღმოვჩნდეთ ფინანსური კოლაფსის მდგომარეობაში.

შენი დავალება:

1. შეისწავლე სახელმძღვანელოს ამ თავში მოცემული მასალა. გააანალიზე და ამოხსენი 2.4 პარაგრაფის თეორიულ ნაწილში მოცემული ამოცანები;
2. ისარგებლე 2.4 პარაგრაფში მოცემული ფორმულებით და ამოხსენი ამ პარაგრაფის სავარჯიშოები;
3. ამოხსენი ამოცანა:
   სანდროს ნომინალური თვიური ხელფასია 2500 ლარი. ხელფასის 20% საშემოსავლო გადასახადია, ხოლო დარჩენილი თანხის 40% საყოფაცხოვრებო ხარჯებს ხმარდება. სანდრომ გადაწყვიტა აიღოს ავტოსესხი 50 000 ლარის ოდენობით. შეძლებს თუ არა სანდრო 5 წელიწადში ვალის დაფარვას, თუ ბანკის წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%? (პასუხი დაასაბუთე.)

4. ა) ინტერნეტით მოიძიე რომელიმე ბანკის სესხის კალკულატორი;
   ბ) სესხის კალკულატორის საშუალებით მე-3 დავალების მონაცემების მიხედვით გამოთვალე სანდროს მიერ ყოველთვიურად გადასახდელი თანხა;

გ) დაადგინე, დაახლოებით, რამდენი პროცენტითაა მეტი სესხის კალკულატორით მიღებული შედეგი შენ მიერ ფორმულის გამოყენებით მიღებულ შედეგზე.

5. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:
    - რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
    - რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
    - როგორ გამოთვალე სანდროს მიერ ყოველთვიურად გადასახდელი თანხის ოდენობა?
    - როგორ ფიქრობ, რამ გამოიწვია სესხის კალკულატორით და შენ მიერ ფორმულის გამოყენებით გამოთვლილ გადასახადს შორის განსხვავება?
    - რა ტექნიკური საშუალებები და საძიებო სისტემები გამოიყენე დავალების შესასრულებლად?
    - არის თუ არა ბანკიდან სესხის აღება ყოველთვის მიზანშეწონილი?

კომპლექსური დავალების განხორციელების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები, შეკითხვები)

ეტაპი I – კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა

რესურსები/განსახილველი ქეისები:

რესურსი 1. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს მე-2 თავი;

რესურსი 2. ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიები, კალკულატორი.

<u>**კომპლექსური დავალების პირობის გააზრებაზე ორიენტირებული შეკითხვები:**</u>

ქვესაკითხი - **კომპლექსური დავალება**

- შენი სიტყვებით ჩამოაყალიბე, რას შეეხება მოცემული დავალება, რომელზეც რამდენიმე გაკვეთილის განმავლობაში უნდა იმუშაო.
- მსგავსი ფორმის, ან შინაარსის დავალება სხვა დროს თუ შეგისრულებია?

ეტაპი II – კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა

ქვეცნებები -

- რაციონალური რიცხვის ჩაწერის ფორმები; სასრული და უსასრულო პერიოდული ათწილადები (პარ. 2.1);
- ირაციონალური რიცხვები (პარ. 2.2);
- ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვებით მიახლოება (პარ. 2.2);
- რიცხვის რაციონალური ხარისხი (თვისებები და ზუსტი და მიახლოებითი გამოთვლა) (პარ. 2.3);
- მრავალჯერადი საპროცენტო დარიცხვა (რთული პროცენტის ფორმულა) (პარ. 2.4);
- ერთი და იმავე თანხის მრავალჯერადი შენატანის შედეგის გამოთვლა (პარ. 2.4-ის მე-2 ფორმულა);

- საბანკო სესხის დასაფარი ყოველწლიური გადასახადის გამოთვლა (პარ. 2.4-ის მე-4 ფორმულა).

ქვესაკითხები -

კალკულატორის მიახლოები გამოთველბის საწარმოებლად გამოყენება (პარ. 2.3);

ნაბიჯი 1. 1-ელი დავალების შესრულება;

- მნიშვნელოვანია, რომ 2.4 პარაგრაფის განხილვამდე გავამეორებინოთ პროცენტის განმარტება და ძირითადი ამოცანები პროცენტებზე. შესაბამისი ამოცანები მოცემულია 2.3 პარაგრაფის სავარჯიშობის გასამეორებელი მასალის ნაწილში (სავ.19-24).
- სასურველია, რომ პარაგრაფში მოცემული ფორმულები გამოვიყვანოთ დაფასთან, მოსწავლეთა აქტიური ჩართულობით.

პირველ დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- რაში მდგომარეობს რთული დარიცხვის წესი?
- რა შემთხვევში წარმოიშვება გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი?
- რა სიდიდეთა გატოლებით მიიღება პარაგრაფში მოცემული მე-4 ფორმულა?

ნაბიჯი 2. მეორე დავალებაზე მუშაობა

მოსწავლეები ხსნიან პარაგრაფის სავარჯიშოებს (ამოხსნები მოცემულია მასწავლებლის წიგნის 2.4 პარაგრაფის სავარჯიშოების კომენტარებში)

ნაბიჯი 3. მესამე დავალებაზე მუშაობა

მესამე დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- როგორ გამოვთვალოთ ხელფასიდან დარჩენილი თავისუფალი თანხა?
  პასუხი: 2500·0,80·0,60=1200 (ლარი);
- როგორ გამოვთვალოთ ყოველთვიური გადასახადი?
  პასუხი: გამოვიყენოთ პარაგრაფის მე-4 ფომულა, რომლითაც მიიღება წლიური გადასახადი (დაახლოებით 12384 ლარი). შემდეგ გავყოფთ წელწადში თვეების რაოდენობაზე (12). მივიღეთ პასუხს (ერთეულის სიზუსტით დაახლოებით 1032 ლარი);
- შეძლებ თუ არა სანდრო ვალის 5 წელწადში დაფარვას?
  პასუხი: შეძლებს, რადგან 1200>1032.

ნაბიჯი 4. მეოთხე დავალებაზე მუშაობა

მეოთხე დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

ა) როგორ მოიძიე ინტერნეტში სესხის კალკულატორი?

პასუხი: გუგლის საძიებო ველში ავკრიფოთ „სესხის კალკულატორი“ და ავირჩიოთ

ნებისმიერი ბანკი (მაგალითად, პროკრედიტ ბანკი);

ბ) როგორ გამოთვალე სესხის კალკულატორით სანდროს გადასახდელი თვიური თანხა?

პასუხი: სესხის კალკულატორის შესაბამის ველებში შევიტანოთ მონაცემები:

თანხა - 50 000, პერიოდი (თვე) – 60, პროცენტი - 12. ღილაკით „დათვლა" მივიღებთ: 1112,22 (ლარი).

გ) როგორ დაადგინე სესხის კალკულატორითა და ფორმულით გამოთვლილ პასუხებს შორის პროცენტული განსხვავება?

პასუხი: პასუხებს შორის სხვაობა (დაახლოებით 80 ლარი) გავყოთ ფორმულით გამოთვლილ თანხაზე (დაახლოებით 1032 ლარი) და გავამრავლოთ 100-ზე. მივიღებთ: 7,75%.

ნაბიჯი 5. მეხუთე დავალებაზე მუშაობა

მოსწავლეები შესრულებულ სამუშაოს ამზადებენ საპრეზენტაციოდ.

მართავენ დისკუსიას სხვადასხვა საკითხებზე. მაგალითად:

- არის თუ არა ბანკიდან სესხის აღება ყოველთვის გამართლებული? (სავარაუდო პასუხი შეიძლება იყოს: გამართლებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ჩვენი შემოსავალი იძლევა სესხის დაფარვის გარანტიას.)
- რატომ იძლევა განსხვავებას ბანკის სესხის კალკულატორი და მე-4 ფორმულა? (სავარაუდო პასუხი შეიძლება იყოს: ბანკი იყენებს განსხვავებულ ფორმულას ან ბანკი ითვალისწინებს სხვადასხვა რისკფაქტორს, ინფლაციას, ფორსმაჟორულ შემთხვევებს და სხვ.)
- როგორ იცვლება წლიური გადასახადი პროცენტის ან წლების ცვლილებით? (პასუხი: წლიური გადასახადი პროცენტის მიმართ ზრდადი, ხოლო წლების მიმართ კლებადი ფუნქციაა. ამაში დასარწმუნებლად უნდა განიხილონ ერთი და იმავე წლებისა და სხვადასხვა პროცენტის შემთხვევები (ასეთია მაგალითად 4.2 პარაგრაფის მე-15 ამოცანა) და ერთი და იმავე პროცენტის და სხვადასხვა წლების შემთხვევები) .

2.1 რაციონალური რიცხვები.

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- რაციონალური რიცხვების სხვადასხვა ფორმით ჩაწერა;
- უსასრულო პერიოდული ათწილადის წილადად წარმოდგენა.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ. №11. ა) $0,(7)=\frac{7}{9}$; ბ) $0,(9)=\frac{9}{9}=1$; გ) $0,(18)=\frac{18}{99}=\frac{2}{11}$;

დ) $10,(36)=10\frac{36}{99}=10\frac{4}{11}=\frac{114}{11}$; ე) $-2,(24)=-2\frac{24}{99}=-2\frac{8}{33}=\frac{-74}{33}$;

ვ) $0,1(5)=\frac{15-1}{90}=\frac{7}{45}$; ზ) $1,2(3)=1\frac{23-2}{90}=1\frac{7}{30}$;

თ) $20,3(15)=20\frac{315-3}{990}=20\frac{52}{165}=20\frac{52}{165}$;

ი) $1,41(123)=1\frac{41123-41}{99900}=1\frac{6847}{16650}=\frac{23497}{16650}$; კ) $9,0(12)=9\frac{12-0}{990}=9\frac{2}{165}$.

სავ. №12. $\frac{5}{10}<\frac{m}{20}<\frac{6}{10}\Leftrightarrow\frac{10}{20}<\frac{m}{20}<\frac{12}{20}$, პასუხი: $\frac{11}{20}$.

სავ. №13. $0,(7)<\frac{m}{27}<0,(8)\Leftrightarrow\frac{7}{9}<\frac{m}{27}<\frac{8}{9}\Leftrightarrow\frac{21}{27}<\frac{m}{27}<\frac{24}{27}$, პასუხი: $\frac{22}{27};\ \frac{23}{27}$.

სავ. №14. ნებისმიერად ავიღოთ ორი რაციონალური რიცხვი x და y, თითოეული წარმოიდგინება მთელი და ნატურალური რიცხვების განაყოფის სახით: $x=\frac{m_1}{n_1}$, $y=\frac{m_2}{n_2}$, ამიტომ $x+y=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2}{n_1n_2}+\frac{m_2n_1}{n_2n_1}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$, ე.ი. ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი რაციონალური რიცხვია.

სავ. №15. $xy=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$, ორი რაციონალური რიცხვის ნამრავლი წარმოდგა მთელი და ნატურალური რიცხვების განაყოფის სახით, ე.ი. ორი რაციონალური რიცხვის ნამრავლი რაციონალური რიცხვია.

სავ. №18. $4,(9)=4\frac{9}{9}=5=5,(0)$.

სავ. №19. ავიღოთ ორი განსხვავებული რაციონალური რიცხვი x და y. ვთქვათ, $x<y$. ვაჩვენოთ რომ მათი საშუალო, რომელიც ცხადია, მათ შორისაა, რაციონალური რიცხვია. მართლაც, რადგან მათი ჯამი და $\frac{1}{2}$, ასევე ორი რაციონალური რიცხვის ნამრავლი რაციონალური რიცხვია, ამიტომ $(x+y)\cdot\frac{1}{2}=\frac{x+y}{2}$ რაციონალურია, ამასთან $x<\frac{x+y}{2}<y$,

აღვნიშნოთ $x_1 = \frac{x+y}{2}$, $x_2 = \frac{x+x_1}{2}, x_3 = \frac{x+x_2}{2}, x_4 = \frac{x+x_3}{2}, \ldots$. ყოველი მათგანი x და y-ს შორისაა და რაციონალური რიცხვია, ე.ი. ყოველ ორ განსხვავებულ რაციონალურ რიცხვს შორის უამრავი რაციონალური რიცხვია.

სავ.20. k მარტივი რიცხვი 3-ზე არ იყოფა, ამიტომ

$k = \left[\begin{array}{l} 3m+1 \\ 3m+2 \end{array}\right. \Rightarrow k^2 - 1 = \left[\begin{array}{l} 9m^2 + 6m \\ 9m^2 + 6m + 3 \end{array}\right.$, ე.ი. $k^2 - 1$ იყოფა 3-ზე. რადგან k კენტია, ამიტომ $k = 2n+1 \Rightarrow k^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n+1)$, ე.ი. $k^2 - 1$ იყოფა 8-ზე. მივიღეთ, რომ $k^2 - 1$ იყოფა 3-ზე და 8-ზე, ანუ იყოფა 24-ზე. ე.ი. $\frac{k^2-1}{24}$-სახის წილადი, სადაც k არის 3-ზე მეტი მარტივი რიცხვი, ნატურალურ რიცხვს წარმოადგენს.

სავ.21. გამომდინარეობს გაერთიანებისა და თანაკვეთის განმარტებებიდან.

2.2. ირაციონალური რიცხვები

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- ირაციონალური რიცხვისა და ნამდვილი რიცხვის განმარტება და მაგალითების მოყვანა;
- ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი გამოთვლა;
- მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ. №4. ა) $\sqrt{13}$ ირაციონალური რიცხვია, რადგან 13 არაა სრული კვადრატი;

ბ) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$, ე.ი. $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ რაციონალური რიცხვია;

გ) $\sqrt{81} : \sqrt{4} = 9 : 2 = 4{,}5$, ე.ი. $\sqrt{81} : \sqrt{4}$ რაციონალური რიცხვია ;

დ) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 5 - 1 = 4$, ე.ი. $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 5 - 1 = 4$ რაციონალური რიცხვია ;

ე) და ვ) ირაციონალური რიცხვებია, რადგან რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების ჯამი ირაციონალური რიცხვია.

პასუხი: ა); ე); ვ).

სავ. №5. ა) $(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2$ რაციონალური რიცხვია, მართლაც:

$(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 8$;

ბ) $(\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2$ ირაციონალური რიცხვია, მართლაც:

$(\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2 = (3 + 2\sqrt{3} + 1) - (3 - 2\sqrt{3} + 1) = 4\sqrt{3}$.

სავ. №6. ა) $\sqrt{\frac{100}{49}} > \sqrt{2}$, ანუ $1\frac{3}{7} > \sqrt{2}$; ბ) $3\pi < 3 \cdot 3{,}2 < 10$; გ) $3{,}5\pi < 3{,}5 \cdot 3{,}142 = 10{,}997 < 11$.

დ) ორივე რიცხვი ავახარისხოთ მე-10 ხარისხში: $(\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32$; $(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25$; $32 > 25$.

პასუხი: ა) $1\frac{3}{7}$; ბ) 10; გ) 11; დ) $\sqrt{2}$.

სავ. №9. $\sqrt{2}$ მ ≈1,414მ=1414მმ.

სავ. №10. თუ $2\pi r = \frac{22}{7}$ ტოლობაში π რიცხვს ჩავანაცვლებთი მეასედამდე სიზუსტით მისი $\frac{22}{7}$ მნიშვნელობით, მივიღებთ $2r \approx 1$ (მ). პასუხი: $r \approx 50$ სმ.

სავ. №11. ა) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ რაციონალური რიცხვია. მართლაც:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left(\sqrt{2}+1\right) - \left(\sqrt{2}-1\right) = 2;$$

ბ) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ირაციონალური რიცხვია. მართლაც:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left(\sqrt{2}+1\right) + \left(\sqrt{2}-1\right) = 2\sqrt{2}.$$

სავ.12. ეს რიცხვია 0,(7931), ამიტომ იგი რაციონალური რიცხვია, $0,(7931) = \frac{7931}{9999}$.

შესაძლებელია თუ არა

ა) შეუძლებელია ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს ირაციონალური, რადგან ორი რაციონალური $x = \frac{m_1}{n_1}$ და $y = \frac{m_2}{n_2}$ რიცხვის ჯამი $x + y = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2}{n_1 n_2} + \frac{m_2 n_1}{n_2 n_1} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$ რაციონალური რიცხვია.

ბ) შესაძლებელია, მაგალითად, $\left(1+\sqrt{2}\right) + \left(1-\sqrt{2}\right) = 2$.

აბა სცადე!

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, p მარტივი, ხოლო $\sqrt{p}$ რაციონალური რიცხვია. მაშინ $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია. ამასთან, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, შეკვეცით მას უკვეცი წილადით ჩავანაცვლებთ. რადგან $\sqrt{p} = \frac{m}{n} \Rightarrow p = \frac{m^2}{n^2}$, საიდანაც $m^2 = pn^2$. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ m^2 და მაშასადამე m-იც იყოფა p-ზე, ანუ $m = pk$, სადაც $k \in N$. თუ $m^2 = pn^2$ ტოლობაში m-ის ნაცვლად pk -ს ჩავსვამთ, მივიღებთ: $p^2k^2 = pn^2 \Rightarrow pk^2 = n^2$, საიდანაც ვასკვნით, რომ n^2 და მასთან ერთად n-იც იყოფა p-ზე. გამოდის, რომ $\frac{m}{n}$ წილადი იკვეცება p-ზე, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას.

2.3 ხარისხის თვისებები

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს ხარისხის თვისებების გამოყენება გამოსახულებათა გამარტივებასა და გამოთვლებში

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $17^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{17^2} = \sqrt[3]{289},\quad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7},\quad 27^{-\frac{2}{3}} = \left((3)^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 3^{-2} = \frac{1}{9} = \sqrt{\frac{1}{81}},$

$16^{0{,}25} = \left(2^4\right)^{0{,}25} = 2 = \sqrt{4};$ ბ) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},\quad b^{-0{,}1} = b^{-\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{\frac{1}{b}},\quad x^{0{,}5} = \sqrt{x};$

გ) $(5a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5a},\quad (3a)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9a^2},\quad (2a)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2a}},\quad (2x)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2x},$

$(2x)^{-\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(2x)^{-1}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2x}},\quad \left(a^2b^3\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a^2b^3},\quad \left(a^2x\right)^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(a^2x\right)^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^4x^2}};$

დ) $(a-b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a-b},\quad (a-b)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a-b},\quad (a+b)^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{(a+b)^3}},$

$(a+b)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a+b},\quad (1+x)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x}}.$

სავ.№2. ა)

$3^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2,\quad 5^{-\frac{1}{3}} = \left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^2,\quad 2^{\frac{2}{3}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2,\quad 3^{-\frac{1}{4}} = \left(3^{-\frac{1}{8}}\right)^2,$

$7^{0{,}5} = \left(7^{0{,}25}\right)^2,\quad 2^{0{,}25} = \left(2^{\frac{1}{8}}\right)^2,\quad (0{,}0001)^{0{,}75} = \left((0{,}1)^{\frac{3}{2}}\right)^2;$

ბ) $7^{\frac{1}{2}} = \left(7^{\frac{1}{4}}\right)^2,\quad 8^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(2^3\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad 9^{\frac{3}{4}} = \left(3^2\right)^{\frac{3}{4}} = \left(3^{\frac{3}{4}}\right)^2,\quad 16^{-\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-1} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^2,$

$5^{0{,}3} = \left(5^{0{,}15}\right)^2,\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}2} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}1}\right)^2,\quad 3^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^2.$

სავ.№3. ა) $a^6 = \left(a^2\right)^3,\quad a^{12} = \left(a^4\right)^3,\quad a^{\frac{1}{6}} = \left(a^{\frac{1}{18}}\right)^3,\quad b^{-\frac{1}{3}} = \left(b^{-\frac{1}{9}}\right)^3,\quad b^{15} = \left(b^5\right)^3,\quad b^{0{,}9} = \left(b^{0{,}3}\right)^3,$

$c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{6}} = \left(c^{\frac{1}{6}}\right)^2 \cdot c^{\frac{1}{6}} = \left(c^{\frac{1}{6}}\right)^3;$

ბ) $a^9 = \left(a^3\right)^3,\quad a^2 = \left(a^2\right),\quad a^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}},\quad b^{\frac{1}{4}} = \left(b^{\frac{1}{4}}\right),$

$b^{-12} = \left(b^{-4}\right)^3,\quad b^{0{,}3} = \left(b^{0{,}1}\right)^3,\quad c^{\frac{1}{15}} = \left(c^{\frac{1}{45}}\right)^3,\quad c^{-\frac{1}{5}} = \left(c^{-\frac{1}{15}}\right)^3.$

სავ.№4. ა) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}}=3^{\frac13-\frac15}=3^{\frac{2}{15}}$, $\frac{\sqrt[5]{9}}{27}=3^{\frac25-3}=3^{-\frac{13}{5}}$, $\frac{3}{\sqrt[5]{81}}=3^{1-\frac45}=3^{\frac15}$,

$\left(\sqrt[3]{9}\right)^5=\left(\left(3^2\right)^{\frac13}\right)^5=3^{\frac{10}{3}}$, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{-\frac13}=\left((3)^{\frac14}\right)^{-\frac13}=3^{-\frac{1}{12}}$;

ბ) $\sqrt{\sqrt[5]{3^2}}=\left(3^{\frac25}\right)^{\frac12}=3^{\frac15}$, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}=\left(3^{\frac15}\right)^{\frac13}=3^{\frac{1}{15}}$,

$\sqrt{\sqrt[4]{3^5}}=\left(3^{\frac54}\right)^{\frac12}=3^{\frac58}$, $\sqrt{\frac13\sqrt[3]{3}}=\left(3^{-1}\cdot3^{\frac13}\right)^{\frac12}=3^{-\frac13}$;

გ) $\sqrt{\sqrt[5]{3^{\frac23}}}=3^{\frac{1}{15}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^{\frac35}}}=3^{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\sqrt[4]{3^{\frac13}}}=3^{\frac{1}{24}}$, $\sqrt{\left(\frac13\right)^{-2}\sqrt[3]{3}}=\sqrt{3^2\cdot3^{\frac13}}=3^{\frac76}$;

დ) $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac23}$, $\sqrt{a^3b}=\left(a^3b\right)^{\frac12}$, $\sqrt[5]{2a}=(2a)^{\frac15}$, $\sqrt[5]{a^3}=a^{\frac35}$,

$\sqrt{\sqrt[3]{x^7}}=x^{\frac76}$, $\sqrt[5]{y\sqrt{x}}=\left(y^2x\right)^{\frac{1}{10}}$, $\sqrt[7]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{14}}$.

სავ.№5. ა) $a^{\frac15}a^{\frac13}a^{\frac14}=a^{\frac{47}{60}}=\sqrt[60]{a^{47}}$; ბ) $b^{\frac14}b^{-\frac34}b^{-\frac{5}{12}}\sqrt{b}=b^{\frac14-\frac34-\frac{5}{12}+\frac12}=\sqrt[12]{\frac{1}{b^5}}$;

გ) $\left(c^{\frac14}c^{\frac38}c^{\frac12}\right)^2=c^{\frac12+\frac34+1}=c^{\frac94}=\sqrt[4]{c^9}$; დ) $\sqrt[5]{a^{-2}\sqrt{a^3}}=\sqrt[10]{a^{-1}}$;

ე) $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{1-x}}$; ვ) $\sqrt{\frac{x^5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}}=\sqrt{x^{\frac{17}{3}-\frac14}}=x^{\frac{65}{24}}=\sqrt[24]{x^{65}}$.

სავ.№6. ა) $7^{\frac14}\cdot7^{\frac14}=\left(7^{\frac14}\right)^2=7^{\frac12}=\sqrt7$; ბ) $81^{\frac23}:81^{\frac16}=81^{\frac23-\frac16}=81^{\frac12}=\left(9^2\right)^{\frac12}=9$;

გ) $\left(\left(2^3\right)^{\frac13}\right)^{\frac43}=2^{\frac43}=2\sqrt[3]{2}$; დ) $625^{\frac23}=25^{\frac43}=25\sqrt[3]{25}$; ე) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac13}=\frac23$;

ვ) $\frac{\left(a^{\frac38}\right)^4}{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[6]{a}$; ზ) $a^{\frac23}:\left(\frac1a\right)^{-\frac13}=\sqrt[3]{a}$; თ) $a^{1,3}:\left(\frac1a\right)^{-0,7}=\sqrt[5]{a^3}$; ი) $9^{\frac13}\cdot24^{\frac13}=6$.

სავ.№7. ა) 2; ბ) 6; ო) 225.

სავ.№8. ა) $\left(100^{-0,5}\cdot64^{\frac23}\cdot0,2^{-\frac12}\cdot4^{-\frac34}\cdot4^{-0,75}\right)^2=\left(\frac{1}{10}\cdot16\cdot\sqrt5\cdot4^{-\frac32}\right)^2=\frac{1}{100}\cdot4\cdot5=\frac15$;

ბ) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+3\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}=4+10+8=22;$ გ) $\frac{12^{0{,}5}\cdot 8^{0{,}5}}{7^{\frac{1}{3}}\cdot 8}\cdot\frac{3^{0{,}5}\cdot 7^{\frac{4}{3}}}{8^{-\frac{1}{6}}}=21;$ დ) 2.

სავ.№9. ა) $\left(27^{-\frac{2}{3}}+81^{\frac{3}{4}}-(0{,}25)^{-2}\right)^{0{,}5}=\left(\frac{1}{9}+27-16\right)^{0{,}5}=\left(11\frac{1}{9}\right)^{0{,}5}=\frac{10}{3};$

ბ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}+3\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}=8+10+8=26;$

გ) $\left(27^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=(9+5+2)^{\frac{1}{4}}=2;$

დ) $\left[8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}=[4+27+5]^{\frac{1}{2}}=6.$

სავ.№11. ა) $\left\{\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(25^{0{,}5}\cdot 25\right)^{2}\right]:\left(\frac{125^{\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{13}{8}}}{625^{-\frac{1}{4}}\cdot 32}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{16}}=$

$=\{[4\cdot 625]:(625\cdot 8)\}^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{16}}=2^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2};$

ბ) $\left[5\sqrt{125}^{-\frac{2}{3}}-25^{0{,}5}81^{-0{,}25}\right]\cdot\left[\left(5\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}+81^{-0{,}25}\right]=5\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{9}\right)=-\frac{16}{45}.$

სავ.№12. ა) $\frac{x-1}{x+x^{0{,}5}+1}\left(\frac{x^{0{,}5}+1}{x^{1{,}5}-1}\right)^{-1}+\frac{1}{x^{-0{,}5}\cdot 2^{-1}}=$

$\frac{\left(x^{0{,}5}+1\right)\left(x^{0{,}5}-1\right)}{x+x^{0{,}5}+1}\cdot\frac{\left(x^{0{,}5}-1\right)\left(x+x^{0{,}5}+1\right)}{x^{0{,}5}+1}+2\cdot x^{0{,}5}=\left(x^{0{,}5}-1\right)^{2}+2\cdot x^{0{,}5}=x+1;$

ბ) $\frac{1-x^{-2}}{x^{0{,}5}+x^{-0{,}5}}+\frac{2}{x^{1{,}5}}+\frac{x^{-1}-x^{2}}{x^{1{,}5}-x^{0{,}5}}=\frac{x-1}{x^{1{,}5}}+\frac{2}{x^{1{,}5}}-\frac{x^{2}+x+1}{x^{1{,}5}}=-\frac{x^{2}}{x^{1{,}5}}=-\sqrt{x}.$

სავ.№13. ა) $\sqrt{x^{2}-8x+16}+\sqrt{x^{2}+8x+16}=|x-4|+|x+4|=4-x+x+4=8;$

ბ) $\sqrt{25-10x+x^{2}}+\sqrt{x^{2}+10x+25}=|5-x|+|5+x|=5-x-5-x=-2x;$

გ) $\sqrt{49-14x+x^{2}}+\sqrt{x^{2}+14x+49}=|7-x|+|7+x|=x-7+7+x=2x;$

დ) $\sqrt{x^{2}-8x+16}+\sqrt{x^{2}+8x+16}=|x-4|+|x+4|=x-4+x+4=2x.$

სავ.№14. ა) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^3 \cdot 27^{2y} = 81, \\ 9^y \cdot 3^4 \cdot 27^x = 243; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{2x+6y+3} = 3^4, \\ 3^{3x+2y+4} = 3^5; \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} 2x+6y+3=4, \\ 3x+2y+4=5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7}, \\ y = \frac{1}{14}; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 8^x \cdot 4^4 \cdot 4^{4y} = 32, \\ 16^y \cdot 2^4 \cdot 4^{3x} = 64; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+8y+8=5, \\ 3x+2y+2=3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{9}, \\ y = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

სავ.№16. ა) 20; დ) 25. **სავ.№ 17.** 3000 ლარი. **სავ.№ 18.** 2000 ლარი.
სავ.№ 19. $x \cdot 1{,}1 = 78{,}1$, $x = 71$ ლარი. **სავ.№ 20.** 20%-ით. **სავ.№ 21.** $b_1=1$, $q=2$, $S_{10}=1023$.

2. 4 საფინანსო საქმიანობასთან დაკავშირებული ამოცანები

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- რთული პროცენტის ფორმულის გამოყენება საფინანსო საქმიანობასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოსახსნელად;
- ბანკში აღებული სესხის დასაფარავი ყოველწლიური გადასახადის ოდენობის დადგენა.

საფინანსო საქმიანობასთან დაკავშირებულ ამოცანებს წინა კლასებშიც განვიხილავდით. მაგალითად, მე-9 კლასში ვიხილავდით და ვადარებდით მარტივი და რთული საპროცენტო დარიცხვის შემთხვევებს, ხოლო მეათე კლასში ამოცანებს საპროცენტო დარიცხვაზე ვიხილავდით არამთელი წლების შემთხვევაშიც.

მოცემულ პარაგრაფში ადრე შესწავლილ ამოცანებთან ერთად ვიხილავთ ისეთ შემთხვევებს, როდესაც ყოველწლიურად ბანკში შეგვაქვს ერთი და იგივე თანხა და რთული საპროცენტო დარიცხვით დაგროვილი თანხის გამოსათვლელად რთული პროცენტის ფორმულასთან ერთად საჭიროა გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენება. სახელმძღვანელოში გამოყვანილი ამ ფორმულიდან (იხ. მე-2ფორმულა) გამომდინარეობს ბანკში აღებული სესხის დასაფარი გადასახადის წლიური ოდენობის გამოსათვლელი ფორმულა (იხ.მე-4 ფორმულა). ამ ფორმულების გააზრება სამომავლოდ მოსწავლეებს საფინანსო ორგანიზაციებთან ურთიერთობის სწორად წარმართვაში დაეხმარება.

შენიშვნა: ამოცანებში, სადაც თანხის რაოდენობა მიახლოებითია, პასუხს ვამრგვალებთ ერთ თეთრამდე (ანუ მეასედამდე) სიზუსტით.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ამოვხსნათ 2 გზით.

1 გზა. მოიმატა 500 ლარით. $\frac{500}{2500} \cdot 100 = 20\%$.

2 გზა. ვთქვათ მოიმატა p%-ით. ვწერთ განტოლებას: $2500 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 3000 \Rightarrow p = 20.$

სავ.№2. შევადგინოთ განტოლება: $x \cdot 0,7^2 = 490 \Rightarrow x = 1000$ (ლარი).

სავ.№3. იანვრიდან მაისის ჩათვლით 5 თვეა, ამიტომ მაისის ბოლოს ფასი იქნება $3,2 \cdot 1,03^5 \approx 3,71$. პასუხი. 3 ლარი და 71 თეთრი.

სავ.№4. ა) $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow p = 50$; ბ) $1+\dfrac{p}{100} = 2\dfrac{1}{4} \Rightarrow p = 125$.

სავ.№5. ა) $\left(1-\dfrac{p}{100}\right)^2 = \dfrac{9}{16} \Rightarrow p = 25$; ბ) $1-\dfrac{p}{100} = \dfrac{9}{16} \Rightarrow p = 43,75$.

სავ.№6. ა) $\left(1-\dfrac{p}{100}\right)^3 = \dfrac{8}{27} \Rightarrow p = 33,(3)$; ბ) $1-\dfrac{p}{100} = \dfrac{8}{27} \Rightarrow p \approx 70,37$.

სავ.№7. მოსწავლეებს შევახსენოთ, რომ რთული პროცენტის ფორმულას ვიყენებთ არამთელი წლების შემთხვევაშიც. $600 \cdot 1,04^{4,5} \approx 715,82$ (ლარი)

სავ.№8. $x \cdot 1,05^2 = 44100 \Rightarrow x = 40000$ (ლარი).

სავ.№9. ვისარგებლოთ პარაგრაფში მოცემული მე-2 ფორმულით: $\dfrac{500 \cdot 1,05\left(1,05^6 - 1\right)}{1,05 - 1} \approx 3570$ (ლარი).

სავ.№10. ვისარგებლოთ პარაგრაფში მოცემული მე-2 ფორმულით და დავწეროთ განტოლება: $\dfrac{x \cdot 1,1\left(1,1^3 - 1\right)}{1,1 - 1} = 7282 \Rightarrow x = 2000$ (ლარი).

სავ.№11. ვისარგებლოთ პარაგრაფში მოცემული მე-3 ფორმულით:

$$400 \cdot 1,08^4 + \frac{200 \cdot 1,08\left(1,08^4 - 1\right)}{1,08 - 1} \approx 1516 \text{ (ლარი).}$$

სავ.№12. ვისარგებლოთ პარაგრაფში მოცემული მე-4 ფორმულით:

$$a = \frac{100000 \cdot 1,08^{10-1}(1,08 - 1)}{1,08^{10} - 1} \approx 13800 \text{ (ლარი).}$$

სავ.№13. პარაგრაფში მოცემული მე-4 ფორმულით მივიღებთ, რომ წლიური გადასახადი 1 თეთრის სიზუსტით არის 2632 ლარი და 84 თეთრი. ყოველთვიური გადასახადი 12-ჯერ ნაკლებია წლიურ გადასახადზე: $2632,84 : 12 = 219,40(3)$. პასუხი: 219 ლარი და 40 თეთრი.

სავ.№14. ვთქვათ კატომ ისესხა b ლარი. მაშინ 5 წლის განმავლობაში მას გადასახდელი ექნება $b \cdot 1,08^5$ ლარი. კატოს მიერ ყოველწლიურად გადახდილი 15000 ლარი 5 წელწადში მე-2 ფორმულის თანახმად დააგროვებს $\dfrac{1500 \cdot 1,08(1,08^5 - 1)}{1,08 - 1}$ ლარს. ამ ორი რაოდენობის გატოლებით და შესაბამისი გამოთვლებით მივიღებთ: $b \approx 64680$ ლარი.

საკ.№15. ვთქვათ სესხია b ლარი. მეოთხე ფორმულით, მეათიათასამდე სიზუსტით მივიღებთ, რომ 8%-ის შემთხვევაში წლიური გადასახადია $0,2398b$, ხოლო 10%-ის შემთხვევაში – $0,2319b$. ამიტომ, საძიებელი პროცენტია $\frac{0,2398b-0,2319b}{0,2319b}\cdot 100\approx 3,4$. პასუხი: 3,4%.

აბა, სცადე! $1,05^n=2$ განტოლებიდან კალკულატორისა და შერჩევის მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $n\approx 14,2$. აქედან ვასკვნით, რომ გაორმაგებას დასჭირდება დაახლოებით 14 წელი და ორნახევარი თვე (ამავე ამოცანას სასურველია დავუბრუნდეთ ლოგარითმული გამოთვლების შესწავლის დროს).

პასუხი. 2038 წლის მარტში.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №2

1. $\frac{37}{20}=\frac{185}{100}=1,85$. პასუხი: გ).
2. $\frac{21}{30}=\frac{7}{10}=0,7$. პასუხი: ბ).
3. $\frac{13}{15}=\frac{26}{30}=\frac{1}{10}\cdot\frac{26}{3}=\frac{1}{10}\cdot 8,(6)=0,8(6)$. პასუხი: ა).
4. $3,42(5)=3\frac{425-42}{900}=3\frac{383}{900}$. პასუხი: დ).
5. პასუხი: დ).
6. $\sqrt{3}=\sqrt{\frac{300}{100}}\approx\sqrt{\frac{289}{100}}=\frac{17}{10}=1,7$. პასუხი: გ).
7. მცდარია გ)" ნებისმიერი ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი ირაციონალური რიცხვია", მართლაც, $\sqrt{3}$ და $-\sqrt{3}$ ირაციონალური რიცხვებია, მათი ჯამი კი რაციონალურია.
8. $0,6\cdot 0,4=0,24$. პასუხი: ა) 76%-ით.
9. ვითვლით კალკულატორით: $1000\cdot 1,04^{4,75}=1204,7817$.
   პასუხი: 1204 ლარი და 78 თეთრი.
10. ვსარგებლობთ 2.4 პარაგრაფის მე-4 ფორმულით: $40000\cdot 1,2^9\cdot 0,2:(1,2^{10}-1)=7950,75865$.
    პასუხი: 7950 ლარი და 76 თეთრი.

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

თავი 3. ტრიგონომეტრია

თავის მიზანია, მოსწავლემ შეძლოს:

- პერიოდული მოვლენების მაგალითების მოყვანა;
- პერიოდული ფუნქციის ამოცნობა, პერიოდის პოვნა და გრაფიკის აგება;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებების (ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, ნიშანმუდმივობისა და ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები) დასაბუთება ერთეულოვანი წრეწირისა და გრაფიკის გამოყენებით;
- დაყვანის ფორმულების დასაბუთება და გამოყენება;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გამოთვლა კალკულატორის დახმარებით;
- უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ზოგადი ამონახსნის და მოცემულ შუალედში მოთავსებული ამონახსნის პოვნა;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციის, როგორც რიცხვითი ფუნქციის განმარტება და გრაფიკის აგება;
- ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირის დასაბუთება და ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებებსა და გამოთვლებში გამოყენება;
- კოსინუსებისა და სინუსების თეორემებისა და მათი შედეგების ჩამოყალიბება, დასაბუთება და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება;
- სამკუთხედების ამოხსნა სამი ელემენტით (რომელთაგან ერთი ელემენტი მაინცაა გვერდი);
- სამკუთხედის სამი მოცემული ელემენტით (მაგალითად სამი გვერდით) სამკუთხედთან დაკავშირებული სიდიდეების (ფართობი, ჩახაზული და შემოხაზული წრის რადიუსი, მედიანა, ბისექტრისა, სიმაღლე და სხვ.) პოვნა.

მატრიცა

თემა- ტრიგონომეტრია **საკითხი** - პრაქტიკული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით **სამიზნე ცნება** - ფუნქცია (შედეგი მათ. საშ. 2,3,4) **ქვეცნება** - ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

საკითხი/საკითხები: ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, მათი თვისებები, მნიშვნელობები და გრაფიკები; ტრიგონომეტრიული გამოსახულებები, ტრიგონომეტრიული განტოლებები, კოსინუსებისა და სინუსების თეორემები.
ქვესაკითხი - პრაქტიკული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით.

საკვანძო შეკითხვა - როგორ გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები მანძილების გასაზომად?

სამიზნე ცნებასთან/ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:	**შეფასების კრიტერიუმი** მოსწავლეს შეუძლია:	ნაშრომში პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინეთ:
1. ფუნქცია ორ ცვლადს შორის ისეთი დამოკიდებულებაა, რომლის დროს ერთი ცვლდის (არგუმენტის) ყოველ მნიშვნელობას მეორე ცვლადის ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება. 2. არგუმენტის ცვლილების არეს f ფუნქციის განსაზღვრის არე (აღ.D(f)), ხოლო მნშვნელობათა ერთობლიობას მნიშვნელობათა არე (აღ.E(f)) ეწოდება. 3. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები რიცხვითი ფუნქციებია, ანუ მათი როგორც განსაზღვრის, ისე მნიშვნელობათა არე რიცხვითი სიმრავლეებია. 4. ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის sinx ერთეულოვანი წრეწირის იმ წერტილის ორდინატაა, რომელიც (1;0) კოორდინატების მქონე წერტილის x რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით მიიღება, ხოლო cosx იმვე წერტილის აბსცისაა.	• ფუნქციის განმარტება, სიტყვიერად, ცხრილით, ფორმულით ან გრაფიკულად მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობების დადგენა; • ფუნქციის განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა; • ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ერთეულოვანი წრის დახმარებით განმარტება, მათი განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის მითითება. • ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებების (ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, ნულები, ნიშანმუდმივობის შუალედები, დაყვანის ფორმულები, დამოკიდებულობები ერთი და იმავე არგუმენტის შემთხვევაში, საწყისი განტოლების	• რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში; • რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს; • როგორ გაზომე საჭირო კუთხეები; • როგორ გამოთვალე კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები; • რა ნიშნით შეარჩიე გასაზომი მანძილები; • რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად; ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და იმ ობიექტების ფო-

5. სინუსის და კოსინუსის განსაზღვრის არეა R, ხოლო მნიშვნელობათა არე $[-1;1]$ შუალედი. ტანგენსის მნიშვნელობთა არეა R. 6. $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z.$ 7. სინუსის და კოსინუსის განსაზღვრის არეა R, ხოლო მნიშვნელობათა არე $[-1;1]$ შუალედი. ტანგენსის მნიშვნელობთა არეა R. 8. ა)სინუსების თეორემა: სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პირდაპირპროპორციულია; ბ)კოსინუსების თეორემა: სამკუთხედის გვერდის კვადრატი დანარჩენი გვერდების კვადრატების ჯამისა და ამ გვერდების გაორკეცებული ნამრავლის სხვაობის ტოლია.	ამონახსთა ფორმულები) ჩამოყალიბება, დასაბუთება და გამოყენება. • სინუსების და კოსინუსების თეორემების სამკუთხედების ამოსახსნელად გამოყენება. • ტრიგონომეტრიის პრაქტიკული ამოცანების (ფიგურათა ფართობის, პუნქტებს შორის მანძილის, ობიექტის ზომების და სხვ.) ამოსახსნელად გამოყენება.	ტოები, რომელთა ზომებიც გამოთვალე.

კომპლექსური დავალება

„გეომეტრიული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით“

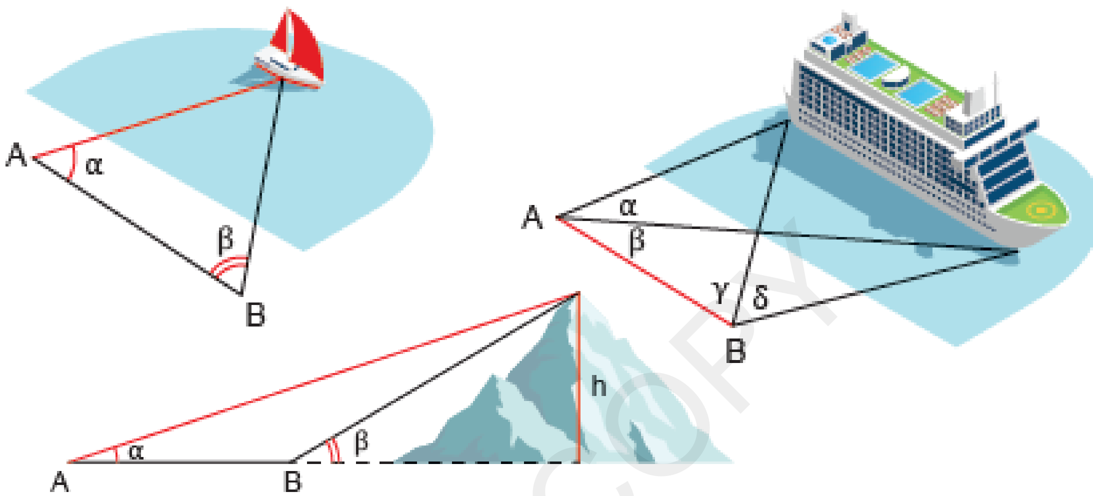
ტრიგონომეტრია ქართულად სამკუთხედის გაზომვას ნიშნავს. იგი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის მიმართებებს ადგენს. ტრიგონომეტრიული გამოთვლები გამოიყენება მათემატიკის, ფიზიკისა და საინჟინრო საქმის ყველა მიმართულებაში. ტრიგონომეტრიას იყენებენ ასტრონომები ვარსკვლავებამდე, ხოლო გეოგრაფები გეოგრაფიულ ობიექტებამდე მანძილის დასადგენად, მედიკოსები – კომპიუტერულ ტომოგრაფიაში, ნავიგაციის სპეციალისტები – საჰაერო და საზღვაო ნავიგაციაში და სხვ.

ტრიგონომეტრიას გარკვეული გაზომვების ჩასატარებლად წინა წლებშიც ვიყენებდით. ვადგენდით ხის ან შენობის სიმაღლეს, მანძილს ორ წერტილს შორის და ა.შ. მაგრამ ყველა ამ გამოთვლაში ვსარგებლობდით მხოლოდ მართკუთხა სამკუთხედში არსებული ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულებებით.

ამ თავში მოცემული მასალა, რომელიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების უფრო ღრმა ანალიზს ეთმობა, საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ნებისმიერი სამკუთხედი, ანუ სამკუთხედის მოცემული სამი ელემენტით, რომელთაგან ერთი მაინცაა გვერდი, ვიპოვოთ სამკუთხედის დანარჩენი ელემენტები.

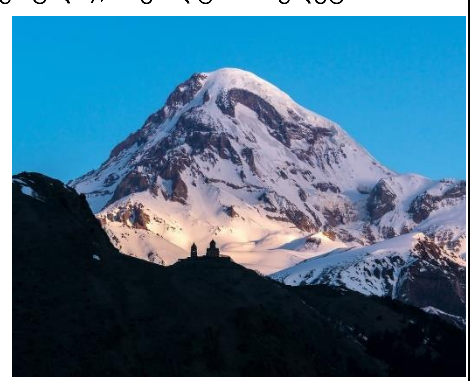
სამკუთხედის ამოხსნის ამ თავში განხილული მეთოდები საშუალებას იძლევა პრაქტიკული გაზომვები ვაწარმოოთ გასაზომი ობიექტიდან დიდ მანძილზე ყოფნის შემთხვევაშიც. ასეთი გაზომვის რამდენიმე მაგალითი სახელმძღვანელოშია მოცემული.

ქვემოთ მოცემულია სამი სქემატური ნახაზი, რომელთაგან ერთზე ნაპირიდან ზღვაში მყოფ იახტამდე მანძილი, მეორე შემთხვევაში - გემის სიგრძე, ხოლო მესამე შემთხვევაში - მწვერვალამდე მანძილი და მწვერვალის სიმაღლეა გამოსათვლელი.



შენი დავალება:

1. ნახაზებზე მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის სიტყვიერად აღწერე საძიებელი სიდიდეების პოვნის ეტაპები და გამოსახე ეს სიდიდეები ნახაზზე მოცემული სიდიდეების საშუალებით (ნახაზებზე მოცემულად ითვლება AB მონაკვეთი და მასთან მდებარე კუთხეები);
2. მიღებული შედეგები გამოიყენე პრაქტიკული გაზომვებისათვის:
   ა) გაზომვები ჩაატარე შენთვის მოხერხებული სხვადასხვა ობიექტის შემთხვევაში (მაგალითად, გაზომე მანძილი მახლობლად მდგომ ობიექტამდე, ხის ან შენობის სიმაღლე, უახლოესი გორაკის ან მთის სიმაღლე და სხვა). შეეცადე, რომ ჩატარებული გაზომვები მოიცავდეს მოცემული ნახაზების სამივე შემთხვევას;
   ბ) გაითვალისწინე, რომ ნახაზებზე მოცემული AB მონაკვეთის სიდიდის შერჩევისას (რაც, ერთი შეხედვით, მხოლოდ შენზეა დამოკიდებული), რეალური შედეგის მისაღებად, ეს სიდიდე გასაზომი ობიექტის თანაზომადი უნდა იყოს. მაგალითად, თუ ხის სიმაღლის გასაზომად საკმარისია AB ავიღოთ 1-2 მეტრი, მყინვარის სიმაღლის გასაზომად ასეთი სიგრძის მონაკვეთი არ გამოდგება, რადგან ამ შემთხვევაში α და β კუთხეებს შორის განსხვავება პრაქტიკულად არ დაფიქსირდება. ამიტომაა, რომ, მაგალითად, მახლობელ პლანეტებამდე მანძილის გასაზომად A-სა და B-ს როლში იღებენ დედამიწის ორ უშორეს წერტილთა წყვილს, ხოლო შორეულ ვარ-



სკვლავებამდე მანძილის გასაზომად დედამიწაზე არსებული მანძილები გამოუსადეგარია;

გ) კუთხეთა გასაზომად კუთხის მზომი ხელსაწყო შეგიძლია თვითონ დაამზადო.

3. შეადარე შენ მიერ ჩატარებული გაზომვის შედეგები რეალურ ზომებს.

კომპლექსური დავალების განხორციელების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები, შეკითხვები)

ეტაპი I – კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა

რესურსები/განსახილველი ქეისები:

- **რესურსი 1**. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს პირველი თავი;
- **რესურსი 2.** ინფორმაციულ საკომუნიკაციო ტექნოლოგიები;
- **რესურსი 3.** კალკულატორი;
- **რესურსი 4.** ხანის აკადემია;
- **რესურსი 5**. კუთხისა და მანძილის საზომი ხელსაწყოები.

კომპლექსური დავალების პირობის გააზრებაზე ორიენტირებული შეკითხვები:

- რა საერთო აქვთ და რით განსხვავდება $y=\sin x$ და $y=\cos x$ ფუნქციები.
- როგორ უნდა გამოთვალო მოცემული არგუმენტისთვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა?
- კომპლექსურ დავალებაში მოცემულ ნახაზებზე დაკვირვებით რა სიდიდეების ცოდნა არის აუცილებელი საჭირო მანძილების დასადგენად?
- რა სახის ფაქტების ცოდნა დაგეხმარება ამოცანების გადაწყვეტაში?
- როგორ ფიქრობ, სამკუთხედში ორი კუთხისა და ერთი გვერდის ცოდნა საკმარისია თუ არა დანარჩენი გვერდების საპოვნელად?
- როგორ ფიქრობ, სამკუთხედში ორი გვერდისა და ერთი კუთხის ცოდნა საკმარისია თუ არა დანარჩენი კუთხეებისა და მესამე გვერდის საპოვნელად?
- მოიფიქრე რა ობიექტებამდე მანძილების და რა ობიექტების ზომების დადგენას შეეცდები მოცემული დავალების შესრულებისას.
- რა იგულისხმება ტერმინში „სამკუთხედების ამოხსნა“ ?
- როგორ გამოთვლი სამკუთხედში მოცემული სამი გვერდით ამ სამკუთხედის ა)ბისექტრისას? ბ)სიმაღლეს? გ)მედიანას? დ)ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსებს? ე)ფართობს?

ქვესაკითხი - **კომპლექსური დავალება**

- შენი სიტყვებით ჩამოაყალიბე, რას შეეხება დღეს მოცემული დავალება, რომელზეც რამდენიმე გაკვეთილის განმავლობაში უნდა იმუშაო.
- მსგავსი ფორმის, ან შინაარსის დავალება სხვა დროს თუ შეგისრულებია?

ეტაპი II – კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა

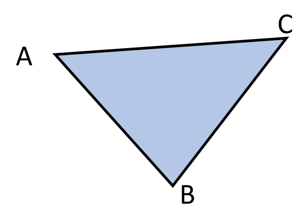
ქვეცნებები -

- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობები (პარ.3.2);
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით (პარ.3.2-3.4);
- დაყვანის ფორმულები (ბლაგვი კუთხის დაყვანა მახვილ კუთხეზე) (პარ. 3.5);
- არგუმენტის მიხედვით ფუნქციის მნიშვნელობის პოვნა და პირიქით, არგუმენტის პოვნა ფუნქციის მნიშვნელობის მიხედვით (პარ.3.6-3.9);

ქვესაკითხები -

- კოსინუსების თეორემა და მისი შედეგები (პარ.3.9);
- სინუსების თეორემა და მისი შედეგები (პარ.3.10).

ნაბიჯი 1. 1-ელი დავალების შესრულება;



მოვიყვანოთ 1-ელი დავალების შესრულების ნიმუში:

ა) გემამდე მანძილის გამოთვლა.

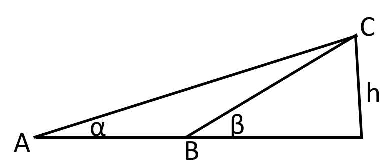
მოცემულია AB გვერდი და α და β კუთხეები.

უნდა გავიგოთ AC.

სინუსების თეორემისა და დაყვანის ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$AC = \frac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

ბ) მთის სიმაღლის დადგენა.



მოცემულია AB გვერდი და α და β კუთხეები.

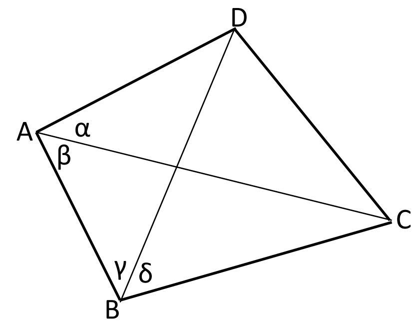
უნდა გავიგოთ AC.

ABC სამკუთხედში სინუსების თეორემისა და დაყვანის ფორმულის გამოყენებით

ABC სამკუთხედიდან $AC = \frac{AB\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$. ხოლო მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$h = AC\sin\alpha = \frac{AB\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)};$$

გ) გემის სიგრძის გამოთვლა.



ამოცანის ამოხსნა დავყოთ სამ საფეხურად:

I. ABD სამკუთხედში სინუსების თეორემით და დაყვანის ფორმულით
$$AD = \frac{AB \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)};$$

II. ABC სამკუთხედში სინუსების თეორემით და დაყვანის ფორმულით
$$AC = \frac{AB \cdot \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)};$$

III. ACD სამკუთხედში კოსინუსების თეორემით
$$CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC\cos\alpha}$$

პირველ დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- რაში მდგომარეობს კოსინუსების თეორემა?
- რაში მდგომარეობს სინუსების თეორემა?
- დაყვანის რა ფორმულა გამოიყენე პირველი ამოცანის ამოსახსნელად?
- რა ეტაპები დაგჭირდა მესამე ამოცანის ამოსახსნელად?
- რომელ ამოცანაში გამოიყენე ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულება მართკუთხა სამკუთხედში?

ნაბიჯი 2. მეორე დავალებაზე მუშაობა

- რა ობიექტები შეარჩიე ზომების დასადგენად?
- რა გაზომვები ჩაატარე?
- როგორ გამოთვალე კუთხეები?
- რა სიგრძის აიღე მონაკვეთი თითოეულ შემთხვევაში?
- რა საკითხების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში? რა ხელსაწყოები გამოიყენე?

შენიშვნა 1. სასურველია, რომ ობიექტები იყოს ძნელად მისადგომი.

ნაბიჯი 3. მესამე დავალებაზე მუშაობა

- როგორ დაადგინე ობიექტის რეალური ზომები?
- რა ფარდობითი ცდომილება მიიღე რეალურ ზომებსა და შენ მიერ დადგენილ ზომებს შორის?

შენიშვნა2. ფარდობითი ცდომილება არის რეალურ და გამოთვლილ ზომებს შორის სხვაობის შეფარდება რეალურ ზომასთან. მაგალითად, თუ მოსწავლე ყაზბეგის რაიონში ცხოვრობს, ზომავს მყინვარის სიმაღლეს სოფელ სნოდან და გაზომვის შედეგად მიიღო სიმაღლე 3 200 მეტრი, იმის გათვალისწინებით, რომ მოსწავლე ზღვის დონიდან დაახლოებით 1700 მეტრზე იმყოფება, მყინვარის სიმაღლე გამოდის 4900 მეტრი. მყინვარის რეალური სიმაღლე ზღვის დონიდან 5054 მეტრია. ასეთ შემთხვევაში ფარდობითი ცდომილებაა $\dfrac{5054-4900}{5054} \approx 0{,}03 = 3\%$.

ნაბიჯი 4. ნაშრომის საპრეზენტაციოდ მომზადება

პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ გაზომე საჭირო კუთხეები;
- როგორ გამოთვალე კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები;
- რა ნიშნით შეარჩიე გასაზომი მანძილები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად;
- ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და იმ ობიექტების ფოტოები, რომელთა ზომებიც გამოთვალე.

3.1 პერიოდული ფუნქცია

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- პერიოდული მოვლენების ამოცნობა და დასახელება;
- პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრა და გრაფიკის აგება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ. №1. დილის 8 საათიდან დაწყებული, ყოველ 6 საათში ორივე საათი ერთდროულად დარეკავს. მეორე დილის 7 საათამდე, ანუ 23 საათში ორივე საათი ერთდროულად კიდევ სამჯერ დარეკავს: დღის 2 საათზე, საღამოს 8 საათზე და ღამის 2 საათზე. პასუხი: 3-ჯერ.

სავ.2. რომ დარეკოს, დილის 6 საათიდან გასული უნდა იყოს 5-ის ჯერადი საათი, იგივე დროზე (დილის 6 საათზე) რომ დარეკოს, დილის 6 საათიდან გასული უნდა იყოს 24-ის ჯერადი საათი, ე.ი. 120 საათის შემდეგ დარეკავს საათი ისევ დილის 6 საათზე.
პასუხი: 5 დღის შემდეგ.
სავ. №3. ა) f(-2,3)= f(-2,3+1+1)= f(-0,3)=9; ბ) f(3,7)= f(3,7-1-1-1-1)= f(-0,3)=9. პასუხი: ა)9; ბ)9.
სავ. №4. ა) f(3)+g(5)= f(3-3)+g(5-5)=f (0)+ g(0) = -3;
ბ) f(-6)+g(-10)= f(-6+3+3)+g(-10+5+5)=f (0)+ g(0) = -3;
გ) f(15)+g(15)= f(15-3-3-3-3-3)+g(15-5-5-5)=f (0)+ g(0) = -3. პასუხი: ა)-3; ბ)-3; გ)-3 .
სავ. №5. f + g ფუნქციის დადებითი პერიოდია 20. მართლაც, განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი x არგუმენტისათვის
(f + g) (x) = f(x) + g(x)= f(x+4+4+4+4+4) + g(x+5+5+5+5)= f(x+20) + g(x+20)= (f + g) (x+20).
პასუხი: 20.
სავ. №6-7. აიგება პარაგრაფში განხილული მაგალითის ანალოგიურად.
სავ. №8. ($T_1 + T_2$) რიცხვი იქნება ამავე f ფუნქციის პერიოდი. მართლაც,
$f(x)=f(x+T_1) = f(x+T_1+T_2)$ ტოლობა სრულდება ნებისმიერი x არგუმენტისათვის განსაზღვრის არიდან.
სავ. №9. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, f(x)=2x ფუნქციას გააჩნია ნულისგან განსხვავებულუი T პერიოდი. მაშინ, f(x+T)= f(x), ანუ 2(x+T)=2x , საიდანაც T=0, რაც შეუძლებელია. ე.ი. დაშვება მცდარია, ანუ f(x)=2x ფუნქცია არაა პერიოდული.
სავ. №10. რადგან m და m+2k (სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია) ერთდროულადაა ლუწი ან კენტი, ამიტომ $f(m)=\begin{cases}1, & \text{თუ } |m| \text{ კენტია,}\\ 2, & \text{თუ } |m| \text{ ლუწია}\end{cases}$ ფუნქციის პერიოდია ნებისმიერი ლუწი მთელი რიცხვი, ამასთან, $f(0+1)=1\neq 2=f(0)$ ე.ი. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2 .
სავ. №11. რადგან x და x+r, სადაც r ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, ერთდროულადაა რაციონალური, ანდა ირაციონალური , ამიტომ f(x+r)= f(x) ნებისმიერი რაციონალური r რიცხვისათვის. ე.ი. მოცემული ფუნქციის პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი. უმცირესი დადებითი რაციონალური რიცხვი არ არსებობს, ამიტომ ფუნქციას უმცირესი დადებითი პერიოდი არ გააჩნია.
სავ. №12. თუ $\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}$, $m,n\in N$, მაშინ $T_1\cdot n=T_2\cdot m$. ვთქვათ $T=T_1\cdot n=T_2\cdot m$. ამ ტოლობებიდან ვასკვნით, რომ T არის, როგორც f_1-ის, ისე f_2 -ის პერიოდი, ამიტომ T იქნება მათი ჯამის პერიოდიც.
შენიშვნა: პერიოდული ფუნქციების ჯამი იმ შემთხვევაში, როცა პერიოდების ფარდობა ირაციონალური რიცხვია, არაა პერიოდული ფუნქცია. მაგალითად, $\sin x+\sin\pi x$ არაპერიოდული ფუნქციაა.

სავ. №15. მახვილი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ sinα=cosβ. ოთხივე შემთხვევაში პასუხია 1.

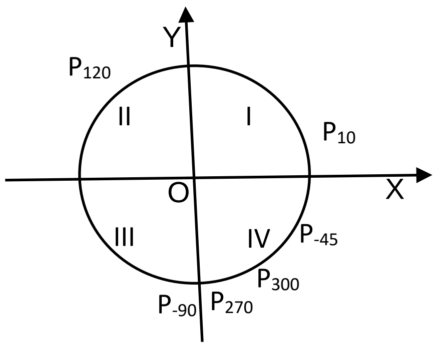
3.2 ერთეულოვანი წრეწირი.

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის საშუალებით ნებისმიერი გრადუსული ზომის არგუმენტის შემთხვევაში;
- ფუნქციათა თვისებების (მნიშვნელობები, ნიშნები, ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა) ჩამოყალიბება და დასაბუთება ერთეულოვან წრეწირზე დემონსტრირებით.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1



სავ.№2. $285^\circ \in IV$; $-376^\circ \in IV$; $204^\circ \in III$; $-172^\circ \in III$; $-12^\circ \in IV$;
$730^\circ \in IV$; $-90^\circ \in IV \bigcap III$; $800^\circ \in IV$.

სავ.№3. ა) $(x;y)$; ბ) $(x;y)$; გ) $(-x;-y)$.

სავ.№4. ა) $\sin 65^\circ > 0$; $\sin 105^\circ > 0$; $\sin 161^\circ > 0$; $\sin 179^\circ > 0$; $\sin 200^\circ < 0$; $\sin 250^\circ < 0$;
$\sin 365^\circ > 0$; $\sin 380^\circ > 0$;

ბ) $\cos 40^\circ > 0$; $\cos 87^\circ > 0$; $\cos 100^\circ < 0$; $\cos 192^\circ < 0$; $\cos 200^\circ < 0$; $\cos 250^\circ < 0$;
$\cos 339^\circ > 0$; $\cos 380^\circ > 0$;

გ) $tg 40^\circ > 0$; $tg 80^\circ > 0$; $tg 100^\circ < 0$; $tg 102^\circ < 0$; $tg 185^\circ$; $tg 250^\circ$; $tg 286^\circ < 0$;
$tg 320^\circ < 0$; $tg 368^\circ > 0$.

სავ.№5. ა) სინუსი დადებითია პირველ და მეორე მეოთხედებში ; ბ) კოსინუსი დადებითია პირველ და მეოთხე მეოთხედებში; გ) ტანგენსი დადებითია პირველ და მესამე მეოთხედებში.

სავ.№6. ა) $\sin 145^\circ$ – დადებითია; ბ) $\sin(-92^\circ)$ –უარყოფითია; გ) $\cos 145^\circ$ – უარყოფითია;
დ) $\cos(-45^\circ)$ – დადებითია; ე) $tg 96^\circ$ – უარყოფითია; ვ) $tg 182^\circ$ დადებითია.

სავ.№7. ა) $\sin 85^\circ \cdot \sin 102^\circ$ – დადებითია; ბ) $\cos 184^\circ \cdot \cos 172^\circ$ – დადებითია;
გ) $\sin 142^\circ \cdot \sin 142^\circ \cdot tg 142^\circ$ – უარყოფითია; დ) $tg 111^\circ \cdot tg 172^\circ$ – დადებითია;
ე) $\cos 192^\circ \cdot tg 255^\circ$ – უარყოფითია; ვ) $\sin 80^\circ \cdot tg 290^\circ \cdot \cos 170^\circ$ – დადებითია.

სავ.№8. ა) რადგან ერთეულოვან წრეწირზე, პირველ მეოთხედში, რაც მეტია კუთხე, მით მეტია შესაბამისი ორდინატა, ანუ სინუსი, ამიტომ $\sin 20^\circ < \sin 40^\circ$? ბ) რადგან ერთეულოვან წრეწირზე, პირველ მეოთხედში, რაც მეტია კუთხე, მით ნაკლებია შესაბამისი აბსცისა, ანუ კოსინუსი, ამიტომ $\cos 20^\circ > \cos 40^\circ$? გ) $tg 20^\circ < tg 40^\circ$.

სავ.№9. ა) $\sin 25^\circ - \sin 26^\circ < 0$; ბ) $\sin 130^\circ - \sin 240^\circ > 0$; გ) $\cos 25^\circ - \cos 26^\circ > 0$;
დ) $\sin 45^\circ - \sin 40^\circ > 0$; ე) $\sin 62^\circ - \sin 70^\circ < 0$; ვ) $\cos 40^\circ - \cos 42^\circ > 0$.

სავ.№10. ა) $\sin 20^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\sin 70^\circ$, $\sin 80^\circ$;
ბ) $\cos 90^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 40^\circ$, $\cos 30^\circ$.

სავ.№11. ა) $\sin 180^\circ=0$, $\cos 180^\circ=-1$, $tg 180^\circ=0$; ბ) $\sin 270^\circ=-1$, $\cos 270^\circ=0$, $tg 270^\circ$ არ არსებობს;

გ) $\sin 360^{\circ}=0,\ \ \cos 360^{\circ}=1,\ \ \operatorname{tg} 360^{\circ}=0.$

საქ.№13. ა) $\sin 585^{\circ}=\sin(585^{\circ}-360^{\circ})=\sin 225^{\circ};$

ბ) $\cos(-860^{\circ})=\cos 860^{\circ}=\cos(860^{\circ}-720^{\circ})=\cos 140^{\circ}.$

საქ. №16. 60° ; 120° .

საქ. №17. 45° ; 225° .

საქ. №18. 90° ; 270° .

საქ. №20. ა) $5\sin 90^{\circ}+2\cos 0^{\circ}-2\sin 270^{\circ}+10\cos 180^{\circ}=5+2+2-10=-1;$

ბ) $13\sin 0^{\circ}+12\cos 90^{\circ}-3\operatorname{tg} 30^{\circ}=0+0-\sqrt{3}=-\sqrt{3};$

გ) $3\operatorname{tg} 0^{\circ}+2\cos 90^{\circ}+3\sin 270^{\circ}-3\cos 180^{\circ}=0+0-3+3=0;$

დ) $\sqrt{2}\cos 45^{\circ}-\sqrt{3}\operatorname{tg} 60^{\circ}+2\operatorname{tg} 45^{\circ}=1-3+2=0.$

საქ. №21. ა) $4a\sin^2 45^{\circ}-3(a\operatorname{tg} 45^{\circ})^2-(2a\cos 45^{\circ})^2=2a-3a^2-2a^2=2a-5a^2;$

ბ) $$\frac{(\sin 90^{\circ})^2-(\operatorname{tg} 45^{\circ})^2}{2a^2\sin 30^{\circ}-2ab\cos 0^{\circ}+(b\operatorname{tg} 45^{\circ})^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

საქ. №22. ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) π ; გ) $\frac{\pi}{12}$.

საქ. №23. ა) $\sin 120^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 120^{\circ}=-\frac{1}{2},\ \operatorname{tg} 120^{\circ}=-\sqrt{3};$

ბ) $\sin 150^{\circ}=\frac{1}{2},\ \cos 150^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 150^{\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}};$

გ) $\sin 300^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 300^{\circ}=\frac{1}{2},\ \operatorname{tg} 300^{\circ}=-\sqrt{3}.$

საქ. №24. ა) $\alpha=160^{\circ}$, მართლაც, $\sin 160^{\circ}=\sin(180^{\circ}-20^{\circ})=\sin 20^{\circ}=a;$

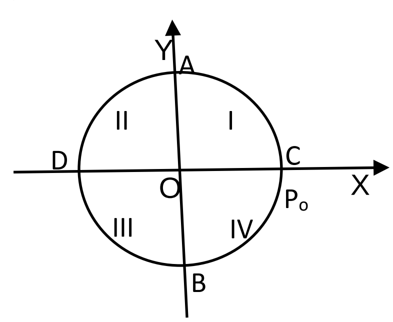
ბ) $\alpha=200^{\circ}$, მართლაც, $\sin 200^{\circ}=\sin(180^{\circ}+20^{\circ})=-\sin 20^{\circ}=-a.$

საქ. №25. ა) $\alpha=160^{\circ}$, მართლაც, $\cos 160^{\circ}=\cos(180^{\circ}-20^{\circ})=-\cos 20^{\circ}=-a;$

ბ) $\alpha=340^{\circ}$, მართლაც, $\cos 340^{\circ}=\cos(360^{\circ}-20^{\circ})=\cos 20^{\circ}=a.$

საქ. №26. ა) ასეთი α იქნება ნებისმიერი კუთხე, რომელიც ერთეულოვან წრეწირზე მობრუნებისას P_0 წერტილს გადაიყვანს C ან D წერტილში, ანუ $\alpha=180^{\circ}k$, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია;

ბ) ასეთი α იქნება ნებისმიერი კუთხე, რომელიც ერთეულოვან წრეწირზე მობრუნებისას P_0 წერტილს გადაიყვანს A ან B წერტილში, ანუ $\alpha=90^{\circ}+180^{\circ}k$, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია



სავ. №27. რადგან წრეწირის სიგრძეა $2\pi R$, დიამეტრი $-2R$, ამიტომ წრეწირის სიგრძე მის დიამეტრს აღემატება $\frac{2\pi R}{2R} = \pi$ - ჯერ, რადიუსს $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ - ჯერ.

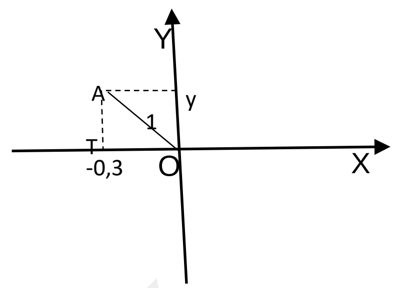
სავ. №28. ა) π; ბ) $\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) $\frac{\pi}{4}$; ე) $\frac{\pi}{6}$; ვ) $\frac{\pi}{12}$.

სავ. №29. ა) 5; ბ) 1; გ) 1.

სავ. №30. პითაგორას თეორემის გამოყენებით გვექნება:

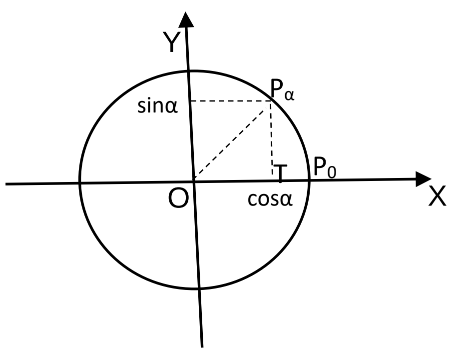
$$OT^2 + AT^2 = 1^2 \Rightarrow 0{,}09 + AT^2 = 1 \Rightarrow AT = \sqrt{0{,}91},$$

ე.ი. A წერტილის ორდინატაა $\sqrt{0{,}91}$.



აბა, სცადე!

დამტკიცება: ჯერ ვაჩვენოთ, რომ მართებულია $1 \Rightarrow 2$ გამონათქვამი. მართლაც, თუ $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, მაშინ ცხადია, P_α წერტილი არ ეკუთვნის II ან III მეოთხედს, რადგან ასეთ შემთხვევაში $\cos\alpha \le 0$, საიდანაც გვექნება: $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sin\alpha \le 1$, რაც ეწინააღმდეგება მოცემულობას. ანალოგიურად, IV მეოთხედის შემთხვევაში გვექნება: $\sin\alpha + \cos\alpha \le \cos\alpha \le 1$, რაც ისევ წინააღმდეგობაშია მოცემულობასთან, ე.ი. P_α წერტილი ეკუთვნის I მეოთხედს.



ახლა ვაჩვენოთ, რომ მართებულია $2 \Rightarrow 1$ გამონათქვამი. მართლაც, ვთქვათ, P_α წერტილი ეკუთვნის I მეოთხედს, ჩავწეროთ სამკუთხედის უტოლობა OTP_α მართკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში, მივიღებთ: $OT + TP_\alpha > OP_\alpha$, ანუ $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

საბოლოოდ გვაქვს, $1 \Leftrightarrow 2$ გამონათქვამი: **„იმისათვის, რომ P_α წერტილი ეკუთვნოდეს პირველ მეოთხედს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს უტოლობა: $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$“**

3.3 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- კუთხის რადიანული ზომის განმარტება და გრადუსულ ზომასთან დაკავშირება;
- რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. $\frac{2}{15}\pi$.

სავ.№2. $\frac{1}{16}\pi$.

სავ.№3. ა) π. ბ) 4π.

სავ.№4. ა) I; ბ) II; გ) II; დ) III; ე) IV.

სავ.№5. ა) თითოეული დადებითია;

ბ) პირველი სამი უარყოფითი, დანარჩენი დადებითია;

გ) პირველი სამი უარყოფითი, დანარჩენი დადებითია.

სავ.№6. $\sin 4 < 0,\ \cos 1{,}5 > 0,\ \mathrm{tg}\, 0{,}3 > 0$.

საშ.№7. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)>0;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)>0;\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)>0;\ \cos(\pi-\alpha)<0;$

$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)>0;\ \mathrm{tg}(2\pi-\alpha)<0.$

საშ.№8. $\frac{2\pi}{9},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{9}.$ **საშ.№9.** $12°,\ 36°,\ 132°.$

საშ.№10. $\frac{2\pi}{15},\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{5}.$

საშ.№11. ა) თითოეული $\frac{\pi}{3}$, ; ბ) თითოეული $\frac{\pi}{2}$, ; გ) თითოეული $\frac{2\pi}{3}$.

საშ.№12. ა) 0; ბ) 13; გ) $\sqrt{2}+3$; დ) -2.

საშ.№13. ა) $2a-a^2$; ბ) $b\sqrt{2}-a$; გ) $b\sqrt{2}-3\sqrt{3}a+a$; დ) $\frac{a+b}{a-b}$.

საშ.№14. ა) $\sin1° < \sin1$; ბ) $\sin0,5 < \sin0,6$; გ) $\sin6° > \sin6$;

დ) $\cos0,8 > \cos0,9$; ე) $\cos60° < \cos\frac{\pi}{6}$; ვ) $\cos30° > \cos3$.

საშ.№15. ა) $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$, ბ) $\alpha=2\pi k,\ k\in Z$, გ) $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ $\mathrm{tg}\alpha=0$.

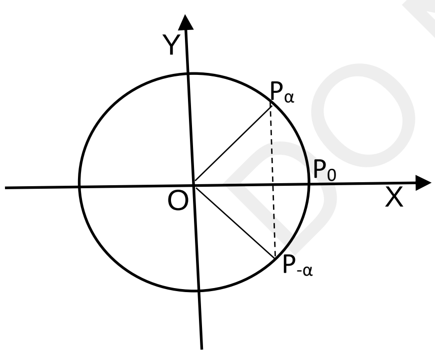
საშ.№16. არის, რადგან მასთან $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$.

საშ.№17. ა) $\sin0,5<\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sin0,5<0,5$; ბ) $\cos0,5>\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\cos0,5>0,5$;

გ) $\mathrm{tg}1>\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\Rightarrow\mathrm{tg}1>1$.

საშ.№18. წრის რადიუსია 12 სმ.

საშ.№ 19. ერთეულოვან წრეწირზე ავიღოთ რაიმე წერტილი. ამ წერტილიდან აბცისათა ღერძზე დავუშვათ მართობი და ეს მართობი გავაგრძელოთ წრეწირთან გადაკვეთამდე. მივიღებთ ქორდას. ჩენტრიდან ქორდისადმი გავლებული მართობი ქორდასაც და მის მიერ მოჭიმულ რკალსაც შუაზე ყოფს, ამიტომ ქორდის ერთი ბოლო წერტილი თუ არის P_α, მეორე ბოლო წერტილი იქნება აბცისათა ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული $P_{-\alpha}$ წერტილი. რ.დ.გ.



საშ.№24. ა) $y=x^3+4x$ კენტია; ბ) $y=3x^2+5$ ლუწია;

გ) $y=\frac{7}{|x|}$ ლუწია; დ) $y=x^2+5x$ არც კენტია, არც ლუწი ;

ე) $y=\sqrt{x}$ არც კენტია, არც ლუწი ; ვ) $y=\frac{2x}{x^2+1}$ კენტია.

საშ.№25. ა) $[20;+\infty)$; ბ) $(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$; გ) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; დ) $y=(-\infty;+\infty)$.

საშ.№26. ა) a ; ბ) $-a$; გ) $-a$; დ) a .

3.4 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ჩამოყალიბება და ერთეულოვანი წრეწირის საშუალებით დასაბუთება;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებასა და გამოთვლაში გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№ 1. ა); $\sin 2,5\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; ბ) $\sin 5\pi = 0$; გ) $\sin(-2,5\pi) = -1$; დ) $\sin 20\pi = 0$;

ე) $\sin\frac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ვ) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ზ) $\cos 4,5\pi = 0$; თ) $\cos(-4,5\pi) = 0$; ი) $\cos\frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; კ) $\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ლ) $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

მ) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; ნ) $\mathrm{tg}3\pi = 0$; ო) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$; პ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -1$; ჟ) $\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$;

რ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; ს) $\mathrm{tg}\frac{19\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

სავ.№2. ა) მოცემული ფუნქციისათვის განსაზღვრის არედან აღებული ყოველი x არგუმენტისათვის $-x$ ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და

$$f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin x = -\left(x^3 + \sin x\right) = -f(x),$$

ამიტომ ფუნქცია კენტია;

ბ) $y = 2\cos x + \sin^2 x$ ფუნქცია ლუწია; გ) $y = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ ფუნქციაკენტია;

დ) $y = \frac{1 + 2\sin x}{1 - 2\cos x}$ ფუნქცია არც ლუწია, არც კენტი.

სავ.№3. ა) $y = x - \sin x$ ფუნქცია არაა პერიოდული;

ბ) $y = 2\cos x + \sin x$ ფუნქცია პერიოდულია , პერიოდით 2π; გ) $y = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ ფუნქცია პერიოდულია , პერიოდით π; დ) $y = \frac{2 - \sin x}{1 + 2\cos x}$ ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით 2π.

სავ.№4. ა) $\frac{2\pi}{5}$; ბ) $\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) 4π; ე) $\frac{\pi}{2}$; ვ) 2π.

სავ.№5. ა) $\frac{2\pi}{7}$; ბ) $\frac{3\pi}{2}$; გ) 6π.

სავ.№6. როცა $\pi<\alpha<1,5\pi$ მაშინ $\cos\alpha$ უარყოფითია, ამასთან,

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \sin^2\alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{12}{13}, \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{-5}{13} : \frac{-12}{13} = \frac{5}{12}.$$

სავ.№8. რადგან $0,5\pi<\alpha<\pi$ და $\mathrm{tg}\alpha=-1$, ამიტომ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, მაშინ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ და $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

სავ.№9. $\cos\alpha = \sin\alpha : \mathrm{tg}\alpha < 0$, ამიტომ $\cos\alpha = -\sqrt{1 - 0,16} = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

სავ.№10. $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{15}}{16}$.

სავ.№11. ა) $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin x \le 2 \Rightarrow -2-1 \le 2\sin x - 1 \le 2-1$ ე.ი. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-3;1]$; ბ) $[-1;0]$; გ) $[-1;2]$; დ) $[0;+\infty)$.

სავ.№12. ა) $1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

ბ) $\sin\alpha - \cos\alpha tg\alpha = \sin\alpha - \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha - \sin\alpha = 0$;

გ) $\sin^2\alpha$; დ) 1; ე) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha$;

ვ) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{1+\sin\alpha} = 1-\sin\alpha$; ზ) $1+\cos\alpha$;

თ) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \cos\alpha+\sin\alpha$.

სავ.№13. ა) 2π; ბ) π; გ) π; დ) π; ე) 2π; ვ) 12π; ზ) π. **სავ.№14.** $\left[\dfrac{3}{4};3\right]$.

სავ.№15. ა) $f(-0{,}5)+f(1{,}5) = f(-0{,}5)+f(1{,}5-2) = 2f(-0{,}5) = -2f(0{,}5) = -2(0{,}25-0{,}5) = 0{,}5$.

ბ) ჯერ ავაგოთ გრაფიკი $[0;1]$ შუალედში, შენდეგ კოორდინატტთა სათავის მიმართ სიმეტრიით გავავრცელოთ $[-1;0]$ შუალედში, ხოლო ბოლოს $(\pm 2;0)$ კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანებით მივიღებთ გრაფიკს $[-3;3]$ შუალედში.

შესაძლებელია თუ არა

შეუძლებელია შესრულდეს უტოლობა: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha>1$, რადგან

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \le 1.$$

აბა, სცადე!

$y=\sin x+\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

მართლაც, $(\sin x - \cos x)^2 = 1-2\sin x\cos x \ge 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x \le 1$. ამ უტოლობიდან მივიღებთ:

$y^2 = (\sin x+\cos x)^2 = 1+2\sin x\cos x \le 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le \sin x+\cos x \le \sqrt{2}$ და ამასთან,

$\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $\sin\dfrac{5\pi}{4}+\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$, რაც ამტკიცებს გამონათქვამს.

ტესტი №3

მიზანი: შემოწმდეს, შეუძლია თუ არა მოსწავლეს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებასა და გამოთვლაში გამოყენება.

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7
პასუხი	გ)	ბ)	გ)	ბ)	ა)	დ)	დადებითი

დავალების №	8	9	10
პასუხი	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	უდიდესია 11, უმცირესი 3.	თუ ერთეულოვან წრეწირზე IV მეოთხედში ავიღებთ ისეთ P_α წერტილს, რომლის აბსცისაა $\frac{2}{3}$, დავრწმუნდებით რომ შესაძლებელია.

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	**შეფასების დონეები**
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული ტრიგონომეტრიული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს სა-	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს ტრიგონომეტრიულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.

	ჭირო რესურსებს.			
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულობა და დასაბუთება	არ ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაცი ას,ვერ განსაზღვრავს გამოყენების არეალს, არ იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები და ვერ ხსნის მაგალითებს.	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ნაწილობრივ იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები, მაგრამ ხსნის მაგალითების მცირე ნაწილს დასაბუთების გარეშე.	ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მაგალითებს ხსნის არამკაცრი და ნაწილობრივი დასაბუთებით.	ღრმად ესმის ტრიგონომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაცრად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების (მნიშვნელობები, ნიშნები, ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა) არცოდნის გამო ვერ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი.	ახერხებს სხვა სტრუქტურებთან კავშირების დადგენას. აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი, საჭიროებს ცოდნის გაღრმავებას ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების შესახებ.	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ ახერხებს მიღებული შედეგების განზოგადებასა და ანალიზს.	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. შეუძლია მიღებული შედეგების განზოგადება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

3.5 დაყვანის ფორმულები

საათების სავარაუდო რაოდენობა – 4 საათი.

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- დაყვანის ფორმულების ჩამოყალიბება და ერთეულოვან წრეწირზე დემონსტრირება;
- დაყვანის ფორმულების ტრიგონომეტრიული გამოსახულების გამარტივებასა და გამოთვლაში გამოყენება მნიშვნელობათა გამოსათვლელად გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; ბ) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$; გ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$;

დ) $\cos(3\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; ე) $\mathrm{tg}(3{,}5\pi+\alpha)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$; ვ) $\mathrm{tg}(3\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$.

სავ.№2. ა) $\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$; ბ) $\sin(270°-\alpha)=-\cos\alpha$; გ) $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$;

დ) $\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$; ე) $\mathrm{tg}(360°-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$.

სავ.№3. ა) $\sin(\alpha+90^{o})=\cos\alpha$; ბ) $\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha$; გ) $\mathrm{tg}(\alpha-360°)=\mathrm{tg}\alpha$;

დ) $\sin^2(\alpha-\pi)=\sin^2\alpha$; ე) $\mathrm{tg}^2(\alpha-270°)=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}$.

სავ.№4. $-\mathrm{tg}\alpha$;

სავ.№5. ა) $\sin 0,2\pi$; ბ) $-\cos 0,1\pi$; გ) $\mathrm{tg}4,7\pi=\dfrac{1}{-\mathrm{tg}0,2\pi}$; დ) $-\mathrm{tg}0,2\pi$.

სავ.№6. ა) $\cos 35°$; $\sin 25^o$; $-\cos 22^o$; ბ) $\sin 35°$; $-\sin 16^o$; $-\sin 5^o$; გ) $-\mathrm{tg}31°$; $\mathrm{tg}41°$; $-\mathrm{tg}17°$.

სავ.№7. ა) $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; ბ) $\dfrac{5\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{4}$; გ) $\dfrac{3\pi}{2}$.

სავ.№8. ა) $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{11\pi}{6}$; ბ) $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{4}$; გ) π.

სავ.№9. ა) $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{4\pi}{3}$; ბ) 0; π; გ) $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{4}$.

სავ.№10. ა) $\cos\alpha$; ბ) $-\dfrac{1}{\cos\alpha}$; გ) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$; დ) 0; ე) $\cos\alpha$; ვ) $-\cos\alpha$; ზ) $\sin\alpha+\cos\alpha$; თ) $\sin^2\alpha$.

სავ.№11. ა) $-\sin\alpha\cos\alpha$; ბ) $\cos^2\alpha$; გ) $2\cos\alpha$; დ) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

სავ.№12. ა) -6; ბ) $2\sqrt{3}$; გ) $1+\sqrt{3}$; დ) $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; ე) $-\dfrac{6+\sqrt{6}}{6}$.

სავ.№13. ა) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) 1; გ) 0.

სავ.№14. ა) $$\frac{\cos(180°-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(90°-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(180°-\alpha)}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(90°+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\cdot(-\mathrm{tg}\alpha)}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{-\mathrm{tg}\alpha}}=-1;$$

ბ) $$\frac{2\sin 3290°-\sin 1490°}{2\mathrm{tg}585°}=\frac{2\sin(9\cdot 360°+50°)-\sin(4\cdot 360°+50°)}{2\mathrm{tg}(3\cdot 180°+45°)}=\frac{\sin 50°}{2}.$$

სავ.№15.

ა) $$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(3\pi+\alpha)=-\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)+\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)=0;$$

დ) $$\sin(\alpha-\pi)+\mathrm{tg}(\alpha-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha+\mathrm{tg}\alpha+\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha;$$

სავ.№16. ა) $$\sin(\beta-\pi)\,\mathrm{tg}(\beta+\pi)+\frac{1}{\cos(\beta-2\pi)}=-\sin\beta\frac{-\sin\beta}{-\cos\beta}+\frac{1}{\cos\beta}=\frac{1-\sin^2\beta}{\cos\beta}=\frac{\cos^2\beta}{\cos\beta}=\cos\beta.$$

სავ.№17. ა) $\cos^2\dfrac{77\pi}{4}=\cos^2\left(19+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$; ბ) $\sin^2\left(7\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}$; გ) $\dfrac{1}{3}$.

საკ.№18. მოცემულია: $\sin\left(180°+\alpha\right)=-\dfrac{1}{2}$, გამოთვალე:

ა) $\sin^2\left(270°+\alpha\right)=\sin^2\left(90^o+\left(180°+\alpha\right)\right)=\cos^2\left(180°+\alpha\right)=1-\sin^2\left(180°+\alpha\right)=\dfrac{3}{4}$;

ბ) $\cos^2\left(90°+\alpha\right)=\cos^2\left(\left(180°+\alpha\right)-90^o\right)=\sin^2\left(180°+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$.

საკ.№19. ა) $\sin^2\left(4\pi-\alpha\right)+\sin^2\left(4{,}5\pi+\alpha\right)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

ბ) $1+\cos\left(7\pi+\alpha\right)+\cos\left(2\alpha-4\pi\right)=1-\cos\alpha+\cos2\alpha$.

საკ.№20. ა) $\sin207°=\sin\left(180^o+27^o\right)=-\sin27°=-a$; ბ) $\cos304°=\cos\left(270°+34^o\right)=\sin34^o=a$;

გ) $\mathrm{tg}106°=\dfrac{\sin\left(90^o+16^o\right)}{\cos\left(90^o+16^o\right)}=\dfrac{\cos16^o}{-\sin16^o}=-\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 16^o}}{\sin16^o}=-\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$;

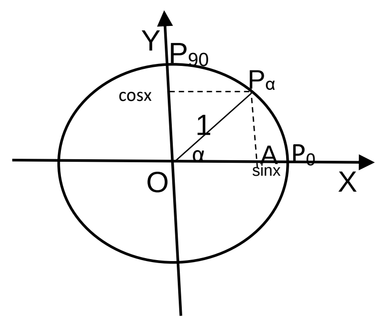
დ) $\cos\alpha=-\cos\left(180^o-\alpha\right)=-a$.

საკ.№21. $\cos10=-\cos\left(10-3\pi\right)$, $0<10-3\pi<\dfrac{\pi}{4}$; $\sin11=-\cos\left(11-\dfrac{7\pi}{2}\right)$, $0<11-\dfrac{7\pi}{2}<\dfrac{\pi}{4}$.

საკ.№22. ა) $\sin\left(45°+\alpha\right)=\sin\left(90^o-\left(45°-\alpha\right)\right)=\cos\left(45°-\alpha\right)$;

ბ) $\cos\left(45°+\alpha\right)=\cos\left(90^o-\left(45°-\alpha\right)\right)=\sin\left(45°-\alpha\right)$;

გ) $\sin\left(60°+\alpha\right)=\sin\left(90°-\left(30°-\alpha\right)\right)=\cos\left(30°-\alpha\right)$.



საკ.№23. სამკუთხედში ორი გვერდის ჯამი მეტია მესამე გვერდზე, ამიტომ $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geq1$.

საკ.№24. ა) $\mathrm{tg}20°+\mathrm{tg}40°+...+\mathrm{tg}160°+\mathrm{tg}180°=$

$\mathrm{tg}20°+\mathrm{tg}40°+\mathrm{tg}60°+\mathrm{tg}80°+\mathrm{tg}100°+\mathrm{tg}120°+\mathrm{tg}140°+\mathrm{tg}160°+\mathrm{tg}180°=$

$=\mathrm{tg}20°+\mathrm{tg}40°+\mathrm{tg}60°+\mathrm{tg}80°-\mathrm{tg}80°-\mathrm{tg}60°-\mathrm{tg}40°-\mathrm{tg}20°=0$;

გ) $\mathrm{tg}10°\cdot\mathrm{tg}20°\cdot\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{tg}40°\cdot\mathrm{tg}50°\cdot\mathrm{tg}60°\cdot\mathrm{tg}70°\cdot\mathrm{tg}80°=.$

$$=\mathrm{tg}10°\cdot\mathrm{tg}20°\cdot\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{tg}40°\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}40°\cdot\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{tg}20°\cdot\mathrm{tg}10°}=1.$$

საკ.№25. ა) $\sin25°<\sin27°$; ბ) $\sin100°>\sin110°$;

გ) $\cos15°>\cos25°$; დ) $\mathrm{tg}15°<\mathrm{tg}55°$.

საკ.№26. ა) III და IV; ბ) I და III; გ) I და IV; დ) II და III.

3.6 $y = \sin x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- $y = \sin x$ ფუნქციის თვისებების ჩამორყალიბება და დასაბუთება;
- $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკისა და თვისებების გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. $y_{max} = 2;\quad y_{min} = -2.$

სავ.№2. ა) ლუწი; ბ) კენტი; გ) კენტი; დ) არც ლუწი, არც კენტი.

სავ.№3. ა) $\frac{\pi}{6}$; ბ) $-\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{\pi}{2}$.

სავ.№ 5 ა) $\sin 1 < \sin 2$; ბ) $\sin\frac{\pi}{3} > \sin\frac{\pi}{5}$; გ) $\sin\frac{3\pi}{5} > \sin\frac{4\pi}{5}$; დ) $\sin\frac{5\pi}{6} > \sin\frac{6\pi}{5}$.

სავ.№10 $x_{max} = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\qquad x_{min} = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

სავ.№ 11 $0;\quad \pm\frac{\pi}{3};\quad \pm\frac{2\pi}{3};\quad \pm\pi.$

სავ.№12. $\sin\frac{3\pi}{2};\ \sin\frac{4\pi}{3};\ \sin\frac{\pi}{6};\ \sin\frac{\pi}{4};\ \sin\frac{\pi}{3};\ \sin\frac{\pi}{2}$.

სავ.№13. ა) 3 და 1; ბ) 1 და 0; გ) 1 და $\frac{1}{3}$; დ) 1 და $\frac{1}{2}$.

სავ.№14. $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$

სავ.№ 15. $y = 9\sin^2 x - 4$, ამიტომ უდიდესია 5, ხოლო უმცირესი -4.

სავ.№17. $-\frac{11\pi}{6};\quad -\frac{7\pi}{6};\quad \frac{\pi}{6};\quad \frac{5\pi}{6}.$

სავ.№18. ა) $\frac{2\pi}{3}$; ბ) 6π.

სავ.№19. $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = a$.

სავ.№20. ა) a; ბ) $-a$; გ) a; დ) $-a$; ე) $\sqrt{1-a^2}$.

3.7 $y = \cos x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- $y = \cos x$ ფუნქციის თვისებების დასაბუთება;
- $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკისა და თვისებების გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№7. ა) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; ბ) $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; გ) π; დ) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

სავ.№8. ა) $\cos 1 > \cos 2$; ბ) $\cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{3}$;

გ) $\cos\frac{3\pi}{5} > \cos\frac{4\pi}{5}$; დ) $\cos\frac{5\pi}{6} < \cos\frac{7\pi}{3}$.

სავ.№ 9. $\cos\frac{\pi}{6}; \cos\frac{\pi}{4}; \cos\frac{\pi}{3}; \cos\frac{\pi}{2}; \cos\frac{3\pi}{2}; \cos\frac{4\pi}{3}$.

სავ.№10. $x_{max} = \pi k, \quad k \in Z; \quad x_{min} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

სავ.№11. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

სავ.№12. ა) 3; -1; ბ) 2; 1; გ) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$; დ) 1; $\frac{1}{2}$.

სავ.№ 13. $\pm\frac{5\pi}{6}; \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{\pi}{6}$.

სავ.№14. ა) 5; -2. ბ) $x_{max} = \pi k, k \in Z; \ x_{min} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

სავ.№15. $\pm\frac{\pi}{3}; \quad \pm\frac{5\pi}{3}$.

სავ.№16. $0+2+4+6+8+10=30.$

სავ.№ 17. ა) 5; ბ) -5; გ) $-\frac{1}{5}$; დ) $\frac{1}{5}$.

სავ.№18. $\frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{2}$.

3.8 y=tgx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- $y = tgx$ ფუნქციის თვისებების დასაბუთება;
- $y = tgx$ ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- $y = tgx$ ფუნქციის გრაფიკისა და თვისებების გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№3. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$. სავ.№4. $-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi$. სავ.№5. $\left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

სავ.№6. ა) $y=f(x)=\mathrm{tg}^2x+3$ ფუნქცია ლუწია, მართლაც, განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი x არგუმენტისათვის $-x$ ეკუთვნის განსაზღვრის არეს, და:

$$f(-x)=\mathrm{tg}^2(-x)+3=(-\mathrm{tg}x)^2+3=\mathrm{tg}^2x+3=f(x).$$

ბ) კენტი; გ) ლუწი; დ) კენტი; ე) არც კარცენტი, არც ლუწი.

სავ.№7. $x=\pi k,\ k\in Z.$.

სავ.№9. ა) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2=1^2=1$; ბ) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=$

$=\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; გ) $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^{-1}\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=$

$$=\left(\frac{tg^2\alpha+1}{tg\alpha}\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{tg\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{tg\alpha}.$$

გაამარტივე გამოსახულება:

სავ.№10. ა) $x=30^\circ$; ბ) $x=-30^\circ$; გ) $x=0^\circ$; დ) $x=0^\circ$; ე) $x=60^\circ$; ვ) $x=-60^\circ$.

სავ.№11.

$$\mathrm{tg}x=0,75\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=3k\\ \cos x=4k\end{cases}\Rightarrow 9k^2+16k^2=1\Rightarrow k=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=\frac{3}{5}\\ \cos x=\frac{4}{5}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-\frac{3}{5}\\ \cos x=-\frac{4}{5}\end{cases}\end{array}\right.$$

ტესტი №4

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- დაყვანის ფორმულები;
- $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\mathrm{tg}x$ ფუნქციების თვისებები
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვ ლა;
- ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გარდაქმნა/გამარტივება.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7
პასუხი	ა)	ბ)	გ)	ა)	დ)	ბ)	უმცირესია -1, უდიდესი 3;

8
$\mathrm{tg}40^\circ\cdot\mathrm{tg}50^\circ+\sin20^\circ:\cos70^\circ=\mathrm{tg}40^\circ:\mathrm{tg}40^\circ+\sin20^\circ:\sin20^\circ=2$

9

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha;$$

10
$f(1)+f(11)=f(1-9)+f(11-3)=f(-8)+f(8)=22.$

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული ტრიგონომეტრიული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს ტრიგონომეტრიულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულო-	არ ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას ,ვერ განსაზღვრავს გამოყენების არეალს, არ იცის დაყვანის ფორმულები,	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ნაწილობრივ იცის დაყვანის ფორმულები და ტრიგონომეტრი-	ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მაგალითებს ხსნის არამკაცრი	ღრმად ესმის ტრიგონომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაცრად,

ბა და დასაბუთება	ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები და ვერ ამრტივებს გამოსახულებებს.	ული ფუნქციების თვისებები, მაგრამ ხსნის მაგალითების მცირე ნაწილს დასაბუთების გარეშე.	და ნაწილობრივი დასაბუთებით.	ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების (მნიშვნელობები, ნიშნები, ლუწკენტობა, პერიოდულობა) არცოდნის გამო ვერ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი.	ახერხებს სხვა სტრუქტურებთან კავშირების დადგენას. აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი, საჭიროებს ცოდნის გაღრმავებას ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების შესახებ.	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ ახერხებს მიღებული შედეგების განზოგადებასა და ანალიზს.	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. შეუძლია მიღებული შედეგების განზოგადება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

3.9 უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა.

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- sinx=a, cos x=a და tgx=a განტოლებათა ზოგადი ამონახსნის ფორმულების გამოყვანა.
- მითითებულ შუალედში ამონახსნის პოვნა.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{3}$; გ) $-\frac{\pi}{4}$; დ) $-\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{2}$; ვ) $-\frac{\pi}{2}$; ზ) 0.

სავ.№2. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{6}$; გ) $\frac{3\pi}{4}$; დ) $\frac{5\pi}{6}$; ე) 0; ვ) π; ზ) $\frac{\pi}{2}$.

სავ.№3. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $-\frac{\pi}{4}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) $-\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{6}$; ვ) $-\frac{\pi}{6}$; ზ) 0. **სავ.№4.** დ)

სავ.№5. ა) 1; ბ) 0,13; გ) 7 ; დ) 0,5.

სავ.№6. ა) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; ბ) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; გ) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$;

დ) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; ვ) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; ზ) $\pi k,\ k\in Z$.

სავ.№7. ა) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; გ) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; დ) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$;

ე) $2\pi k,\ k\in Z$; ვ) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; ზ) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

სავ.№8. ა) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; ბ) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; დ) $-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$;

ე) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; ვ) $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; ზ) $\pi k,\ k\in Z$.

სავ.№9. ა) $\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; ბ) $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$; გ) $-3\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$;

დ) $-15^\circ\pm15^\circ+180^\circ k,\ k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\cup Z$.

სავ.№10. $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$. სავ.№11. $\frac{7\pi}{4}$. სავ.№12. $-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}$.

სავ.№13. ა) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; დ) $\pi k,\ k\in Z$.

სავ.№14. ბ) $\pi k,\ k\in Z$. სავ.№15. ბ) $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

სავ.№16. ა) 0; ბ) $2\pi-4$; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\frac{2}{\sqrt{5}}$;

ე) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\Rightarrow\cos\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

სავ.№17. ა) $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}x-1=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in Z$;

ბ) $\cos^2x-\sin^2x=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2x-1=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}x=\pm1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in Z$;

გ) $\cos^4x-\sin^4x=1\Leftrightarrow\cos^2x-\sin^2x=1\Leftrightarrow1-\sin^2x=1+\sin^2x\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=\pi k,\ \ k\in Z$;

დ) $\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2x+\sqrt{3}\mathrm{tg}x=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}x=\left[\begin{array}{l}0\\-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\pi k\\-\frac{\pi}{3}+\pi k\end{array}\right.,\ \ k\in Z.$

სავ.№18. ა) a ; ბ) -a ; გ) a ; დ) $\sqrt{1-a^2}$; ე) $\sin55^\circ=\cos35^\circ=\sqrt{1-a^2}$;

სავ.№19. B წერტილიდან AC გვერდზე დავუშვათ BD მართობი. გვექნება:

$CD=\frac{a}{2},\ AD=BD=\frac{a\sqrt{3}}{2},AB=\frac{a\sqrt{6}}{2},AC=\frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$. პასუხი: $AB=\frac{a\sqrt{6}}{2},AC=\frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$.

ტესტი №5

მიზანი:

- უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა;

პასუხები

დავალება №	1	2	3	4	5	6
პასუხი	გ)	ა)	დ)	ბ)	გ)	ა)

7	8

$\cos x\left(\cos x-3\right)=0;\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$	$-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z.$;

9	10
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარებელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული ტრიგონომეტრიული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს ტრიგონომეტრიულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუ-	არ ესმის ტრიგონომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას,არ შეუძლია ტრიგონო-	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ნაწილობრივ ახერხებს ტრიგო-	ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას.	ღრმად ესმის ტრიგონომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატე-

მენტირე-ბულობა და დასაბუთე-ბა	მეტრიული განტო-ლების ამოხსნა.	ნომეტრიული გან-ტოლების ამოხ-სნას.	ხსნის უმარტივეს ტრიგონომეტრი-ული განტოლებას.	გიას და სწორად ხსნის ტრიგონო-მეტრიულ განტო-ლებას.
კავშირები-სა და მი-მართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობ-ლემის გა-დაჭრის უნარი	უმარტივესი ტრი-გონომეტრიული განტოლების ამოხსნის ფორმუ-ლებისა და გზების არცოდნის გამო ვერ ასრულებს დავალებას	ახერხებს: • კავშირებისა და მიმართებების დადგენას სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. • ხსნის ტრიგო-ნომეტრიულ გან-ტოლებას. საჭიროებს ცოდ-ნის გაღრმავებას ტრიგონომეტრი-ული განტოლების ამოხსნის შესახებ.	ადგენს კავშირებ-სა და მიმართებებს სხვა სტრუქტუ-რებთან და ობიექ-ტებთან. ხსნის ტრიგონომეტრი-ულ განტოლებას და ახერხებს მიღებული შედე-გების განზოგადე-ბასა და ანალიზს.	უპრობლემოდ ად-გენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. სწორად ხსნის ტრიგონომეტრიულ განტოლებებს, შე-უძლია მიღებული შედეგების განზო-გადება და ანალიზი პრობლემის გადაჭ-რისას.

3.10. კოსინუსების თეორემა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- კოსინუსების თეორემის ჩამოყალიბება და დამტკიცება;
- კოსინუსების თეორემის შედეგების (პარალელოგრამის თვისება, სამკუთხედის მედიანის და ბისექტრისის გამოსათვლელი ფორმულები) ჩამოყალიბება;
- კოსინუსების თეორემის გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად.

სცენარი

თემა: კოსინუსების თეორემა (მეორე გაკვეთილი)
მიზანი:

- მოცემული თემის შესახებ მიღებული ცოდნის, უნარ/ჩვევების გაუმჯობესება;
- პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკურ ენაზე წარმოდგენა;
- კოსინუსების თეორემის გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად;
- მოსწავლის დამოუკიდებლად მუშაობისა და თვითკონტროლის უნარის განვითარება.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული მომენტი, საშინაო დავალების შემოწმება

II. ცოდნის გააქტიურება. განვლილი მასალის გამეორება.

მასწავლებელი: – წინა გაკვეთილზრე გავეცანით კოსინუსების თეორემას. დღეს გავაგრძელებთ ამ თემაზე მუშაობას. სამკუთხედის რა ელემენტების პოვნა შეგვიძლია კოსინუსების თეორემით მოცემული.: ა) ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით? ბ) სამი გვერდით? როგორ დავადგენთ სამკუთხედის სახეს მოცემული სამი გვერდის მიხედვით?

აჩვენებს ჩანაწერს:

დავალება №1	**დავალება №2**
სწორია თუ არა ტოლობა?	მართია, მახვილია თუ ბლაგვია α კუთხე,როცა :

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\angle C$, $\cos\angle C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.	• $\cos\alpha > 0$? • $\cos\alpha = 0$? • $\cos\alpha < 0$?

დავალება №1: არა, დიახ, არა, დიახ. **დავალება №2:** α მახვილია; α მართია; α ბლაგვია.

დავალება №3 დაადგინე შესაბამისობა	
1) $S = ab\sin\alpha$	ა) კოსინუსების თეორემა
2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	ბ) სამკუთხედის ფართობი
3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	გ) პარალელოგრამის ფართობი
4) $S = \dfrac{ab}{2}$	დ) ჰერონის ფორმულა
5) $S = \dfrac{ab\sin\alpha}{2}$	ე) მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი

დავალება №3 დაადგინე შესაბამისობა	
1) $S = ab\sin\alpha$	ა) კოსინუსების თეორემა
2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	ბ) სამკუთხედის ფართობი
3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	გ) პარალელოგრამის ფართობი
4) $S = \dfrac{ab}{2}$	დ) ჰერონის ფორმულა
5) $S = \dfrac{bc\sin\alpha}{2}$	ე) მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი

III. ცოდნის პრაქტიკული გამოყენება

მასწავლებელი: –ამოვხსნათ ამოცანები სახელმძღვანელოდან.
ხსნიან №9 ა), №11 სავარჯიშოებს.

მე-9 ამოცანის ამოხსნამდე იხსენებენ დებულებებს, რომელიც საჭიროა ამოცანის ამოსახსნელად, ანუ დებულებებს, რომელთა გამოყენებითაც გვერდების მიხედვით ვადგენთ მართკუთხაა სამკუთხედი, ბლაგვკუთხა თუ მახვილკუთხა.
მასწავლებელი: – მე ჩამოვაყალიბებ იმ დებულებების ნაწილს, რომლის მიხედვითაც ხდება სამკუთხედის სახის განსაზღვრა. თქვენ ამ დებულების დასრულება, ანუ სამკუთხედის სახის დასახელება გევალებათ.

- სამკუთხედის დიდი გვერდის კვადრატი თუ დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი .... (მართკუთხაა).
- სამკუთხედის დიდი გვერდის კვადრატი თუ დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე ნაკლებია, მაშინ ეს სამკუთხედი .... (მახვილკუთხაა).
- სამკუთხედის დიდი გვერდის კვადრატი თუ დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე მეტია, მაშინ ეს სამკუთხედი .... (ბლაგვკუთხაა.

– ახლა წაიკითხეთ მე-9 ამოცანა და ამოხსენით სამივე შემთხვევა. 1-ელი რიგი ამოხსნის ა) სამეულით, მეორე რიგი ბ) სამეულით და მესამე რიგი გ) სამეულით. იმუშავეთ დამოუკიდებლად. ამოხსნის შემდეგ თითო რიგიდან თითო მოსწავლე დაასაბუთებს ამოხსნის შედეგს.

მე-11 ამოცანას ამოხსნამდე ამტკიცებენ კოსინუსების თეორემიდან გამომდინარე პარალელოგრამის თვისებას: „პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი ოთხივე გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია“. აძლევს ცოტა დროს ამ თვისებისა და მისი დამტკიცების გასააზრებლად (სახელმძღვანელოშია მოცემული) და შემდეგ სთხოვს რომელიმე მსურველს ამ თვისების დაფაზე დამტკიცებას. ამის შემდეგ მე-11 ამოცანას ერთი მოსწავლე ხსნის დაფაზე, დანარჩენები – რვეულებში. დაფასთან გასული მოსწავლე ამოცანას ხსნის მსჯელობით. ჩამოაყალიბებს პარალელოგრამის თვისებას.

IV.დამოუკიდებელი სამუშაო

I ვარიანტი: ფეხბურთის ბურთი თავდამსხმელთანაა, რომელიც კარის ბოძებიდან 23 მ და 24 მ-ითაა დაშორებული. კარის სიგანე 7 მ-ია. რა კუთხით ჩანს კარი თავდამსხმელისაგან?

II ვარიანტი: ანდრომ სახლიდან აღმოსავლეთის მიმართულებით 8 კმ გაიარა, 120°-ით შემობრუნდა და სხვა გზით 6 კმ გაიარა. სახლიდან რა მანძილზე აღმოჩნდა ანდრო?

პასუხი: (მასწავლებელი აჩვენებს ეკრანზე.)1-ელი ვარიანტი: $\arccos\frac{22}{23}$; მე-2 ვარიანტი: $2\sqrt{37}$ კმ.

მასწავლებელი: –შეამოწმეთ თქვენი ამოხსნები.

– რა შეცდომები იყო დაშვებული დამოუკიდებელი სამუშაოს შესრულებაში?

დამოუკიდებელი სამუშაოს შესრულების შემდეგ ხსნიან №12, №16 სავარჯიშოებს.

რეფლექსია, შედეგების შეჯამება

– მასწავლებელი: – რა იყო ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის მიზანი?

– მივაღწიეთ მიზანს?

– რა შედომები იყო დღეს დაშვებული?

– რაზე უნდა გავამახვილოთ ყურადღება, რათა ეს შეცდომები აღარ განმეორდეს?

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) 5; ბ) $\sqrt{37}$; გ) $\sqrt{13}$.

სავ.№2. ა) $\sqrt{169-60\sqrt{3}}$; ბ) 13; გ) $\sqrt{169+60\sqrt{3}}$.

სავ.№ 4. $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **სავ.№5.** $5\sqrt{10}$.

სავ.№6. ა) $4\sqrt{5}$; ბ) $4\sqrt{5}$ ან $8\sqrt{5}$;

სავ.№ 7. ა) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$; ბ) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.

სავ.№ 8. ა) 90°; ბ) 150°.

სავ.№9. ა) სამკუთხედის უდიდესი კუთხე ბლაგვია, რადგან მისი კოსინუსი უარყოფითია, ე.ი. სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა; ბ) სამკუთხედის უდიდესი კუთხე მართია, რადგან მისი კოსინუსია 0, ე.ი. სამკუთხედი მართკუთხაა; გ) სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

სავ.№10. 8 სმ.

სავ.№11. $2\sqrt{13}$ სმ.

სავ.№12. $2\sqrt{7}$ სმ; და $2\sqrt{19}$ სმ.

სავ.№13. 3სმ.; და $\sqrt{17}$ სმ.

სავ.№14. $\frac{\sqrt{241}}{2}$ სმ; 7 სმ; და $\frac{\sqrt{145}}{2}$ სმ.

სავ.№15. $3\sqrt{2}$ სმ;

სავ.№16. $\frac{\sqrt{190}}{2}$ სმ.

სავ.№17. $\sqrt{52}$ სმ, $\sqrt{304}$ სმ და $\sqrt{388}$ სმ ან 14 სმ, $\sqrt{148}$ სმ და $\sqrt{112}$ სმ.

სავ.№19 . ჯერ A კუთხის კოსინუსი გამოვთვალოთ მთლიანი სამკუთხედიდან, ხოლო შემდეგ BD გამოვთვალოთ ABD სამკუთხედიდან. პასუხი: $\sqrt{17\frac{5}{7}}$.

სავ.№ 20. $5\frac{\sqrt{7}}{3}$ მ.

სავ.№21. $2\sqrt{3}$ სმ.

სავ.№22. $\cos\angle B = \left[\begin{array}{l}\frac{16}{65},\\ \frac{56}{65}.\end{array}\right.$

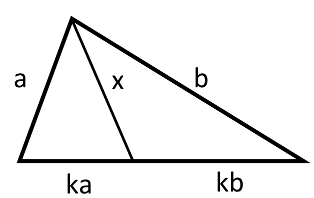
სავ.№23. ჩახაზული წრის ცენტრი შევაერთოთ სამკუთხედის წვეროებთან. სამკუთხედების ფართობი წარმოადგენს მიღებული სამკუთხედების ფართობთა ჯამს:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 14\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 15\cdot r.$$

ამასთან, 14 სმ სიგრძის გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სტანდარტული გზით (პითაგორას თეორემის გამოყენებით) გამოთვლით მივიღებთ: h =12 სმ-ს, ამიტომ S=84 სმ^2.
პასუხი: r=4 სმ.

სავ.№24. ამოცანის პირობის და სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით გვაქვს:

$$\begin{cases}(x+2)^2 > x^2 + (x+1)^2\\ x+2 < x + x + 1\end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3.$$



აბა, სცადე! ბისექტრისის თვისებისა და კოსინუსების თეორემით გამოყენებით (იხ.ნახ.) გვაქვს:

$$x^2 = a^2 + (ka)^2 - 2ka^2\cdot\frac{a^2 + (ka+kb)^2 - b^2}{2a(ak+bk)} = ab - k^2ab.$$ რ.დ.გ.

საშინაო დავალება: №10, №13, №15 სავარჯიშოები.

3.11 სინუსების თეორემა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- სინუსების თეორემის ჩამოყალიბება და დამტკიცება;
- სინუსებისა და კოსინუსების თეორემების სამკუთხედების ამოსახსნელად გამოყენება.

შენიშვნა. პარაგრაფის ბოლოს მოცემული წყვილებში სამუშაო უმჯობესია შესრულდეს პარაგრაფის მასალის ახსნამდე, რათა მოსწავლეები თავად მივიდნენ სინუსების თეორემის ჩამოყალიბებამდე.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) 10 სმ; ბ) $8\sqrt{2}$ დმ; გ) $4\sqrt{3}$ მ.

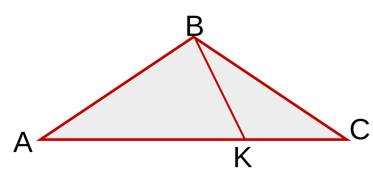
სავ.№2. ა) 6 სმ; ბ) $6\sqrt{2}$ სმ; გ) $6\sqrt{3}$ სმ; დ) 12 სმ; ე) $6\sqrt{3}$ სმ.

სავ.№3. ა) 1; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{5}{12}$. **სავ.№5.** 60° ან 120°.

სავ.№6. 10 სმ. **სავ.№7.** ა) 9; ბ) 3; გ) ამოვხსნათ სიმაღლის დაშვებით. პასუხი: $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

სავ.№8. $\frac{7}{\sqrt{3}}$ სმ. **სავ.№9.** $\frac{16\sin 40^\circ}{\sqrt{3}}$ სმ; $\frac{16\cos 10^\circ}{\sqrt{3}}$ სმ. **სავ.№11.** 4; 90°; 30°.

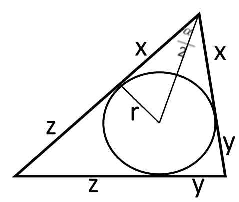
სავ.№12. $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ სმ.



სავ.№13. $2R_1 = \frac{AB}{\sin\angle AKB} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \angle AKB)} = 2R_2$. ე.ი. $R_1 = R_2$.

სავ.№14. $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **სავ.№15.** $\frac{65}{8}$ სმ.

სავ.№16. $\frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.



სავ.№17. ნახაზის მიხედვით გვაქვს:

$$x = \frac{r}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}},\ y + z = 2R\sin\alpha \Rightarrow P = \frac{2r}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} + 4R\sin\alpha.$$

სავ.№18. განხილულია პირველი თავის მატრიცაში.

სავ.№19. 68 სმ ^{2}. **სავ.№ 20.** 136 სმ ^{2}. **სავ.№ 21.** 27.

სავ.№ 22. 24 სმ ^{2}. **სავ.№ 23.** 52 სმ ^{2} **სავ.№24.** 8 სმ ^{2}.

3.12 ფართობის გამოთვლა ტრიგონომეტრიის გამოყენებით

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- სამკუთხედის ორი გვერდითა და მათ შორის კუთხით, სამი გვერდით, პერიმეტრითა და ჩახაზული წრის რადიუსით, სამი გვერდითა და შემოხაზული წრის რადიუსით ფართობის ფორმულების გამოყვანა;
- ამოცანების ამოხსნა ფართობის ფორმულების გამოყენებით.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) 3 სმ²; ბ) $10\sqrt{2}$ სმ²; გ) $15\sqrt{3}$ სმ²; დ) 49 სმ²; ე) 22 სმ²; ვ) $40\sin15^0$ სმ².

სავ.№ 2. 1; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{1}{8}$. **სავ.№3.** ა) 6 სმ²; ბ) $4\sqrt{6}$ სმ²; გ) 336 სმ²; დ) $\sqrt{10}$ სმ²;

სავ.№4. ა) $R=8{,}5,\ r=3,\ h=\frac{120}{17}$; ბ) $R=\frac{25}{8},\ r=\frac{3}{2},\ h=4$; გ) $R=\frac{77}{4\sqrt{10}},\ r=\frac{4\sqrt{10}}{3},\ h=2\sqrt{10}$.

სავ.№6. ა) 50 სმ²; ბ) $50\sqrt{3}$ სმ²; გ) $50\sqrt{3}$ სმ²; დ) $100\sin40^\circ$ სმ².

სავ.№7. ა) 28 სმ²; ბ) $28\sqrt{2}$ სმ²; გ) 56 სმ²; დ) $56\cos40^\circ$ სმ².

სავ.№8. ა) $\sqrt{17}$ სმ; ბ) $\sqrt{65}$ სმ.

სავ.№9. რამდენჯერაც შემცირდება თითოეული გვერდი, იმდენჯერ შემცირდება ფართობი, ამიტომ: $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot18=6$ (სმ²). **სავ.№10.** (60-10-27-8) სმ²=15 სმ².

სავ.№11. ვწერთ განტოლებას: $\frac{h}{\sqrt{3}}+h=10 \Rightarrow h=\frac{10\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=5\left(3-\sqrt{3}\right)$. აქედან, $S=\ 25\left(3-\sqrt{3}\right)$ სმ².

სავ.№12. მიიღება სინუსების თეორემით.

სავ.№13. მედიანის გაგრძელებით მიიღება მოცემულის ტოლდიდი სამკუთხედი, რომლის გვერდებია a, b და 2m. პასუხი: $0{,}25\sqrt{(a+b+2m)(a+b-2m)(a-b+2m)(b-a+2m)}$.

სავ.№14. 36 სმ². შასურვლია მოსწავლეებს დავუმტკიცოთ ფორმულა $S=\frac{2}{3}m_1\cdot m_2$, რომელიც მე-16 სავარჯიშოში მოცემული ფორმულის კერძო შემთხვევაა, როცა $\alpha=90^\circ$.

სავ.№15-16. გამომდინარეობს ორი გვერდითა და კუთხის სინუსით სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულიდან.

სავ.№17. ა) 120°; ბ) 9.

სავ.№18. ა) 2a; ბ) $a\sqrt{3}$; გ) a; დ) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; ე) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **სავ.№19.** $\frac{180^\circ(n-2)}{n}=170^\circ \Rightarrow n=36$.

ტესტი №6

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- $\sin x=a,\ \cos x=a,\ \mathrm{tg}x=a$ განტოლებათა ამოხსნა;
- კოსინუსების თეორემა და მისი გამოყენება;
- სინუსების თეორემა და მისი გამოყენება
- ფართობის გამოთვლა ტრიგონომეტრიის გამოყენებით.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
პასუხი	გ)	ბ)	გ)	ა)	დ)	ა)	1	$\frac{35\sqrt{6}}{24}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$4\sqrt{3}$.

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული ტრიგონომეტრიული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს ტრიგონომეტრიული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს ტრიგონომეტრიულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულობა და დასაბუთება	არ ესმის ტრიგონომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას,არ შეუძლია ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა, არ იცის სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები და ვერ ხსნის დავალებებს.	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ნაწილობრივ ახერხებს ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნას, მაგრამ შედეგი არაა ზუსტი. შეუძლია სინუსებისა და კოსინუსების თეორემების ფორმულირება	ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას. ხსნის ტრიგონომეტრიული განტოლებას, იცის სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები, ახერხებს მათ სწორად გამოყენებას. შეუძლია ფართობის გამოთვლა ტრიგონომეტრიუ-	ღრმად ესმის ტრიგონომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაცრად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.

		მაგრამ ვერ ახერხებს მათ სწორად გამოყენებას.	ლი ცოდნის გამოყენებით.	
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების (მნიშვნელობები, ნიშნები, ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა) არცოდნის გამო ვერ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი.	საჭიროებს ცოდნის გაღრმავებას ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების შესახებ.	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ ახერხებს მიღებული შედეგების განზოგადებასა და ანალიზს.	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. შეუძლია მიღებული შედეგების განზოგადება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

თავი 4. სტერეომეტრიის საწყისები

თავის მიზანია მოსწავლემ შეძლოს:

- სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებების დახასიათება;
- სტერეომეტრიის ძირითად ცნებებს შორის მიმართებების (აქსიომების) ჩამოყალიბება და დებულებათა დასამტკიცებლად გამოყენება;
- სივრცეში მდებარე ორი წრფის ურთიერთგანლაგების შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონსტრირება;
- ორ წრფეს შორის კუთხისა და მანძილის განსაზღვრა და დემონსტრირება;
- წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონსტრირება;
- წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის განსაზღვრა და დემონსტრირება;
- წრფისა და სიბრტყის პარალელობისა და მართობულობის ნიშნების ჩამოყალიბება, დასაბუთება და დემონსტრირება;
- სამი პერპენდიკულარის თეორემის ჩამოყალიბება, დასაბუთება და გამოყენება;
- ორი სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონსტრირება;
- ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის განმარტება და აგება;
- ორ სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვა;
- ობიექტებს შორის მანძილის გაზომვა სივრცეში;
- სტერეომეტრიული ცნებებისა და დებულებების პრაქტიკული ამოცანების გადასაჭრელად გამოყენება.

მატრიცა

თემა- სტერეომეტრია

საკითხი - სტერეომეტრიის საწყისები

სამიზნე ცნება - გეომეტრიული ობიექტები **(შედეგი მათ.საშ. 4, საშ. 5)**

ქვეცნება - სტერეომეტრიის საწყისი ცნებები

ქვესაკითხი: სივრცეში მდებარე ორი წრფის, წრფისა და სიბრტყის, ორი სიბრტყის ურთიერთგანლაგება.

საკვანძო შეკითხვა - როგორ გამოიყენებ გეომეტრიული მოდელებს შენობის დასაპროეტებლად?

სამიზნე ცნებასთან/ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები <u>მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:</u>	**შეფასების კრიტერიუმი** <u>მოსწავლეს შეუძლია:</u>	<u>ნაშრომში/ნაშრომში პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:</u>
სტერეომეტრიის საწყისი ცნებებია 1. წერტილი წრფე და სიბ-რტყე. საწყისი ცნებები არ განიმარ-ტება, მოცემულია მხოლოდ მათ შორის მიმართებები ანუ აქსიომები (გამონათქვამები, რომლებიც ჭეშმარიტადაა მიჩნეული). ამ აქსიომებზე დაყრდნობით მტკიცდება თეორემები, რომლებიც ცნე-ბათა თვისებებს აღწერს. მა-გალითად, აქსიომაა: „ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერ-ტილზე გაივლება ერთადერ-თი სიბრტყე“, საიდანაც გა-მომდინარეობს თეორემა:	• სტერეომეტრიის ძირითად ცნებებს შორის მი-მართებების (აქსიომების) ჩამოყალიბება და დებულე-ბათა დასამტკიცებლად გამოყენება • სივრცეში მდებარე ორი წრფის ურთიერთგანლაგე-ბის შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონ-სტრირება • ორ წრფეს შორის კუთხისა და მანძილის განსაზღვრა და დემონსტრირება • წრფისა და სიბრტყის ურ-თიერთმდებარეობის შემთხვევათა განხილვა, და-	• რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში; • რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს; • როგორ შეარჩიე პროექტი; • რა მასალა გამოიყენე პროექტისთვის; • როგორ იზრუნე შენობის მდგრადობისთვის;

„ ორ გადამკვეთ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე“. 2. სტერეომეტრიის საწყისები ადგენს ძირითად ცნებების: წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შემთხვევებს. პლანიმეტრიისაგან განსხვავებით სივრცეში ორი წრფე შეიძლება არც გადამკვეთი იყოს და არც პარალელური (აცდენილი წრფეები); ძირითადი შესასწავლი საკითხებია წრფისა და სიბრტყის და ორი სიბრტყის ურთიერთგანლაგების შემთხვევების განხილვა და დახასიათება. 3. განიმარტება და შეისწავლება: კუთხეები დახრილსა და სიბრტყეს და ორ გადამკვეთ სიბრტყეს შორის; 4. მანძილი სივრცულ ობიექტებს შორის ამ ობიექტების უახლოეს წერტილებს შორის მანძილს ეწოდება.	ხასიათება და დემონსტრირება • წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის განსაზღვრა და დემონსტრირება • წრფისა და სიბრტყის პარალელობისა და მართობულობის ნიშნების ჩამოყალიბება, დასაბუთება და დემონსტრირება • სამი პერპენდიკულარის თეორემის ჩამოყალიბება, დასაბუთება და გამოყენება • ორი სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონსტრირება • ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის განმარტება და აგება • ორ სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვა • ობიექტებს შორის მანძილის გაზომვა	• რა ორწახნა კუთხეთა ზომები მიუთითე ნახაზზე; • როგორ დაადგინე ხარჯთაღრიცხვა; • რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად, ნახაზების შესადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად.

კომპლექსური დავალება

„სტერეომეტრია საყოფაცხოვრებო არქიტექტურაში“

ჩვენი სამყარო სამგანზომილებიანია. ყველა ის ობიექტი, რომლებიც ჩვენ გარშემოა, სამგანზომილებიანი ანუ სივრცითი ფიგურაა. მათ შორის სივრცითი ფიგურებია შენობა-ნაგებობები, რომელთა პროექტირება-მშენებლობა სივრცეში დაგეგმარებასა და ოპერირებას გულისხმობს. ეს კი გეომეტრიის, კერძოდ, მისი მნიშვნელოვანი ნაწილის - სტერეომეტრიის საფუძვლიან ცოდნას მოითხოვს, რადგან სწორედ სტერეომეტრია შეისწავლის სივრცით ფიგურებს შორის მიმართებებსა და მათს ზომებს.

მცხეთის ჯვარი

იმას, რომ ჩვენი წინაპრები კარგად ფლობდნენ სივრცეში ობიექტთა ჰარმონიულად განლაგებისა და მყარი კონსტრუქციების აგების ხელოვნებას, ნათლად ადასტურებს მათ მიერ შექმნილი არქიტექტურული შედევრები, რომლებიც ასე მრავლადაა შემორჩენილი ჩვენს ქვეყანასა თუ მის ფარგლებს გარეთ.

დიდებული ტაძრებისა და სასახლეების გარდა, სამეურნეო საჭიროებიდან გამომდინარე, უხსოვარი დროიდან აშენებდნენ და დღესაც აშენებენ მარტივი კონსტრუქციის სხვადასხვა დანიშნულების შენობებს: ბოსლებს ცხოველებისთვის, საქათმეებს ფრინველებისთვის და სხვ.

ერთ-ერთი ასეთი მარტივი კონსტრუქციის, ფართოდ გავრცელებული ნაგებობაა ქოხი, რომელსაც ბაღ-ვენახებში, ავდრის ან შესვენების დროს თავშესაფრად და შრომის იარაღების შესანახად იყენებდნენ და დღესაც იყენებენ.

დავუშვათ, ერთ-ერთმა მუნიციპალიტეტმა გამოაცხადა კონკურსი ბაღ-ვენახის ქოხის პოექტზე. პროექტის მოთხოვნებია:

ა) პროექტი წარმოდგენილი უნდა იყოს მაკეტის სახით;

ბ) პროექტს უნდა დაერთოს შენობის როგორც გრძივი, ისე კუთხური ზომები (მათ შორის ორწახნაგა კუთხეების, მიწის ზედაპირთან დახრის კუთხეებისა და სხვ.);

გ) ცალკე ინტერიერის ნახაზი, ავეჯის (მაგიდა, სკამი, საწოლი ან სავარაძელი და სხვა) განლაგებით მათი ზომებისა და მათ შორის მანძილების მითითებით.

დ) ზომები: ქოხის ფართობი - 15მ^2-იდან 18მ^2-მდე, სიმაღლე - არაუმეტეს 2,5 მ;

ე) თანდართული საჭირო მასალის სახეობა, რაოდენობა, ფასები;

ვ) მთლიანი ხარჯთაღრიცხვა.

შენიშვნა: უპირატესობა მიენიჭება მსუბუქი კონტრუქციის, მაგრამ მდგრად და იაფ პროექტებს.

შენი დავალება

1. მიიღე მონაწილეობა გამოცხადებულ კონკურსში და გაითვალისწინე ყველა მისი მოთხოვნა;
2. პროექტი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ შეარჩიე პროექტი;
- რა მასალა გამოიყენე პროექტისთვის; მაკეტისთვის;
- როგორ იზრუნე შენობის მდგრადობისთვის;
- როგორ დაადგინე ორწახნაგა კუთხეთა ზომები;
- როგორ შეარჩიე საჭირო სამშენებლო მასალა და როგორ დაადგინე მისი რაოდენობა;
- როგორ დაადგინე ხარჯთაღრიცხვა;
- რა საშუალებები გამოიყენე მაკეტის შესაქმნელად, საჭირო ზომების დასადგენად, ნახაზების შესადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად.

კომპლექსური დავალების განხორციელების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები, შეკითხვები)

ეტაპი I – კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა

რესურსები/განსახილველი ქეისები:

- **რესურსი 1**. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს მე-4 თავი;
- **რესურსი 2.** კალკულატორი;
- **რესურსი 3.** ხანის აკადემია;
- **რესურსი 4.** ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიები.

<u>კომპლექსური დავალების პირობის გააზრებაზე ორიენტირებული შეკითხვები:</u>

- როგორ გესმის „პროექტის სამგანზომილებიანი ნახაზი“?
- რის მიხედვით შეარჩევ პროექტს?

- პროექტის შერჩევისას გამოიყენებ თუ არა „Google“-ის საძიებო სისტემას?
- წარმოიშვება თუ არა შენს პროექტში:

ა) აცდენილი წრფეები?

ბ) მართობები, დახრილები და გეგმილები?

გ) ორწახნაგა კუთხეები?

- როგორ გაზომავ კუთხეებს აცდენილ წრფეებს, წრფესა და სიბრტყეს ან/და ორ სიბრტყეს შორის?
- როგორ უზრუნველყოფ საყრდენი ძელების ზედაპირისადმი მართობულობას?
- ინტერიერის აღწერის დროს როგორ დაადგენ მანძილებს საგნებს შორის?
- როგორ დაადგენ მასალის რაოდენობას?
- როგორ დააადგენ მასალის ფასებს?
- როგორ აწარმოებ ხარჯთაღრიცხვას?

ქვესაკითხი - **კომპლექსური დავალება**

- შენი სიტყვებით ჩამოაყალიბე, რას შეეხება დღეს მოცემული დავალება, რომელზეც რამდენიმე გაკვეთილის განმავლობაში უნდა იმუშაო.
- მსგავსი ფორმის, ან შინაარსის დავალება სხვა დროს თუ შეგისრულებია?

ეტაპი II – კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა

ქვეცნებები -

- პარალელური, გადამკვეთი და აცდენილი წრფეები (პარ.4.1, 4.2);
- სიბრტყისადმი დახრილი და სიბრტყის პარალელური წრფეები (პარ.4.3, 4.6);
- გადამკვეთი და პარალელური სიბრტყეები (პარ.4.4, 4.7);

ქვესაკითხები -

- აცდენილ წრფეთა შორის კუთხე და მანძილი;
- სიბრტყის პარალელური წრფიდან სიბრტყემდე მანძილი;
- დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე;
- ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი;
- ორ გადამკვეთ სიბრტყეს შორის კუთხე;
- მანძილი ორ ობიექტს შორის.

ნაბიჯი 1. 1-ელი დავალების შესრულება;

მოსწავლეთა ნაწილი ინტერნეტში მოიძიებს შესაბამის პროექტს, ნაწილი შეეცდება თვითონ მოიფიქროს და შეადგინოს ორიგინალური პროექტი. ყველა შემთხვევაში მნიშვნელოვანია არა პროექტის არქიტექტურული დონე, არამედ სტერეომეტრიის იმ საკითხების ცოდნა და პროექტის ნახაზებსა თუ მაკეტზე დემონსტრირება, რომელიც ზემოთ იყო ჩამოთვლილი. ამ ცოდნის შესაფასებლად საჭიროა შესაბამისი კითხვების შერჩევა.

დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- რის მიხედვით შეარჩიე პროექტი, გამოიყენე თუ არა არსებული მზა პროექტი ან მზა ობიექტი?
- როგორ შეადგინე პროექტის ნახაზები?
- რომელი ძელებია შენს პროექტში პარალელური, გადამკვეთი, აცდენილი? (აჩვენე ნახაზზე)
- როგორ გაზომავ კუთხეს და მანძილს აცდენილ წრფეებს შორის?
- რომლებია შენს პროექტში ზედაპირისადმი მართობული ძელები?
- როგორ დაადგენ ძელის ზედაპირისადმი მართობულობას?
- რომლებია შენს პროექტში ზედაპირისადმი დახრილი ძელები? რომლებია მათი გეგმილები?
- როგორ გაზომავ კუთხეს დახრილ ძელსა და ზედაპირს შორის?
- რომელი სიბრტყეებია შენს ნახაზზე ურთიერთმართობული?
- როგორ დაადგენ ორი სიბრტყის მართობულობას?
- არის თუ არა შენს ნახაზზე ორწახნაგა კუთხეები? რომლებია?
- არის თუ არა შენს ნახაზებზე ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე?
- როგორ გაზომავ ორწახნაგა კუთხეს?
- რა მანძილია შენს ნახაზზე პარალელურ კედლებს შორის?
- რა მანძილებია შენს პროექტში ინტერიერის საგნებს შორის?
- როგორ უნდა გავზომოთ მანძილი ორ საგანს შორის?
- როგორ დაადგინე მასალის რაოდენობა?
- როგორ დააადგინე მასალის ფასები?
- როგორ აწარმოე ხარჯთაღრიცხვა?

ნაბიჯი 2. ნაშრომის საპრეზენტაციოდ მომზადება

პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ შეარჩიე პროექტი;
- რა მასალა გამოიყენე პროექტისთვის;
- როგორ იზრუნე შენობის მდგრადობისთვის;
- რა ორწახნა კუთხეთა ზომები მიუთითე ნახაზზე;
- როგორ დაადგინე ხარჯთაღრიცხვა;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად, ნახაზების შესადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად.

4.1 სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებების ჩამოთვლა და დახასიათება;
- სტერეომეტრიის აქსიომების ჩამოყალიბება და მათგან გამომდინარე მარტივი შედეგების დასაბუთება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№4. AB წრფეზე.

სავ.№5. ა)N; ბ) Q; გ) P და Q.

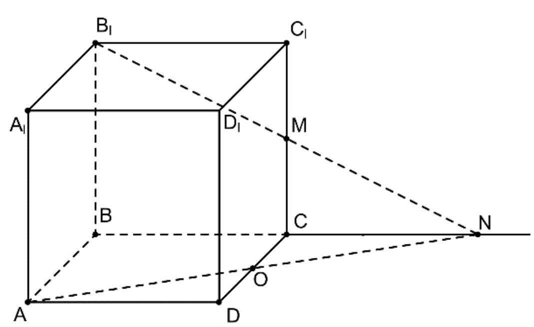
სავ.№6. ყველა ვ)-ს და თ-ს გარდა.

სავ.№7. არა-ე), კი-დანარჩენ შემთხვევაში.

სავ.№9. ვ) ASB და BSC.

სავ.№10. ჭეშმარიტია ბ) და გ). დ) არაა ჭეშმარიტი, რადგან მართკუთხა სამკუთხედში შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ჰიპოტენუზაზეა.

სავ.№11. როიალის თავსახური უძრავად ჩერდება, რადგან წრფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე ერთადერთი სიბრტყე გაივლება.



სავ.№12. $(B_1M)\cap(BC)=N$. $\Delta B_1C_1M=\Delta NCM \Rightarrow CN=a$. ΔABN-დან $AN=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$ სმ.

სავ.№13. $\Delta NCM \sim \Delta B_1C_1M \Rightarrow \dfrac{CN}{a} = \dfrac{3}{2}$; $CN=\frac{3}{2}a$; $BN=\frac{5}{2}a$; ΔABN მართკუთხაა.

$$AN = \sqrt{a^2 + \frac{25}{4}a^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}a.$$

სავ.№14. არ ძევს, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში M, K და P ერთ წრფეზე აღმოჩნდებოდნენ.

სავ.№15. ორ გადამკვეთ წრფეზე ერთადერთი სიბრტყე გაივლება, მესამე წრფე გაივლის ამ სიბრტყეში მდებარე ორ წერტილზე და ამიტომ ეს წრფე ამავე სიბრტყეში აღმოჩნდება.

შესაძლებელია თუ არა? შესაძლებელია, რადგან ორი წვერო და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი შეიძლება ერთ წრფეზე (დიაგონალზე) მდებარეობდეს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დიაგონალზე გავატაროთ პარალელოგრამის სიბრტყისაგან განსხვავებული სიბრტყე.

4.2 წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა.

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთიმდებარეობის შემთხვევების ანალიზი.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ბ); **სავ.№2**. გ); **სავ.№3**. დ); **სავ.№4**. ბ);

სავ.№6. მართებულია -ა); არ არის მართებული- გ),ბ); **სავ.№7**. ერთი ან არცერთი;

სავ.№8. ჭეშმარიტია-ა) რადგან თუ წრფესთან გადაიკვეთა მაშინ სიბრტყესაც გადაკვეთს. ბ) მცდარია, რადგან შეიძლება აცდენილიც იყოს. (სასურველია ვაჩვენოთ ნიმუში)

სავ.№9. ა)90^0, ბ)0^0 , გ)0^0, დ)90^0, ე)45^0. **სავ.№10**.ა)45^0, ბ)$\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ.

სავ.№11. თანაკვეთებია ა)DC_1, ბ)A_1C_1, გ)A_1D; დ)A_1C_1D; კვეთაში მიიღება A_1C_1D; ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა $a\sqrt{2}$ სმ; $P=3a\sqrt{2}$სმ. $S=\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ სმ².

სავ.№12. ნებისმიერ შემთხვევაში ფუტკრები აღმოჩნდებიან ერთ სიბრტყეში. ამიტომ, ალბათობა 1-ის ტოლია.

სავ.№13. დავუშვათ არაა აცდენილი. მაშინ ამ წრფეებზე გაივლება სიბრტყე, ანუ A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში იქნება, რაც ეწინააღმდეგება AB და CD წრფეების აცდენილობას.

სავ.№14. მოცემული წერტილების შეერთებით მიღებული მონაკვეთები სამკუთხა პირამიდის წიბოებია. თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის ერთ წიბოსთან ქმნის აცდენილ წრფეთა წყვილს. პასუხი: 3.

შესაძლებელია თუ არა? შეუძლებელია, რადგან თუ ორი წრფიდან თითოეული მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.

აბა, სცადე! სიბრტყის გარეთ აღებულ წერტილზე და წრეწირის ორ წერტილზე გაივლება ერთი სიბრტყე. ვთქვათ წრეწირზე მონიშნულ წერტილთა რაოდენობა არის n. მათგან ორი წერტილის შერჩევის $C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$ ვარიანტია. შესაბამისად ამდენივეა სიბრტყეთა რაოდენობა. გვექნება განტოლება $\frac{n(n-1)}{2}= 45$, საიდანაც n=10.

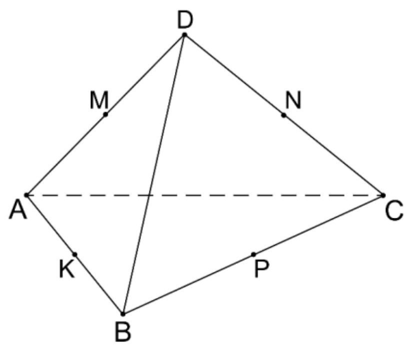
4.3 წრფისა და სიბრტყის პარალელობა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს წრფისა და სიბრტყის პარალელობის დადგენა და დემონსტრირება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№3. არ შეიძლება, რადგან ეს წრფე იქნება AB წრფის და ამიტომ α სიბრტყის პარალელურიც. **სავ.№4**. ბ) 8 სმ. **სავ.№5**. გ). **სავ.№6**. ბ) 5 სმ.

სავ.№8. იმისათვის, რომ წრფე იყოს სიბრტყის პარალელური აუცილებელია და საკმარისი წრფე იყოს სიბრტყეში მდებარე წრფის პარალელური;

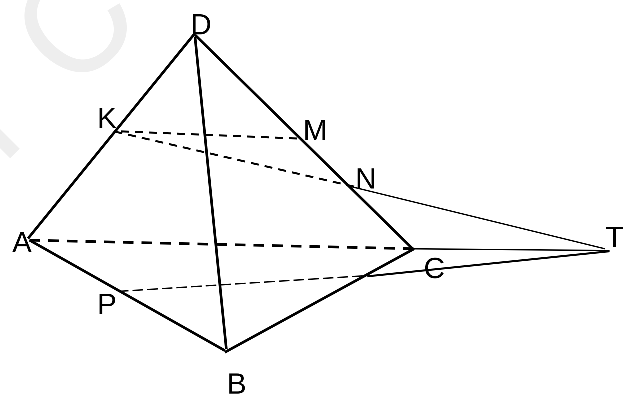


სავ.№9. MN და KP შუახაზებია. MN||AC $MN=\frac{AC}{2}$, KP||AC; $KP=\frac{AC}{2}$, ე.ი. MNPK პარალელოგრამია. ანალოგიურად KM და NP-სთვის. პერიმეტრი=20სმ.

სავ.№10. ა) გადაკვეთს; ბ) (KN)∩(AC)=T.

გ) შევაერთოთ K წერტილი და DC-ს M შუა წერტილი. მივიღებთ $KM=\frac{a}{2}$ სმ, $CM=\frac{a}{2}$ სმ, $NC=NM=\frac{a}{4}$ სმ; $\Delta KMN=\Delta TCM$, ამიტომ $CT=KM=\frac{a}{2}$ სმ. ე.ი. AT=1,5a სმ; დ) AB-ს შუა წერტილი აღვნიშნოთ P-თი. კოსინუსის თეორემით APT სამკუთხედიდან ვღებულობთ:

$$PT=\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{7}}{2} \text{ სმ.}$$



ტესტი №7

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები;
- სტერეომეტრიის აქსიომები და მათი შედეგები;
- წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევები სივრცეში;
- წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7	8
პასუხი	გ)	გ)	დ)	დ)	ბ)	ა)	$2a+2\sqrt{2}a$	$\left(a\sqrt{3}+\dfrac{a}{2}\right)$ სმ

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული პირველი 6 საკითხი ფასდება 1 ქულით, ხოლო მე-7 და მე-8 ფასდება 2-2 ქულით.
მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული სტერეომეტრიული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს სტერეომეტრიული ტერმინებისა და ცნებების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს სტერეომეტრიული ტერმინებისა და ცნებების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს სტერეომეტრიულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირე-	არ ესმის სტერეომეტრიული ცნებებისა და აქსიომების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას, ვერ იაზრებს სივრცეში წერტილისა და	შეუძლია სტერეომეტრიული ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს წერტილისა და სიბრტყის, წრფისა და სიბრტყის	ესმის ტსტერეომეტრიული ცნებებისა და აქსიომების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას.	ღრმად ესმის სტერეომეტრიული ცნებებისა და აქსიომების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად

ბულობა და დასაბუთება	სიბრტყის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობას და ვერ ხსნის დავალებებს.	ურთიერთმდებარეობა სივრცეში, მაგრამ ვერ ასაბუთებს.	ახერხებს მათ სწორად გამოყენებას. შეუძლია ლოგიკური და არგუმენტირებული დასაბუთება	იყენებს. მსჯელობს მკაცრად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	ვერ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს სივრცული წარმოდგენების, ანალიზისა და სინთეზის უნარი.	ნაწილობრივ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. უჭირს მიღებული შედეგის ანალიზი და სინთეზი.	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ ახერხებს მიღებული შედეგების განზოგადებასა და ანალიზს.	უპრობლემოდ ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. შეუძლია მიღებული შედეგების განზოგადება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

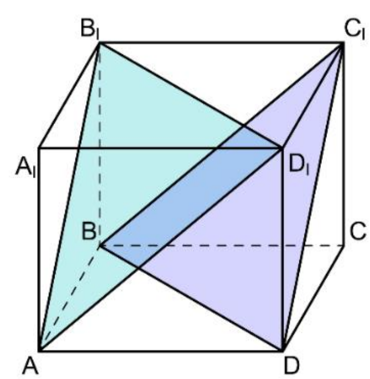
4.4 სიბრტყეების პარალელობა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს სიბრტყეთა პარალელურობის დადგენა და დემონსტრირება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. დ); **სავ.№ 2** . ა); **სავ.№ 3**. გ);

სავ.№4. ჭეშმარიტია; **სავ.№5**. გ);



სავ.№8. (AB_1D_1) || BD (რადგან B_1D_1 || BD)

(AB_1D_1) || DC_1 (რადგან AB_1 || DC_1)

ე.ი.(AB_1D_1)||(C_1BD).

ΔAB_1D_1 და ΔC_1BD ტოლი ტოლგვერდა სამკუთხედებია. $AB_1=6\sqrt{2}$.

$S_1=S_2=\frac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{36\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}$სმ².

სავ.№9. A, B, B_1, A_1 წერტილები გადამკვეთ წრფეებზე მდებარეობენ, ამიტომ ისინი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული. ამ სიბრტყით გადაკვეთით α და β სიბრტყეში მიღებული AB და A_1B_1 წრფეები პარალელურია, საიდანაც ვასკვნით, რომ ABO და B_1OA_1 მსგავსი სამკუთხედებია. $\frac{OB}{4}=\frac{3}{5}\Rightarrow OB=2,4$ სმ; $\frac{A_1B_1}{4}=\frac{5}{3}\Rightarrow A_1B_1=\frac{20}{3}$ სმ.

სავ.№10. გამომდინარეობს სიბრტყეთა პარალელურობის ნიშნიდან.

სავ.№11. მოცემული პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ABB_1A_1, ACC_1A_1 და BCC_1B_1 ოთხკუთხედები პარალელოგრამებია. ამიტომ, სამკუთხედები ტოლია ტოლობის მესამე ნიშნის ძალით.

სავ.№12. მტკიცდება სამკუთხედის შუა ხაზის თვისებისა და სიბრტყეთა პარალელობის ნიშნის გამოყენებით.

სავ.№13. (ADB) გადაკვეთილია (ABC) სიბრტყითა და მისი პარალელური სიბრტყით, ამიტომ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია. კვეთაში მიიღება ΔABC-ს მსგავსი სამკუთხედი. მსგავსების კოეფიციენტი იქნება $\frac{2}{5}$. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $BC = 25\cdot\frac{3}{5} = 15$ სმ. $AC = 20$ სმ.

$P_{ABC}=60$ სმ. $\frac{P}{60}=\frac{2}{5}\Rightarrow P=24$ სმ. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$ სმ^2; $\frac{S}{150}=\left(\frac{2}{5}\right)^2\Rightarrow S=24$ სმ^2.

სავ.№14. გავავლოთ $MN\|B_1D_1$ და $MM_1\|BB_1$; MN-ზე და MM_1-ზე გავავლოთ სიბრტყე. ეს სიბრტყე იქნება (BB_1D_1) სიბრტყის პარალელური. $(NMM_1)\cap AD\equiv N_1$. საძებნი კვეთა იქნება M_1MNN_1 ოთხკუთხედი. $MM_1=NN_1=6$ სმ. $B_1D_1=13$ სმ. $\frac{MN}{13}=\frac{5}{13}$; $MN=5$ სმ. $MM_1=AA_1=6$ სმ. $P=22$ სმ.

სავ.№15. კვეთაში მიღებული სამკუთხედები ABC სამკუთხედის მსგავსია. ამიტომ: $\frac{p_1}{20}=\frac{1}{6}$; $P_1=\frac{10}{3}$; $\frac{p_2}{20}=\frac{1}{2}$; $P_2=10$; $\frac{s_1}{s_2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$; პასუხი: $\frac{10}{3}$ სმ; 10 სმ; $\frac{1}{9}$;

აბა, სცადე! 6 ღერით სივრცეში აიგება სამკუთხა პირამიდა (ტეტრაედრი).

4.5 პარალელური დაგეგმილება სიბრტყეზე და მისი თვისებები

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს სიბრტყეზე სივრცითი სხეულების გამოსახვა.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. გ). **სავ.№2**. დ). **სავ.№3**. დ). **სავ.№4**. ა).

სავ.№ 6. ვთქვათ, პარალელური დაგეგმილებით ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის გამოსახულებაა $A_1B_1C_1D_1$ ტრაპეცია (რომელიც შეიძლება არ იყოს ტოლფერდა). უნდა მოვნახოთ სად მოვა B_1 წვეროდან დაშვებული სიმაღლე: შევაერთოთ B_1C_1 და A_1D_1 ფუძეების შუაწერტილები და გავავლოთ მისი პარალელური B_1K_1 მონაკვეთი, $K_1\in A_1D_1$. B_1K_1 იქნება სიმაღლის გამოსახულება, რადგან ის არის B-დან დაშვებული სიმაღლის გეგმილი.

სავ.№7. ABCDEF წესიერ ექვსკუთხედში $AD\|BC$ და $AD=2BC$. ავიღოთ ერთ წრფეზე არამდებარე ნებისმიერი A_1, B_1 და C_1 წერტილები. გავავლოთ $A_1D_1\| B_1C_1$ ისე, რომ $A_1D_1=2\,B_1C_1$. A_1D_1-ის შუაწერტილის მიმართ ავაგოთ B_1-ის სიმეტრიული E_1 და C_1-ის სიმეტრიული F_1; $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ იქნება წესიერი ექვსკუთხედის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული ექვსკუთხედი.

სავ.№8. მოსწავლეებს გავახსენოთ, რომ კათეტი ჰიპოტენუზის და ჰიპოტენუზაზე კათეტის გეგმილის საშუალო გეომეტრიული, ხოლო სიმაღლე კათეტების გეგმილების საშუალო გეომეტრიულია. პასუხი: ა) 7,2სმ და 12,8სმ; ბ)9,6სმ.

სავ.№9. განსახილველია ორი შემთხვევა, როცა K ეკუთვნის AB გვერდს და როცა K არ ეკუთვნის AB გვერდს. ორივე შემთხვევაში ვიყენებთ მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსებას. პასუხი: ა) $13+5\sqrt{13}$ სმ ან $5+5\sqrt{13}$ სმ ბ) 39სმ^2 ან 15სმ^2.

აბა, სცადე! მოცემული გვაქვს ΔABC . $\angle C=90^0$; $CB=6$სმ, $CA=3$სმ. ვთქვათ, CM მედიანაა, CL-ბისექტრისა, CH-სიმაღლე. მაშინ, $AM=MB$, $BL=2AL$ (ბისექტრისის თვისებით), ხოლო $BH=4AH$ (როგორც კათეტების გეგმილები). ვთქვათ $\Delta A_1B_1C_1$ არის ΔABC-ს პარალელური დაგეგმილებით მიღებული სამკუთხედი, M_1, L_1 და H_1 კი, შესაბამისად M-ის, L-ის და H-ის გამოსახულებები. იმის გამო, რომ AB მონკვეთის გეგმილზე პროპორციები შენარჩუნდება, გვექნება: $B_1M_1=A_1M_1$, $B_1L_1=2\,A_1L_1$; $B_1H_1=4A_1H_1$. შესაბამისი ნახაზი უნდა აიგოს ამ ტოლობების გათვალისწინებით.

ტესტი №8

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:
- სიბრტყეთა პარალელურობა;
- სივრცითი სხეულების გამოსახვა სიბრტყეზე.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7	8
პასუხი	დ)	ა)	გ)	გ)	ბ)	ბ)	20 სმ	$21+7\sqrt{10}$

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული პირველი 6 საკითხი ფასდება 1 ქულით, ხოლო მე-7 და მე-8 ფასდება 2-2 ქულით.
მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ქვიზის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანი-	აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ

		ზებასა და წარმოდგენას.		ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული სტერეომეტრიული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს სტერეომეტრიული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს სტერეომეტრიული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს სტერეომეტრიულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულობა და დასაბუთება	არ ესმის სტერეომეტრიის ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას,ვერ განსაზღვრავს გამოყენების არეალს, ვერ ხსნის ამოცანებს.	შეუძლია მარტივი სტერეომეტრიული ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ნაწილობრივ იცის სტერეომეტრიის ცნებები და დებულებები ხსნის დავალების მცირე ნაწილს დასაბუთების გარეშე.	ესმის სტერეომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. ამოცანებს ხსნის არამკაცრი და ნაწილობრივი დასაბუთებით.	ღრმად ესმის სტერეომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაცრად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	ვერ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი. არ იცის სიბრტყეთა პარალელურობის ნიშნები და თვისებები, არ შეუძლია სივრცითი სხეულების გამოსახვა სიბრტყეზე.	ახერხებს სხვა სტრუქტურებთან კავშირების დადგენას. აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი; ხარვეზებით ახერხებს სივრცითი სხეულების გამოსახვას სიბრტყეზე. • სიბრტყეთა პარალელურობა; • სივრცითი სხეულებისგამოსახვა სიბრტყეზე	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ახერხებს სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას.	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. უშეცდომოდ შეუძლია პრობლემის გადაჭრა.

4.6 წრფისა და სიბრტყის მართობულობა, სიბრტყისადმი მართობი და დახრილი, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. სამი მართობის თეორემა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- წრფისა და სიბრტყის მართობულობის განმარტება და დემონსტრირება;
- დახრილის გეგმილის განმარტება და დემონსტრირება;
- დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხის განმარტება და დემონსტრირება;
- სამი მართობის თეორემის გამოყენებით მართი კუთხეების მოძიება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№2. 4. **სავ.№3**. ბ). **სავ.№4**. ტოლია.

სავ.№5. შეიძლება იყოს ტოლიც და არატოლიც.

სავ.№6 .$\frac{\sqrt{2}}{2}$. **სავ.№7**. 6; 6. **სავ.№8**. 6; $4\sqrt{5}$.

სავ.№9. 12სმ. **სავ.№10**. $\frac{5}{13}$. **სავ.№11**. 7სმ,1სმ.

სავ.№12. არ შეიძლება. **სავ.№13**. ორივე.

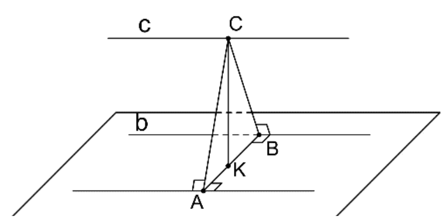
სავ.№14. ა)მართკუთხედი; $\sqrt{2}a^2$; ბ)$\sqrt{3}$a, გ)$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

სავ.№16. 8სმ; 10სმ; 10სმ; $2\sqrt{34}$სმ. **17**. ა) $4\sqrt{11}$, $4\sqrt{10}$.

სავ.№18. ტოლ დახრილებს ტოლი გეგმილები აქვთ. ამიტომ წერტილის გეგმილიდან წვეროებამდე მანძილები ტოლია . ასეთი წერტილი კი შემოხაზული წრეწირის ცენტრია.

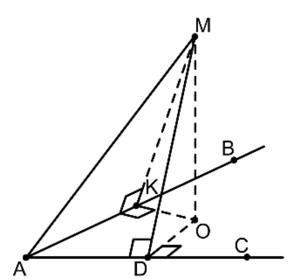
სავ.№19. ტოლ დახრილებს ტოლი გეგმილები აქვთ. დახრილი თუ წრფის მართობულია, მაშინ გეგმილიც მართობულია ამ წრფის. ამ ორი თვისების თანახმად წერტილის გეგმილი ტოლად არის დაშორებული მრავალკუთხედის გვერდებიდან. ასეთი წერტილი კი ჩახაზული წრეწირის ცენტრია.

სავ.№20. ფუძეებს შორის მანძილია $20\sin\frac{\alpha}{2}$. A წერტილი სიბრტყიდან ყველაზე დიდი მანძილით დაშორებული მაშინ იქნება, როცა დახრილებზე გავლებული სიბრტყე მართობული იქნება მოცემული სიბრტყის. ამ შემთხვევაში მანძილი იქნება $10\cos\frac{\alpha}{2}$.



სავ.№21. გავავლოთ a-ს, b-ს და c-ს პერპენდიკულარილი სიბრტყე და კვეთის წერტილები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, A, B და C ასოებით. ABC სამკუთხედში, პირობის თანახმად: AC=10სმ, CB=12სმ, AB=16სმ.

$$S=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot CK=\sqrt{19\cdot 9\cdot 7\cdot 3},\ CK=\frac{\sqrt{399}}{8}.$$



სავ.№22. $\Delta AMK=\Delta AMD \Rightarrow MK=MD \Rightarrow OK=OD$; $MK\perp AK \Rightarrow OK\perp AK$; $MD\perp AD \Rightarrow OD\perp AD$. ე.ი. O თანაბრადაა დაშორებული კუთხის გვერდებიდან.

აბა, სცადე! რადგან სიბრტყის გარეთ აღებული წერტილიდან წვეროებამდე მანძილები ტოლია, ამიტომ ეს წერტილი გეგმილდება ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში.

ოთხკუთხედზე წრეწირი იმ შემთხვევაში შემოიხაზება, თუ მისი მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180° -ია.

4.7 ორწახნაგა კუთხე, კუთხე სიბრტყეებს შორის

თემა: ორწახნაგა კუთხე
გაკვეთილის ტიპი: ახალი მასალის ახსნა
მიზანი:

- ორწახნაგა კუთხის ცნების შემოტანა;
- ამოცანების ამოხსნა ორწახნაგა კუთხის ცნების გამოყენებით;
- ორწახნაგა კუთხის გაზომვა;
- სიბრტყეებს შორის კუთხის პოვნა.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. **ორგანიზაციული მომენტი** (მისალმება, დასწრების შემოწმება)

II. **საშინაო დავალების შემოწმება**

მასწავლებელი – გაქვთ რაიმე შეკითხვა საშინაო დავალების ირგვლივ? რა შეკითხვები გაქვთ?

მასწავლებელი შესამოწმებლად იღებს 2-3 რვეულს. შეკითხვები თუ აქვთ, რომელ დავალებაზეც შეკითხვებია, იმ დავალების მსგავსს ხსნიან დაფაზე.

III. **წინარე ცოდნის გააქტიურება**

ფრონტალური გამოკითხვა

– რას ეწოდება კუთხე სიბრტყეზე?

– რას ეწოდება კუთხე წრფეებს შორის სივრცეში?

– რას ეწოდება კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის?

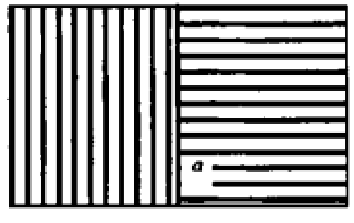
IV. **გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა**

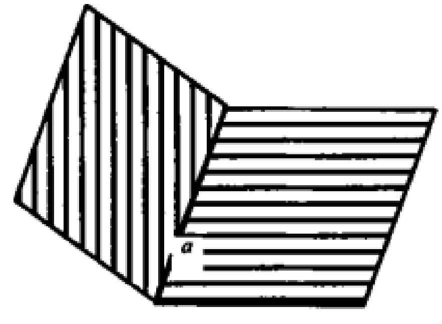
მასწავლებელი –დღეს უნდა შევისწავლოთ „ორწახნაგა კუთხე“.

V. ახალი მასალის ახსნა

1) ორწახნაგა კუთხის ცნების შემოტანა

მასწავლებელი – შეხედეთ ნახაზებს.



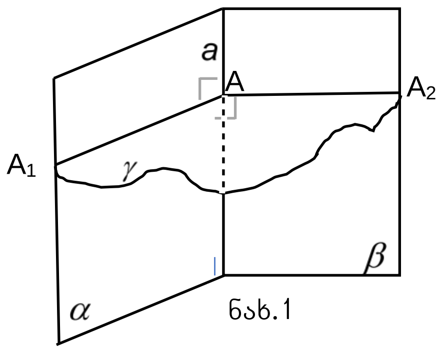


სიბრტყეზე ავიღოთ რაიმე a წრფე. ეს წრფე სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს, რომელთაგან თითოეულს ნახევარსიბრტყე ეწოდება. საერთო წრფის მქონე ორი ნახევარსიბრტყე სივრცეს ორ ნაწილად ყოფს. თითოეულს, ამ ნახევარსიბრტყეებთან ერთად, ორწახნაგა კუთხე ეწოდება. ნახევარსიბრტყეებს ორწახნაგა კუთხის წახნაგები ეწოდება, ხოლო საერთო წრფეს – ორწახნაგა კუთხის წიბო.

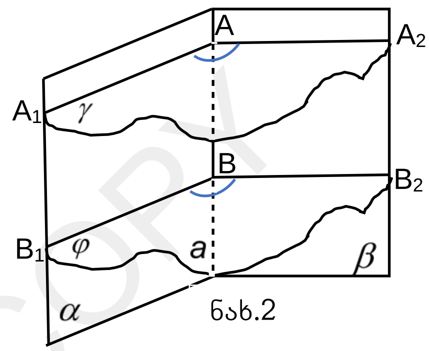
ნახევარსიბრტყეს ორწახნაგა კუთხის წახნაგი ეწოდება, ხოლო საერთო წრფეს – ორწახნაგა კუთხის წიბო.

– შეგიძლიათ დაამისახელოთ ორწახნაგა კუთხის მაგალითები? (ოთახის კედელი იატაკთან ერთად,ოთახის ორი მეზობელი კედელი, გადაშლილი წიგნი, სახლის ორფერდიანი სახურავი და სხვ.)

როგორ გამოვსახოთ ორწახნაგა კუთხე?



ნახ.1



ნახ.2

მასწავლებელი: – ვთქვათ, გვაქვს α და β სიბრტყეებისაგან შედგენილი ორწახნაგა კუთხე, რომლის წიბოა a წრფე.

– ავიღოთ a წრფეზე A წერტილი და გავავლოთ მასზე a წრფის მიმართ მართობული γ სიბრტყე. ეს სიბრტყე ორწახნაგა კუთხის წახნაგებიდან მოკვეთს AA_1 სხივს α სიბრტყეში და AA_2 სხივს β სიბრტყეში. რა მივიღეთ კვეთის შედეგად? (A_1AA_2 ბრტყელ კუთხე)

– A_1AA_2 ბრტყელ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე ეწოდება.

ანალოგიური გზით შეგვიძლია მივიღოთ სხვა ხაზოვანი კუთხე. (დაფაზე ხაზოვან კუთხეს აგებს მოსწავლე.) თუ a წრფეზე ავიღებთ B წერტილს და გავავლებთ მასზე a წრფის მიმართ მართობული φ სიბრტყეს (ნახ.2), ეს სიბრტყე ორწახნაგა კუთხის წახნაგებიდან მოკვეთს BB_1 სხივს α სიბრტყეში და BB_2 სხივს β სიბრტყეში. კვეთის შედეგად მივიღებთ B_1BB_2 ხაზოვან კუთხეს. (იმავე ორწახნაგა კუთხის სხვადასხვა ხაზოვან კუთხეებს აგებენ სხვა მოსწავლეებაი (2 ან 3).

დავამტკიცოთ, რომ ორწახნაგა კუთხის ყველა ხაზოვანი კუთხე ტოლია.

დამტკიცება. (დასამტკიცებლად მოსწავლეებს აძლევს ცოტა დროს. გამოდის მსურველი და საჭიროების შემთხვევაში დანარცენი მოსწავლეები და მასწავლებელი ერთვებიან კომენტარებით.) ვინაიდან AA_1 და BB_1 სხივები (ნახ.2) ---- α ---სიბრტყეს ეკუთვნის და ორივე --- a წრფის მართობულია, ვასკვნით, რომ ეს სხივები თანამიმართულია. ანალოგიური მსჯელობით ვასკვნით, რომ AA_2 და BB_2 სხივებიც თანამიმართულია. მივიღეთ, რომ A_1AA_2 და B_1BB_2 კუთხეებს თანამიმართული გვერდები აქვს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს კუთხეები ტოლია.

– როგორ ფიქრობთ, არის თუ არა ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის სიდიდე დამოკიდებული წიბოს წერტილის არჩევაზე? (ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის სიდიდე არ არის დამოკიდებული წიბოს წერტილის არჩევაზე.)

– ახლა გავარკვიოთ, თუ როგორი გრადუსული ზომები აქვს ორწახნაგა კუთხეს.

ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომა ეწოდება მისი ხაზოვანი კუთხის გრადუსულ ზომას. ისევე, როგორც პლანიმეტრიაში, გვექნება ორწახნაგა კუთხის სახეები, რაც მის ხაზოვან კუთხეზეა დამოკიდებული.

------- დაფაზე ხაზავენ გაშლილ, მართ, მახვილ და ბლაგვ ორწახნაგა კუთხეებს.

– როგორ აღვნიშნოთ ორწახნაგა კუთხე? ვის შეუძლია ჩაწეროს მათემატიკურად „კუთხე α და β სიბრტყეებს შორის“?

- $\left(\angle\left(\alpha;\beta\right)\right)$.
- თუ სიბრტყეებს სამი ასოთი აღვნიშნავთ, მაგალითად, ABC და ABD სიბრტყეებს შორის კუთხე შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ – $\angle\left(\left(ABC\right):\left(ABD\right)\right)$.
- ორწახნაგა კუთხე AB წიბოთი, რომლის სხვადასხვა წახნაგზე მონიშნულია C და D წერტილები, ორწახნაგა კუთხე იქნება $CABD$.

VI. განმტკიცება

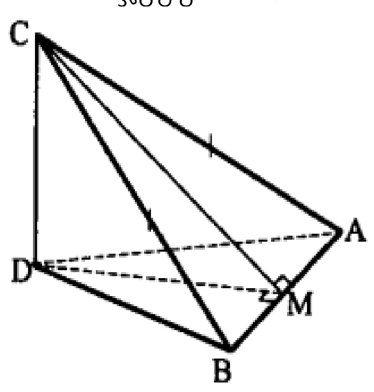
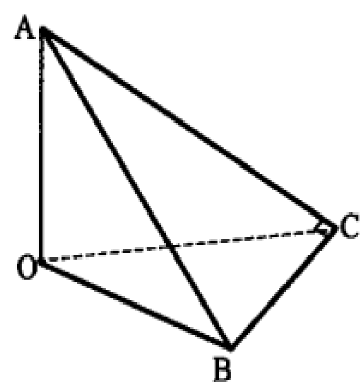
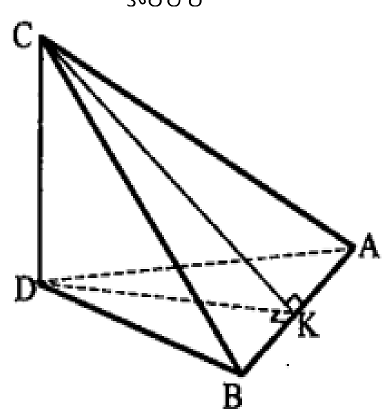
1) ამოცანის პირობის მიხედვით ნახაზების აგება

ჯგუფური მუშაობა

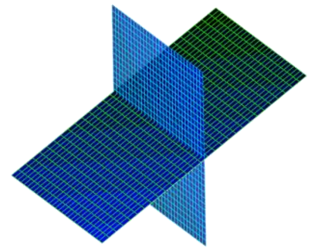
მასწავლებელი: – ახლა ჯგუფურ მუშაობას შემოგთავაზებთ. ჟგუფებად რიგების მიხედვით დაიყავით. სამი რიგია? ე.ი. სამ ჯგუფად დაიყოფით. თითოეულ ჯგუს ევალება ამოცანასთან დაკავშირებული ნახაზის შედგენა.

ჯგუფი №1	ჯგუფი №2	ჯგუფი №3
მოც.: საერთო AB ფუძის მქონე ABC და ABD ტოლფერდა სამკუთხედები. ააგეთ სამკუთხედების სიბრტყეებით შედგენილი რომელიმე ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე.	მოც.: საერთო BC გვერდის მქონე ABC და OBC სამკუთხედები, $\angle C=90^\circ$, $OA\perp(OBC)$. ააგეთ ამ სამკუთხედების სიბრტყეებით შედგენილი რომელიმე ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე .	მოც.: საერთო AB ჰიპოტენუზის მქონე ABC და ABD ტოლფერდა სამკუთხედები. ააგეთ სამკუთხედების სიბრტყეებით შედგენილი რომელიმე ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე .

მოსწავლეებმა უნდა მიიღონ ნახაზები:

ჯგუფი №1	ჯგუფი №2	ჯგუფი №3
		

მასწავლებელი აჩვენებს ორი გადამკვეთი სიბრტყის ნახაზს და მოსწავლეებს სთხოვს იპოვონ მოსაზღვრე და ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები.



VII. ამოცანების ამოხსნა

ხსნიან კონტექსტის №1 ამოცანას და №1, №3, №5 სავარჯიშოებს.

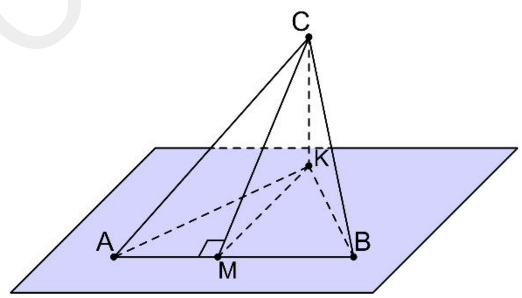
VIII. რეფლექსია

– რა იყო ჩვენი გაკვეთილის თემა?
– რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხე?
– რა ერთეულებში იზომება ორწახნაგა კუთხე?
– რას უდრის ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომა?
– რა ვიცით ერთი ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხეების შესახებ?

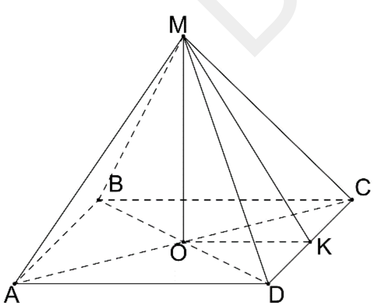
IX. საშინაო დავალება – №2, №4, №6 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. 45°. **სავ.№2**. 130°. **სავ.№3**. 10სმ.
სავ.№4.45^0; **სავ.№5**. 8 სმ; **სავ.№6**. $2\sqrt{21}$ სმ;
სავ.№7. 60^0; **სავ.№9**. ბ) 3; **სავ.№.10**. 45^0;
სავ.11. 70^0; **სავ.№12.** $16\sqrt{2}$სმ^2; **სავ.№13**.12სმ^2;



სავ.№14. გამოვთვალოთ ΔABC-ს სიმაღლე CM.
$S = \frac{1}{2}AB \cdot CM = 7 \cdot CM$. ჰერონის ფორმულით,
$S=\sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8}=84$. CM=12სმ. CMK
სამკუთხედიდან $CK=6\sqrt{2}$ სმ.

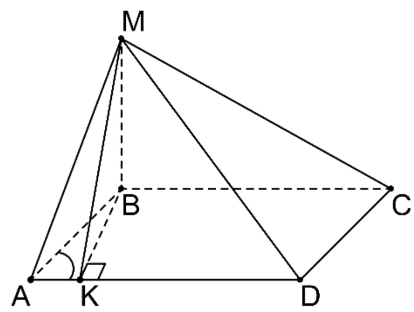


სავ.№15.

$$\frac{tg(\angle MKO)}{tg(\angle MAO)}=\frac{MO}{OK}:\frac{MO}{AO}=\frac{AO}{OK}=\sqrt{2}.$$

სავ.№16. ა) გავავლოთ $BK\perp AD \Rightarrow MK\perp AD$; $AB=4$სმ; $BK=2\sqrt{3}$სმ; $\angle MKB=45^0 \Rightarrow BM=BK=2\sqrt{3}$სმ;

ბ) B-დან CD გვერდისადმი გავლებული BN სიმაღლე = $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$;



$MN=\sqrt{BM^2+BN^2}= \sqrt{12+27}=\sqrt{39}$;

$S_{MCD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{39}\cdot 4 = 2\sqrt{39}$;

გ)$\cos(\angle((MDC);(ABC)))=\frac{BN}{MN}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{39}}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

ტესტი № 9

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- სამი მართობის თეორემა;
- ორწახნაგა კუთხე;
- კუთხე სიბრტყეებს შორის.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7	8
პასუხი	ა)	ბ)	გ)	დ)	ბ)	დ) და ე)	$a\sqrt{3}$, a	27 სმ^2

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა
თითოეული სწორად შესრულებული პირველი 6 საკითხი ფასდება 1 ქულით, ხოლო მე-7 და მე-8დავალებები – 2-2 ქულით.
მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

4.8 სიბრტყეთა მართობულობა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს სიბრტყეთა მართობულობის დადგენა და გამოყენება.
კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. 4. **სავ.№2**. 1. **სავ.№3**. 90°; **სავ.№ 4**. ბ).

სავ.№5. 1) ა), გ), ზ), თ), ი) კ).

სავ.№7.2ა) $(2a+2\sqrt{2}a)$სმ; $\sqrt{2}\ a^2$სმ^2; ბ)$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})a$ სმ, $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$სმ^2;

სავ.№8. ა) 90°; ბ) 60°.

სავ.№9. ა) AC= $a\sqrt{2}$ სმ. AO=AC:2= $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ, სადაც O არის AC დიაგონალის შუა წერტილი.

$(AO)\perp(BB_1D_1)$, რადგან $AO\perp BD$ და $AO\perp AA_1$, ხოლო $AA_1 \parallel BB_1$. ე.ი. საძიებელი მანძილია

$AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ.

ბ) $\angle AB_1O$ იქნება საძიებელი კუთხე. ΔAB_1O მართკუთხაა. $AO=\frac{1}{2}AB_1$; ე.ი. $\angle AB_1O=30°$.

სავ.№10. ა) (ANM)) ⊥(ABC) და NA ⊥AB; ე.ი. NA ⊥(ABC). ბ) NC=$\sqrt{10^2+5^2}$=$5\sqrt{5}$სმ;

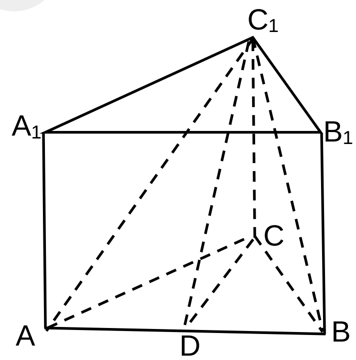
სავ.№11. 1. CM და DM მედიანებია. ამიტომ DM⊥AB და CM⊥AB;

2. ∠DMC ხაზოვანია. (ABC) ⊥(ABD). ∠DMC=90^0.

DC=$\sqrt{12^2+5^2}$=13სმ.

სავ.№12. შეავსე $ABCDMNC_1D_1$ კუბამდე. ეს კუთხე იგივეა, რაც კუთხე (AC) და (D_1C)-ს შორის. ΔAD_1C ტოლგვერდაა. პასუხი: 60^0.

სავ.№13. $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი პრიზმაა, რადგან AB=BC=AC და
$(AA_1\perp AB)\wedge(AA_1\perp AC)\Leftrightarrow AA_1\perp(ABC)$.
AB-ს D შუა წერტილი შევაერთოთ C -თან და C_1 -თან.
$\angle C_1DC$ არის ხაზოვანი კუთხე, რადგან
$CD\perp AB \Rightarrow C_1D\perp AB$ (სამი პერპენდიკულარის თეორემა).
$tg\angle CDC_1=\frac{CC_1}{CD}=\frac{AB}{AB\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. პასუხი: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



აბა, სცადე! ვთქვათ, AD=a, DC=b, CC_1=c, B_1D=d; (B_1D) დიაგონალსა და (AA_1B_1) სიბრტყეს შორის კუთხე იყოს α; (B_1D)-სა და (BB_1C_1)-ს შორის-β და (B_1D)-სა და (ABC)-ს შორის-γ.

$\sin\alpha=\frac{a}{d}$; $\sin\beta=\frac{b}{d}$; $\sin\gamma=\frac{c}{d}$; $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{d^2}=\frac{d^2}{d^2}=1$.

ანალოგიურად შეგვძლია გამოვთვალოთ cosα, cosβ, cosγ, ან უკვე დამტკიცებულ ტოლობაში სინუსები ჩავანაცვლოთ კოსინუსებით. მივიღებთ: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

4.9 მანძილები სივრცეში

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს ფიგურებს შორის მანძილის დადგენა სივრცეში.
კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:
სავ.№1. 15სმ, 25სმ. **სავ.№2**. 2,4სმ. **სავ.№3.** 10სმ.
სავ.№4. 5სმ, 5სმ. **სავ.№5.** გ).
სავ.№6. ა) 8სმ, ბ) $8\sqrt{2}$სმ, გ) $8\sqrt{3}$სმ; დ) $8\sqrt{2}$სმ; ე) $8\sqrt{2}$ სმ, ვ)8სმ, ზ)8სმ, თ)$4\sqrt{2}$სმ.

სავ.№7. ა)aსმ, ბ)aსმ, გ)aსმ, დ)aსმ.

სავ.№8. ა) $\sqrt{82}$სმ; ბ) $\sqrt{73}$სმ.

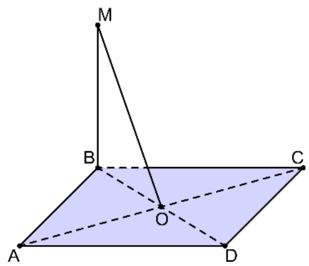
სავ.№9. ა)$2\sqrt{34}$სმ, ბ)$2\sqrt{41}$სმ, გ)$10\sqrt{2}$სმ, დ)10სმ; ე)10სმ; ვ)$2\sqrt{34}$სმ , ზ)$2\sqrt{41}$სმ .

სავ.№10. ა)1; ბ)8სმ; გ)8სმ.

სავ.№11. ა)6სმ, 9სმ, 7სმ; ბ)$7\frac{1}{3}$სმ.

სავ.№12. $(AB_1)\cap(A_1B)=K$; $AK\perp A_1B$; $AK\perp AD$; $AK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$სმ.

სავ.№13. გავავლოთ $MK\perp AC$. $MK=?$ სამი მართობის თეორემის თანახმად BK მართობული იქნება AC-სი. $BK=\frac{6\cdot 8}{10}=4{,}8$. $MK^2=BM^2+BK^2=100+23{,}04$; $MK=\sqrt{123{,}04}=\frac{2\sqrt{769}}{5}$.



სავ.№14. $MO\perp AC \Rightarrow BO\perp AC$. ABCD პარალე-ლოგრამში $BD\perp AC \Rightarrow$ ABCD რომბია. P=48სმ.

სავ.№15. M დაგეგმილდება ჰიპოტენუზის შუა წერტილზე: $d(M;(ABC))=\sqrt{8^2-5^2}=\sqrt{39}$ სმ.

სავ.№16. AB=10სმ. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი r=2სმ.

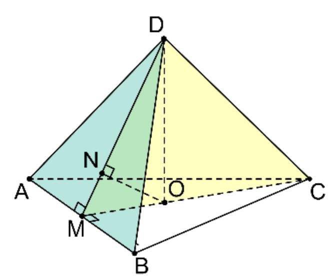
ა) ყველა გვერდამდე მანძილები ტოლია და უდრის $\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$სმ.

ბ)$MC^2=MO^2+OC^2$; $OC=2\sqrt{2}$სმ, $MC=\sqrt{33}$სმ; წრეწირის BC გვერდთან შეხების წერტილი იყოს D, AC გვერდთან შეხების წერტილი-K. DB=6სმ; AK=4სმ; $MB=\sqrt{6^2+29}=\sqrt{65}$ სმ. $MA=\sqrt{4^2+29}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$;

სავ.№17. ა) $DM\perp AB \Rightarrow OM\perp AB$; $AB\perp(MDC) \Rightarrow (ABD)\perp(MDC)$. $ON\perp MD$; $ON\perp(ABD)$.

ბ)ON=? $DM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MO=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $DO=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$;

$ON=\frac{OD\cdot OM}{MD}=\frac{a\sqrt{6}}{9}$სმ.



ტესტი № 10

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- სიბრტყეთა მართობულობა;
- მანძილები სივრცეში.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7	8
პასუხი	ბ)	ა)	დ)	გ)	ა)	გ)	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	5 სმ

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული პირველი 6 საკითხი ფასდება 1 ქულით, ხოლო მე-7 და მე-8 დავალებები – 2-2 ქულით.

მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

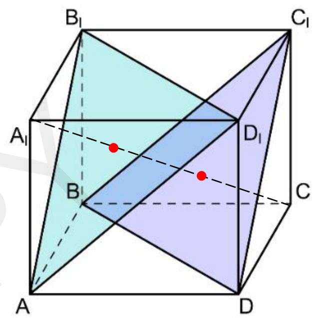
ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული სტერეომეტრიული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს სტერეომეტრიული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს სტერეომეტრიული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს სტერეომეტრიულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულობა და დასაბუთება	არ ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას, ვერ განსაზღვრავს გამოყენების არეალს, ვერ ალიქვამს „სიბრტყეთა მართობულობას“ და „მანძილებს სივრცეში“.	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ხსნის ამოცანების მცირე ნაწილს დასაბუთების გარეშე.	ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მაგალითებს ხსნის არამკაცრი და ნაწილობრივი დასაბუთებით.	ღრმად ესმის სტერეომეტრიული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა.	ვერ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს ანალიზისა და	ახერხებს სხვა სტრუქტურებთან კავშირების დადგენას. აქვს ანა-	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. შეუძლია

ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	სინთეზის უნა-რი.	ლიზისა და სინ-თეზის უნარი.	ახერხებს მიღებუ-ლი შედეგების გან-ზოგადებასა და ანა-ლიზს.	მიღებული შედე-გების განზოგა-დება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

აბა, სცადე! გავავლოთ A_1C დიაგონალი. $(A_1C)\cap(AB_1D_1)=O_1$; $(A_1C)\cap(BDC_1)=O$.

(A_1C)-ს გეგმილი (ABC)-ზე არის AC. $AC\perp BD\Rightarrow A_1C\perp BD$. (A_1C)-ს გეგმილი (CDD_1)-ზე არის D_1C, $D_1C\perp DC_1\Rightarrow A_1C\perp DC_1$. გამოდის, რომ $(A_1C)\perp(BDC_1)$.



$(AB_1D_1)\|(BDC_1)$ ე.ი. $(A_1C)\perp(AB_1D_1)$. მანძილი (AB_1D_1) და (BDC_1) სიბრტყეებს შორის იქნება O_1O. მანძილი A_1 წვეროდან (AB_1D_1) სიბრტყემდე არის A_1O_1.

$A_1B_1=A_1D_1=A_1A=a$; $AB_1=B_1D_1=AD_1=a\sqrt{2}$; B_1O_1 არის AB_1D_1 სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი. $R=\frac{a\sqrt{6}}{3}$,

$A_1O_1=\sqrt{a^2-\frac{6}{9}a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. ანალოგიურად $CO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $A_1C=a\sqrt{3}$. მივიღეთ $O_1O=a\sqrt{3}-2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

პასუხი: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

თავი 5.

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები

თავის მიზანია მოსწავლემ შეძლოს:

- ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებების გამოყენება ალგებრული გამოსახულების გარდაქმნასა და გამოთვლებში;
- მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გრაფიკების აგება, თვისებების ჩამოყალიბება და გამოყენება;
- მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნა;
- მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.

მატრიცა

თემა –მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები **სამიზნე ცნება** – ფუნქცია. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები **(შედეგი მათ.საშ. 2, საშ.3)**

ქვეცნება – მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები;
საკითხი –დემოგრაფიული პროცესების მოდელირება მაჩვენებლიანი და ლოგარით-მული ფუნქციების გამოყენებით.
ქვესაკითხი –რთული პროცენტის ფორმულა ცვლადი ხარისხის მაჩვენებლით.

საკვანძო შეკითხვა –როგორ იყენებ მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს მოსახლეობის რიცხოვნების ცვალებადობის აღსაწერად?

სამიზნე ცნებასთან/ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:	**შეფასების კრიტერიუმი** მოსწავლეს შეუძლია:	ნაშრომში/ნაშრომში პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:
1.მაჩვენებლიანი ფუნქციაში ფუძე დადებითი, 1-ისაგან გან-სხვავებული, ხოლო ხარისხის მაჩვენებელი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. 2. როცა ხარისხის ფუძე 1-ზე მეტია, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ზრდადია, ხოლო როცა ფუძე 0-სა და 1-ს შორისაა მაშინ კლებადია. 3. $\log_a b$ - ის ხარისხის მაჩვენე-ბელია, რომლშიც a-ს ახარის-ხებით მიიღება b: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$. 4. ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(0;+\infty)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $(-\infty;+\infty)$. $y=\log_a x$ ზრდადი ფუნქციაა, როცა $a>1$ და კლებადი ფუნქციაა, როცა $0<a<1$. 5.მაცვენებლიანი ფუნქციით აღიწერება სხვადასხვა ბუნებრივი და ყოფითი მოვლენა: ნივთიერებათა დაშლა, მოსახლეობის მატება-	• ამოცანის შინაარ-სიდან გამომდინა-რე, მაჩვენებლიანი ფუნქციის აგება რთული პროცენტის ფორ-მულის გამოყე-ნებით **(მკვ.წ.1);** • მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნა ლოგარითმის გამო-ყენებით**(მწკ.3);** • მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციის თვისე-ბების ამოცანის ამოსახსნელად გამოყენება**(მკვ.წ 3);** • პრაქტიკული ამო-ცანის ამოსახსნე-ლად შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოკვლევა**(მწკ.5).**	• რა პროცესების ანალიზს ეძღვნება შენი ნაშრომი? • რამდენად აქტუალურია თემა? • რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში? • როგორ დაადგინე საშუალო წლიური კლების პროცენტი? • როგორ გამოთვალე მოსახ-ლეობის განახევრებისა ან/და გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობა? • რა ნიშნით შეარჩიე ჩასატა-რებელი ღონისძიებები? • რომელ ღონისძიებას მიიჩნევ ყველაზე პრიორიტეტულად და რატომ? • რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო გამოთ-ვლების ჩასატარებლად. • რა დასკვნა გამოიტანე ჩატარებული სამუშაოდან.

კლება, საფინანსო ოპერაციები და სხვ.		

კომპლექსური დავალება

„საქართველოს მოსახლეობა“

მსოფლიოს მოსახლეობის რაოდენობა ბოლო ათწლეულების განმავლობაში ყოველწლიურად, დაახლოებით, 1%-ით იზრდება და 2022 წელს 8 მილიარდს გადააჭარბა მაშინ, როცა 2000 წლისთვის 6 მილიარდს არ აღემატებოდა.

მიტოვებული სოფელი

სამწუხაროდ, პირიქით ტენდენციას აქვს ადგილი საქართველოს შემთხვევაში. ჩვენთან მოსახლეობის აშკარა კლება შეინიშნება. მაგალითად, თუ 1994 წელს საქართველოში 4 მილიონ 930 ათასი ადამიანი ცხოვრობდა, 2022 წლის მონაცემებით მოსახლეობის რაოდენობა 3700 ათასამდე შემცირდა. განსაკუთრებით თვალშისაცემია ახალგაზრდების ქვეყნიდან გადინება. თუ კლების ეს ტენდენცია გაგრძელდა, ჩვენს ქვეყანას დემოგრაფიული კატასტროფა ელოდება: სპეციალისტთა გამოთვლებით, 2060 წლისთვის მოსახლეობა 2022 წლის რაოდენობის ნახევარი, ხოლო საუკუნის ბოლოსთვის მესამედი იქნება. ეს კი, არა მარტო საფრთხეს შეუქმნის ქვეყნის მდგრად განვითარებასა და ნორმალურ ფუნქციონირებას, არამედ კითხვის ნიშნის ქვეშ დააყენებს ერის არსებობასაც.

შენი დავალება:

1. ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიების საშუალებით გადაამოწმე ზემოჩამოთვლილი მონაცემები;
2. ისარგებლე რთული პროცენტის ფორმულით და გამოთვალე 1994 წლიდან 2022 წლამდე საშუალოდ, რამდენი პროცენტით მცირდებოდა საქართველოს მოსახლეობა ყოველწლიურად.
3. დაადგინე, იმ შემთხვევაში, თუ მოსახლეობის შემცირება ამავე ტემპით გაგრძელდა, რა რაოდენობას მიაღწევს ქვეყნის მოსახლეობა:
   ა) 2060 წლისთვის;
   ბ) საუკუნის ბოლოსთვის;
   გ) რომელი წლისთვის იქნება მოსახლეობის რაოდენობა განახევრებული.
4. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი ღონისძიებები მიგაჩნია საჭიროდ, რათა ქვეყანამ აიცილოს დემოგრაფიული კატასტროფა:

- ინვესტიციების მოზიდვა;

- შობადობის ამაღლების ხელშეწყობა;
- განათლების სისტემის გაუმჯობესება;
- სპორტული მოედნების მოწყობა;
- სამუშაო ადგილების შექმნა;
- უცხოელების ჩამოსახლება;
- მრეწველობის თანამედროვე დარგების განვითარების ხელშეწყობა;
- სოფლის მეურნეობის განვითარების ხელშეწყობა;
- ტექნოლოგიების დანერგვა;
- ხელფასების გაზრდა;
- სოციალური დახმარების გაზრდა;
- ახალგაზრდების უცხოეთში მიგრაციის აკრძალვა;
- ნეპოტიზმთან ბრძოლა.

დაალაგე მოცემულთაგან შენთვის მისაღები ღონისძიებები პრიორიტეტების მიხედვით და დაასაბუთე შენი მოსაზრება.

5. ვთქვათ, გატარდა საჭირო ღონისძიებები და მოსახლეობამ იმავე პროცენტით, რა პროცენტითაც იკლებდა, დაიწყო ზრდა. დაადგინე:
ა) რომელ წელს გაუტოლდება მოსახლეობის რაოდენობა 1994 წლის მონაცემს;
ბ) რამდენ წელწადში გაორმაგდება მოსახლეობის რაოდენობა.
6. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- როგორ დაადგინე საშუალო წლიური კლების პროცენტი;
- როგორ გამოთვალე მოსახლეობის განახევრებისა ან/და გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობა;
- რა ნიშნით შეარჩიე ჩასატარებელი ღონისძიებები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო გამოთვლების ჩასატარებლად.

კომპლექსური დავალების განხორციელების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები, შეკითხვები)

ეტაპი I – კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა

რესურსები/განსახილველი ქეისები:

- **რესურსი 1**. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს მე-3 თავი;
- **რესურსი 2.** კალკულატორი;
- **რესურსი 3.** ხანის აკადემია;
- **რესურსი 4.** ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიები.

კომპლექსური დავალების პირობის გააზრებაზე ორიენტირებული შეკითხვები:

- როგორ გესმის ტერმინი „დემოგრაფია“?
- რა პრობლემაზეა საუბარი დავალებაში?
- შენი აზრით რამ განაპირობა საქართველოში მოსახლეობის კლება ბოლო ათწლეულებში?
- რა მონაცემების მიხედვით გამოთვლი მოსახლეობის რაოდენობის საშუალო წლიურ კლებას საქართველოში?
- რაში მდგომარეობს რთული პროცენტის ფორმულა?
- არის თუ არა მოსახლეობის რაოდენობა დამოკიდებული წლებზე?
- რა სახის ფუნქციაა მოსახლეობის რაოდენობის წლებზე დამოკიდებულების ფუნქცია?
- რა სახის განტოლების ამოხსნაა საჭირო, რათა დავადგინოთ რა დროისთვის განახევრდება ან/და გაორმაგდება მოსახლეობა?
- როგორ გამოიყენებ ლოგარითმს მაჩვენებლიანი განტოლების ამოსახსნელად?
- ჩამოთვლილი ღონისძიებებიდან რომელი მიგაჩნია მიუღებლად? რატომ?
- რა არის ნეპოტიზმი და როგორ გესმის მასთან ბრძოლა?

ქვესაკითხი - **კომპლექსური დავალება**

- შენი სიტყვებით ჩამოაყალიბე, რას შეეხება დღეს მოცემული დავალება, რომელზეც რამდენიმე გაკვეთილის განმავლობაში უნდა იმუშავო.
- მსგავსი ფორმის, ან შინაარსის დავალება სხვა დროს თუ შეგისრულებია?

ეტაპი II – კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა

ქვეცნებები -

- ხარისხი, ხარისხის ფუძე, ხარისხის მაჩვენებელი (პარ.5.1);
- მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების თვისებები(პარ.5.2-5.6);
- მაჩვენებლიანი განტოლება და უტოლობა (პარ.5.3-5.9).

ქვესაკითხები -

- ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებები;
- მაჩვენებლიანი განტოლებისა და უტოლობის ამოხსნა ლოგარითმის გამოყენებით.

ნაბიჯი 1. 1-ელი დავალების შესრულება;

- მოსწავლეები ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიების საშუალებით გადაამოწმებენ დავალებაში წარმოდგენილ დემოგრაფიულ მონაცემებს.

დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- რა საძიებო სისტემის საშუალებით გადაამოწმე მონაცემები?
- როგორ ფიქრობ, რომელი წლისთვის მიაღწევს მსოფლიოს მოსახლეობის რაოდენობა 10 მილიარდს?

ნაბიჯი 2. მე-2 დავალების შესრულება;

მოვიყვანოთ მე-2 დავალების შესრულების ნიმუში:

ვთქვათ, 1994 წლიდან 2022 წლამდე საქართველოს მოსახლეობა ყოველწლიურად საშუალოდ p პროცენტით მცირდებოდა. ეს ნიშნავს, რომ მოსახლეობის რაოდენობა ყოვერლ წელს მრავლდებოდა $\left(1-\frac{p}{100}\right)$-ზე. 28 წლის განმავლობაში მოსახლეობის საწყისი რაოდენობა 4 930 000 გამრავლდება $\left(1-\frac{p}{100}\right)^{28}$ -ზე, რაც 3 700 000-ის ტოლია.

მივიღეთ განტოლება:

$$4930000\left(1-\frac{p}{100}\right)^{28}=3700000.$$

ამ განტოლებიდან კალკულატორის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$1-\frac{p}{100}=\sqrt[28]{\frac{3700000}{4930000}}\Rightarrow 1-\frac{p}{100}\approx 0{,}9898\Rightarrow p\approx 1\%.$$

დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- რატომ იყენებ რთული პროცენტის და არა მარტივი პროცენტის ფორმულას?
- რა სახის განტოლება მიიღე საშუალო პროცენტის გამოსათვლელად?
- როგორ გამოთვალე 28 ხარისხის ფესვი?
- რა სახის განტოლება მიიღე გ) პუნქტზე პასუხის გასაცემად?
- გამოიყენე თუ არა ლოგარითმის ფუძის გამოცვლის ფორმულა?

ნაბიჯი 3. მე-3 დავალების შესრულება;

მოვიყვანოთ მე-3 დავალების შესრულების ნიმუში:

ა) 2022 წლიდან 2060 წლამდე 38 წელია. ამიტომ, თუ მოსახლეობის შემცირება იმავე ტემპით გაგრძელდა, მაშინ 2060 წლისთვის მივიღებთ:

$$3700000\cdot 0{,}99^{38}\approx 2525452,$$

რაც ნიშნავს, რომ 2060 წლისთვის მოსახლების რაოდენობა დაახლოებით 2,5 მილიონის ტოლი იქნება.

ბ) 2022 წლიდან 2100 წლამდე 78 წელია. ამიტომ, თუ მოსახლეობის შემცირება იმავე ტემპით გაგრძელდა, მაშინ 2100 წლისთვის მივიღებთ:

$$3700000 \cdot 0,99^{78} \approx 1689456,$$

რაც ნიშნავს, რომ საუკუნის ბოლოსთვის მოსახლების რაოდენობა 1,7 მილიონზე ქვემოთ იქნება.

გ) ვთქვათ, მოსახლეობა განახევრდა x წლის შემდეგ. დავწეროთ განტოლება:

$$0,99^{x} = \frac{1}{2}.$$

მივიღეთ მაჩვენებლიანი განტოლება. თუ ვისარგებლებთ ლოგარითმის განმარტებით, მივიღებთ განტოლების ამონახსნს:

$$x = \log_{0,99} 0,5.$$

იმისათვის, რომ მიღებული რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოვთვალოთ, ვისარგებლოთ ლოგარითმის ფუძის შეცვლის ფორმულით:

$$\log_{0,99} 0,5 = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,99} = 68,9676 \approx 69.$$

ე.ი. მოსახლეობის რაოდენობა დაახლოებით 2091 წლისთვის განახევრდება.

ნაბიჯი 4. მე-4 დავალების შესრულება;

მოსწავლეები ჩამოთვლილთაგან არჩევენ მათთვის მისაღებ ღონისძიებებს, სურვილისამებრ ამატებენ საკუთარსაც და ასაბუთებენ მათ.

ნაბიჯი 5. მე-5 დავალების შესრულება;

მოვიყვანოთ მე-5 დავალების შესრულების ნიმუში:

ვთქვათ, 1994 წლის რაოდენობას მოსახლეობა აღწევს x წელიწადში. დავწეროთ განტოლება:

$$3700000 \cdot 1,01^{x} = 4930000 \Leftrightarrow 1,01^{x} = 1,3324.$$

აქაც მივიღეთ მაჩვენებლიანი განტოლება , რომლის ამონახსნია

$$x = \log_{1,01} 1,3324 = \frac{\lg 1,3324}{\lg 1,01} \approx 28,84.$$

ე.ი. 1994 წლის რაოდენობას მოსახლეობა დაახლოებით 29 წელიწადში მიაღწევს;

ბ) ვთქვათ, მოსახლეობა გაორმაგდა x წელიწადში. დავწეროთ განტოლება:

$$1,01^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \log_{1,01} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,01} \approx 69,66.$$

ე.ი. მოსახლეობა დაახლოებით 70 წელიწადში ანუ 2092 წლისთვის გაორმაგდება.

- რა სახის განტოლებების ამოხსნა დაგჭირდა მე-5 დავალების შესრულებისას?
- რა სიზუსტით გამოთვალე საჭირო წლების რაოდენობა?

ნაბიჯი 5. ნაშრომის საპრეზენტაციოდ მომზადება

პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პროცესების ანალიზს ეძღვნება შენი ნაშრომი;
- რამდენად აქტუალურია თემა;
- როგორ დაადგინე საშუალო წლიური კლების პროცენტი;
- როგორ გამოთვალე მოსახლეობის განახევრებისა ან/და გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობა;
- რა სახის განტოლებების ამოხსნა დაგჭირდა დავალების შესასრულებლად;
- რა ნიშნით შეარჩიე ჩასატარებელი ღონისძიებები;
- რომელ ღონისძიებას მიიჩნევ ყველაზე პრიორიტეტულად და რატომ;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო გამოთვლების ჩასატარებლად.
- რა დასკვნა გამოიტანე ჩატარებული სამუშაოდან.

5.1 მაჩვენებლიანი ფუნქცია, მისი თვისებები და გრაფიკი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- მაჩვენებლიანი ფუნქციის ცნების განმარტება;
- მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებების ჩამოთვლა;
- მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის აგება.

1-ელი გაკვეთილი

მიზანი:

- ცნების „მაჩვენებლიანი ფუნქცია“ შემოტანა;
- მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებების შესწავლა;
- მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის აგება.

ძირითადი მეთოდი: ნაწილობრივ საძიებო

გაკვეთილის მსვლელობა

I. **ორგანიზაციული მომენტი** (მისალმება, დასწრების შემოწმება)

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

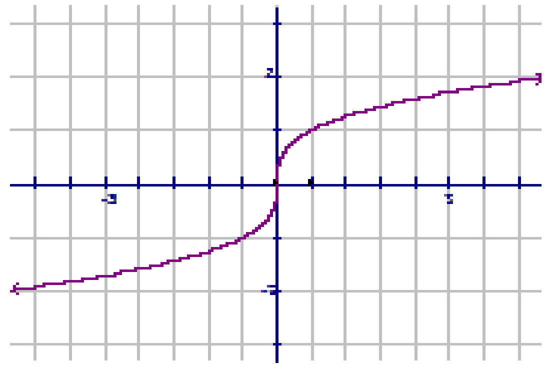
1) წყვილებში მუშაობა

ალმოაჩინეთ შეცდომა და გაასწორეთ:

ა) $3^5\cdot3^4+3^2=3^{5+4+2}$; ბ) $a^n\cdot a^m=a^{nm}$; გ) $4^2\cdot\left(\frac{1}{4^5}\right)\cdot4^{-1}\cdot(-4)^4=4$;

დ) $\frac{a^5\cdot a^{-3}}{a^{-2}}=a^{5+3-2}=a^6$; ე) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{27}$; ვ) $\sqrt[3]{27\cdot64\cdot0{,}125}=120$; ზ) $\left(\sqrt[4]{64\cdot4}\right)^2=4\cdot2$

თ) მოცემული გრაფიკის თვისებებია:



- $D(y)=[-3,5;\ 3,5]$;

  $E(y)=(0;\ +\infty)$;
- ფუნქციის ნულია: $x=-1$;
- $y>0$, როცა $x\in(-\infty;\ 0)$;

  $y<0$, როცა $x\in(-\infty;\ 0)$;
- ფუნქცია მონოტონურად კლებადია;
- ფუნქცია არაპერიოდულია;
- ფუნქცია ლუწია;
- $y_{max}=5,\ y_{min}=0.$

შეამოწმე შენი ნაშრომის პასუხები (პასუხებს აჩვენებს ეკრანზე)

შეკითხვა	ა	ბ	გ	დ	ე	ვ	ზ
პასუხი	$3^{5+4}+9$	a^{n+m}	1	a^4	$\frac{2}{3}$	6	16

შეკით-ხვა თ)	განსაზღვრის არე $[-\infty;\ +\infty]$, მნიშვნელობა-თა სიმრავლე $[-2;\ 2]$	ფუნქციის ნულია $x=0$	$y>0$, როცა $x\in(0;\ +\infty)$ $y<0$, როცა $x\in(-\infty;\ 0)$;	მონოტო-ნურად ზრდადია	არაა პერიო--დული	კენტია	$y_{max}=2$, $y_{min}=-2$.

შეაფასე შენი ნაშრომი

სწორი პასუხების რაოდენობა	შეფასება ქულებით
13-14	10
11-12	9
9-10	8
7-8	7
6	6
<6	0-5

ქულები	შეფასების დონეები
10	მაღალი
9	

8	საშუალოზე მაღალი
7	
6	საშუალო
5	
4	საშუალოზე დაბალი
3	
2	დაბალი
1	

III. **ახალი მასალის ახსნა**

გაკვეთილი წარიმართება სახელმძღვანელოს კონტექსტის მიხედვით, რომელიც იწყება ცხოვრებისეული ამოცანით და რომლის დახმარებით შემოაქვთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის ცნება. შემდეგ განიხილავენ $y = 2^x$ ფუნქციას. აღნიშნავენ, რომ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში, არა აქვს არც უმცირესი და არც უდიდესი მნიშვნელობები. აგებენ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქციის გრაფიკს, ამ ორი გრაფიკის ცალ-ცალკე განხილვითა და შემდეგ შეპირაპირებით ჩამოაყალიბებენ მაჩვენებლიანი ფუნქციის ყველა თვისებას, აღნიშნავენ ამ გრაფიკების სიმეტრიულობას ორდინატთა ღერძის მიმართ. ცხადია, ეს ყველა დასკვნა დამოუკიდებლად უნდა მიიღოს მოსწავლემ. პრობლემური სიტუაციის შექმნისას მასწავლებლის დახმარებით გადაწყვეტენ შექმნილ პრობლემას.

IV. **განმტკიცება** - სახელმძღვანელოდან ხსნიან №1, №3, №5, №7 სავარჯიშოებს.

V. **დამოუკიდებელი სამუშაო:** №8 სავარჯიშო.

VI. **რეფლექსია**

VII. **საშინაო დავალება**: №2, №4, №6 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№3. სიბრტყის (2;3) წერტილი ეკუთვნის გრაფიკს, ე.ი.

$3 = f(2) \Rightarrow 3 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$. ა) f(0)=1; ბ) f(4)=9; გ) f(-1)= $\frac{1}{\sqrt{3}}$; დ) f(0,5)= $\sqrt[4]{3}$.

სავ.№4. ა) $\left(\frac{1}{7}\right)^2 > 7^{-2,1}$; ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5} < 1$; გ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,2} > 1$; დ) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < 4^{-0,9}$;

ე) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}} < 9^{1,7}$; ვ) $2^{-\sqrt{3}} < 2^{-1,7}$; ზ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$; თ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{12}} = 9^{\sqrt{3}}$

.

საკ.№5. ა) $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ ფუნქცია კლებადია და $3\sqrt{2}>\sqrt{2}>-\sqrt{2}>-2\sqrt{2}$, ამიტომ

$\left(\frac{1}{125}\right)^{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-2\sqrt{2}}$.

ბ) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქცია კლებადია და $2\sqrt{3}>\sqrt{11}>\sqrt{2}>0,01>0$, ამიტომ

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{11}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{0,01}<1.$$

საკ.№6. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{3}}$, $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{11}}$, $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}}$, $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$.

საკ.№7. მოცემული $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^x$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ

ა) $f(3)>f(-2)$; ბ) $f(-3)<f(-2)$; გ) $f(3)>f(2)$; დ) $f(3)>1$; ე) $f(-3)<1$.

საკ.№8. ა) $x=3$; ბ) $x=4$; გ) $x=3$; დ) $1024=4^x\Rightarrow 4^5=4^x\Rightarrow x=5$.

საკ.№9. ა) $3^{x+1}+5\cdot 3^x=3\cdot 3^x+5\cdot 3^x=3^x(3+5)=8\cdot 3^x$;

ბ) $7^{x+2}+5\cdot 7^x=49\cdot 7^x+5\cdot 7^x=7^x(49+5)=54\cdot 7^x$;

გ) $35^{x+1}+5^x\cdot 7^x=35^x\cdot 35+(5\cdot 7)^x=36\cdot 35^x$;

დ) $2^{x+1}-2^{x-2}-2^x=2^3\cdot 2^{x-2}-2^{x-2}-2^2\cdot 2^{x-2}=3\cdot 2^{x-2}$.

საკ.№10. ა) $f\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot f\left(3-\sqrt{2}\right)=2^{3+\sqrt{2}}\cdot 2^{3+\sqrt{2}}=2^6=64$; ბ) $\frac{f\left(-2+\sqrt{7}\right)}{f\left(-5+\sqrt{7}\right)}=\frac{2^{-2+\sqrt{7}}}{2^{-5+\sqrt{7}}}=2^3=8$;

გ) $\left(f\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\left(2^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=2^{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=2^2=4$;

დ) $\frac{8f(3)}{f(5)}=\frac{2^3\cdot 2^3}{2^5}=2$; ე) $\frac{f(2)}{f(0)}=\frac{2^2}{2^0}=4$.

საკ.№11. ა) $(0;-9)$, $(3;0)$, $(-3;0)$; ბ) $(0;-3)$, $(9;0)$; გ) $(0;-2)$, $(1;0)$;

დ) $\left(0;\frac{7}{8}\right)$, $(-3;0)$; ე) $\left(0;-\frac{1}{8}\right)$, $(1;0)$; ვ) $\left(0;5\sqrt{5}-25\right)$, $(1;0)$.

საკ.№12. ა) $-3,5$; ბ) 2; $\frac{1}{2}$; გ) 8; დ) -2; ე) $-\frac{1}{3}$; ვ) ± 1.

საკ.№13. ყოველი მათგანი წარმოადგენს მაჩვენებლიან ფუნქციას, ამიტომ რომელშიც ფუძე ერთზე მეტია, ის ზრდადია, ასეთებია ბ), გ), დ). დანარჩენი ფუნქციების ფუძე 0-სა 1-ს შორისაა, ამიტომ კლებადია ა), ე) და ვ).

სავ.№14. ა) $f_1(x)=\left(\sqrt{3}-a\right)^x$ ზრდადი, $f_2(x)=\left(\sqrt{3}-b\right)^x$ კლებადია, ამიტომ

$\sqrt{3}-a>1 \Rightarrow a<\sqrt{3}-1$, ხოლო $0<\sqrt{3}-b<1 \Rightarrow \sqrt{3}-1<b<\sqrt{3}$, ე,ი, $a<b$.

ბ) $a<0{,}7$ და $b>0{,}9$, ე.ი. $a<b$;

გ) $a>4$ და $b<0{,}7$, ე.ი. $a>b$;

სავ.№15. ა) -2,7; ბ)1 გ)-2.

სავ.№ 16. ა) 9; ბ) 1; გ) 25; დ)1.

სავ.№18 $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{7}}=\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\sqrt{7}}$; $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{11}}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{44}}$; $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4\sqrt{3}}$;

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{0}=1$; $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{5}}=\left(5+\sqrt{24}\right)^{\sqrt{5}}$.

$f(x)=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x$ ფუნქცია კლებადია, ამასთან $2\sqrt{11}>2\sqrt{7}>0>-2\sqrt{5}>-4\sqrt{3}$,

ამიტომ

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{44}}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{11}}<\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{7}}=\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\sqrt{7}}<1=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{0}<\left(5+\sqrt{24}\right)^{\sqrt{5}}=$$

$$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{5}}<\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4\sqrt{3}}.$$

პასუხი: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{44}}<\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\sqrt{7}}<1<\left(5+\sqrt{24}\right)^{\sqrt{5}}<\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4\sqrt{3}}$.

სავ.№19. ა) $f(x)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^x=\left(\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}\right)^x=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^x$,

$h(x)=\left(8-2\sqrt{15}\right)^x=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{2x}=f(2x)$,

$f(x)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^x$ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ ა) $f(3)>h(2)=f(4)$;

ბ) $f(-3)<h(-2)=f(-4)$; გ) $f(4)=h(2)$, დ) $f(3)<1=f(0)$ ე) $h(-3)>1$.

სავ.№20. ა) $f(x)=\left(a^2-3\right)^x$ ფუნქცია ზრდადია $\Leftrightarrow a^2-3>1 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$;

ბ) $f(x)=\left(a^2-3\right)^x$ ფუნქცია კლებადია $\Leftrightarrow 0<a^2-3<1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2<4 \Leftrightarrow |a|<2 \Leftrightarrow a\in(-2;2) \\ a^2>3 \Leftrightarrow |a|>\sqrt{3} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$$

სავ.№21. $9^x-8\cdot 3^x=9 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-8\cdot 3^x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=9 \\ 3^x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$

შესაძლებელია თუ არა: ა) არა, მაგალითად $2^{\sqrt{2}}$ არ წარმოდგება; ბ) კი, რადგან $y=2^x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(0;+\infty)$.

5.2. ლოგარითმი და მაჩვენებლიანი განტოლება

საათების სავარაუდო რაოდენობაა 4 საათი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- რიცხვის ლოგარითმის განმარტება და გამოთვლა;
- ლოგარითმის გამოყენება მაჩვენებლიანი განტოლების ამოსახსნელად.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $\log_2 4=2$; ბ) $\log_3 27=3$; გ) $\log_2 64=6$; დ) $\log_4 64=3$; ე) $\log_5 125=3$;

ვ) $\log_{25} 5=\frac{1}{2}$; ზ) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; თ) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$; ი) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; კ) $\log_2 1=0$;

ლ) $\log_{10} 0{,}1=-1$; მ) $\log_{0,1} 10=-1$ ნ) $\log_2 4^{-3} - 6$; ო) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$;

პ) $\log_{\frac{1}{3}} 9^2 = \frac{1}{-1}\log_{\frac{1}{3}} 3^4 = -4$; ჟ) $\log_{0,1} 1=0$; რ) $\log_{10} 0{,}01=-2$; ს) $\log_{0,01} 10=-\frac{1}{2}$;

ტ) $4^{\log_4 3} = 3$; უ) $3^{\log_3 13} = 13$; ფ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5} 5} = 5$; ქ) $9^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 25$;

ღ) $4^{\log_2 3} = 4^{\log_4 9} = 9$; ყ) $3^{\log_2 8} = 3^3 = 27$.

სავ.№2. ა) $\frac{N(t)}{N_0} = 4,\ 2^{\frac{t}{T}} = 4,\ t = 2T.$ ბ) $\frac{N(t)}{N_0} = 5,\ 2^{\frac{t}{T}} = 5,\ t = T\log_2 5.$

სავ.№3. ა) $2^x = 32 \Rightarrow x = \log_2 32 = 5$; ბ) $3^x = 27 \Rightarrow x = \log_3 27 = 3$;

გ) $9^x = 27 \Rightarrow x = \log_9 27 = \frac{3}{2}$; დ) $2^{3x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$; ე) x=3; ვ) x=4;

ზ) $25^{-x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{-2x} = 5^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; თ) $8^x = 16 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$;

ი) $4^x = 25$ Þ $x = \log_4 25 = \log_2 5$; კ) $3^x = 8 \Rightarrow x = \log_3 8$;

ლ) $2^{-x} = 0{,}2 \Rightarrow -x = \log_2 \frac{1}{5} \Rightarrow x = \log_2 5$; მ) $8^x = 6 \Rightarrow x = \log_8 6$.

სავ.№4. ა) -3; ბ) 1,5; გ) 0; -3; 3; დ) 2,8; ე) -2; ვ) $\frac{3}{4}$; ზ) $\frac{-2}{3}$; თ) $-\frac{1}{6}$.

სავ.№5. ა) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow -x = x \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$; ბ) $8^x = \sqrt[3]{32} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = \frac{5}{9}$;

გ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Rightarrow x = 3$; დ) x=4.

სავ.№6. ა) $25^{\frac{2x-3}{4}} = \sqrt[4]{125} \Rightarrow 5^{\frac{2x-3}{2}} = 5^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{2x-3}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$; ბ) $x = -\frac{23}{9}$; გ) $x = 2{,}5$; დ) $x = -\frac{7}{6}$.

სავ.№7. ა) $3^{x^2}\cdot 5^{x^2}=225\Rightarrow\left(3\cdot 5\right)^{x^2}=15^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$;

ბ) $2^x\cdot 5^x=10^{-1}\cdot\left(10^{2x-2}\right)^3\Rightarrow\left(2\cdot 5\right)^x=10^{6x-7}\Rightarrow x=1,4$; გ) $x=\left[\begin{array}{l}0;\\-2\end{array}\right.$ დ) $x=\left[\begin{array}{l}-4\\-2\end{array}\right.$.

სავ.№8. ა) -1; ბ) 1; გ) 0; დ) 3; ე) 2; ვ) 3; ზ) 2,5.

სავ.№9. ა) 0; ბ) 3; გ) 4, -2; დ) -1.

სავ.№11. ა) $\log_4 8=\frac{3}{2}$; ბ) $\log_9 27=\frac{3}{2}$; გ) -2; დ) 3; ე) 4; ვ)0,008.

სავ.№12. ა) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{3x}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{3}}\Rightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{3x}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{3}}\Rightarrow 3x=2\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$;

ბ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2x+4+2\sqrt{5}}=\left(5+\sqrt{24}\right)^{\sqrt{5}}\Rightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2x+4+2\sqrt{5}}=\left(3+\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{5}}\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2$;

გ) 4; დ) 1,5; ; ე) 0; 0,5; ვ) 0,6.

სავ.№13) ა) 1000+100n=2000, n=10; ბ) $1000\left(1,1\right)^n=2000$, $n=\log_{1,1}2\approx 7,27$.

აბა სცადე! დავუშვათ $\log_2 3$ რაციონალური რიცხვია. მაშინ $\log_2 3=\frac{m}{n}, m\in Z, n\in N$,

საიდანაც გვექნება: $n\log_2 3=m\Rightarrow\log_2 3^n=m\Rightarrow 3^n=2^m$, რაც შეუძლებელია, რადგან ტოლობის მარცხენა მხარე კენტია, მარჯვენა კი ლუწი. ე.ი. დაშვება მცდარია. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ტესტი №11

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- მაჩვენებლიანი ფუნქცია, მისი თვისებები და გრაფიკი;
- ლოგარითმი;
- მაჩვენებლიანი განტოლება.

პასუხები

დავალება №	1	2	3	4	5	6	7	8
პასუხი	ა)	დ)	ბ)	გ)	გ)	ბ)	-6	1

9	10
$\log_2 3$	$\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებულიდავალება ფასდება 1 ქულით.
მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო

7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

- მაჩვენებლიანი ფუნქცია, მისი თვისებები და გრაფიკი;
- ლოგარითმი;
- მაჩვენებლიანი განტოლება.

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული საჭირო ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს სათანადო ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს დავალებასთან დაკავშირებული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს სათანადო ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულობა და დასაბუთება	არ ესმის მაჩვენებლიან ფუნქციასთან დაკავშირებული ცნებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას, ვერ განსაზღვრავს გამოყენების არეალს, ვერ ხსნის მაგალითებს.	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ხსნის მაგალითების მცირე ნაწილს დასაბუთების გარეშე.	ესმის თემასთან დაკავშირებული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. სწორად კითხულობს გრაფიკს. ასაბუთებს თანმიმდევრულად, მაგრამ არამკაცრად,	ღრმად ესმის თემასთან დაკავშირებული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაცრად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და	მაჩვენებლიანი ფუნქციების თვისებების არცოდნის გამო ვერ ადგენს კავშირებს სხვა	ახერხებს სხვა სტრუქტურებთან კავშირების დადგენას. აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი, საჭი-	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ ახერხებს მიღებუ-	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. უპრობლემოდ შეუძლია

პრობლემის გადაჭრის უნარი	სტრუქტურებ-თან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნა-რი.	როებს ცოდნის გაღრმავებას მაჩ-ვენებლიანი ფუნ-ქციისა და მისი თვისებების შესახებ	ლი შედეგების გან-ზოგადებასა და ანა-ლიზს.	მიღებული შედე-გების განზოგა-დება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

5.3 ლოგარითმის თვისებები

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს ლოგარითმის თვისებების, ნამრავლის, განაყოფისა და ხარისხის ლოგარითმის გამოსათვლელი ფორმულებისა და ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლის ფორმულის ლოგარითმული გამოსახულებების გამარტივებასა და გამოთვლაში გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1 ა) $\log_2(8\cdot7)=\log_2 8+\log_2 7=3+\log_2 7$; ბ) $\log_3(2\cdot27)=\log_3 2+\log_3 27=\log_3 2+3$;

გ) $\log_7 21=\log_7(7\cdot3)=3=1+\log_7 3$; დ) $\log_4 20=\log_4(4\cdot5)=\log_4 4+\log_4 5=1+\log_4 5$;

ე) $\log_4 16a=2+\log_4 a$; ვ) $\log_3 81ab=4+\log_3 a+\log_3 b$; ზ) $\log_2\frac{7}{11}=\log_2 7-\log_2 11$;

თ) $\log_3\frac{3}{20}=1-\log_3 20$; ი) $\log_7\frac{21}{25}=\log_7(7\cdot3)-\log_7 5^2=1+\log_7 3-2\log_7 5$; ;

კ) $\log_5\frac{a}{5}=\log_5 a-1$; ლ) $\log_3\frac{9}{b}=\log_3 9-\log_3 b=2-\log_3 b$; ; მ) $\log_5\frac{5a}{b}=1+\log_5|a|-\log_5|b|$.

სავ.№2. ა) $\log_3 4{,}5+\log_3 2$; ბ) $\log_2 3{,}2+\log_2 10=\log_2(3{,}2\cdot10)=5$;

გ) $\log_5 10-\log_5 2=\log_5\frac{10}{2}=1$; დ) $\log_{15}2250-\log_{15}10=\log_{15}\frac{2250}{10}=2$;

ე) $\log_5 0{,}1+\log_5 10=\log_5(0{,}1\times10)=0$; ვ) $\log_3 42-\log_3 14=\log_3 3=1$;

ზ) $\log_3 10-\log_3 30=\log_3\frac{10}{30}=-1$; თ) $\log_2 5-\log_2 10=\log_2\frac{5}{10}=-1$.

სავ.№3. ა) $5^{1+\log_5 10}=5^1\cdot5^{\log_5 10}=50$; ; ბ) $5^{1-\log_5 10}=\frac{5^1}{5^{\log_5 10}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; ; გ) $8^{\log_8 6-\log_8 3}=8^{\log_8\frac{6}{3}}=2$;

დ) $12^{\log_{12}24-\log_{12}2}=12^{\log_{12}12}=12$; ე) $16^{\log_4 7}=16^{\log_{16}49}=49$; ვ) $9^{\log_3 4}=9^{\log_9 16}=16$; ;

ზ) $5^{\log_3 2{,}25+\log_3 4}=5^{\log_3 9}=25$.

სავ.№4. ა)17; ბ) 24; გ) 1; დ) -3; ე) 2.

სავ.№5. ა) 4; ბ)49; გ) $\frac{4}{15}$; დ) $\frac{5}{9}$; ე)-1; ვ) $-\frac{2}{3}$.

სავ.№6. ა)2; ბ) 4; გ)-3; დ) 25; ე) 4; ვ)4.

სავ.№7. ა)2; ბ)1; გ) 1; დ)-2.

სავ.№8. ა) $\frac{\lg32}{\lg2}=\log_2 32=5$; ბ) $\frac{\log_5 64}{\log_5 48-\log_5 3}=\log_{16}64=\frac{3}{2}$; გ) $\log_5 9\cdot\log_3 5=\log_5 9\cdot\log_9 25=2$;

დ) $\log_2 3\cdot\log_9 16=\log_{16}81\cdot\log_9 16=2$; ე) $\log_4 7\cdot\log_{49}16=\log_{16}49\cdot\log_{49}16=1$.

სავ.№9. ა) $5^{2\log_{25}8+2\log_{0,2}5}=5^{\log_5 8-2}=0{,}32$; ; ბ) $25^{\frac{1}{2}\log_5 7+\log_{25}2}=25^{\log_{25}7+\log_{25}2}=14$;

გ) $\dfrac{\log_5 169}{\log_{125} 13} = \dfrac{3\log_5 169}{\log_5 13} = 3\log_{13} 169 = 6;$ დ) $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 81.$

სავ.№10. ა)-2; ბ)2; გ)1; დ) $-\dfrac{2}{3}$.

სავ.№12. $\log_4(1-\sin x) + \log_4(1+\sin x) = \log_4(1-\sin^2 x) = \log_4 \cos^2 x = \log_2|\cos x|;$

პასუხი: ა) $-\dfrac{1}{2}$; ბ)-1; გ) 0.

სავ.№13. ა)0; ბ) -1; გ)-1.

სავ.№14. ა) 190; ბ) 52. 15) $1+a$. 16) $2a+b$. 17) $\dfrac{6}{a}$. 18) $\dfrac{1}{9}(a-2)$.

სავ.№19. ა) $\sqrt{\log_2 9 \cdot \log_3 16 + 3^{\log_6 8} \cdot 2^{\log_6 8}} = \sqrt{8+(3\cdot 2)^{\log_6 8}} = 4;$ ბ)65; გ) 15; დ) 2.

სავ.№20. $\lg 8 + \lg 7 = 3\lg 2 + \dfrac{\log_2 7}{\log_2 10} = 3a + ab.$

სავ.№21. ვთქვათ, საჭიროა x-ცალი ფილტრი. მივიღებთ მაჩვენებლიან განტოლებას: $0{,}8^x = 0{,}25 \Rightarrow x = \log_{0{,}8} 0{,}25$; თუ ამ პასუხს ჩავწერთ 10-ის ფუძით და კალკულატორით გამოვთვლით, მივიღებთ: $x \approx 6{,}21$, ე.ი. საჭიროა 7 ფილტრი.

აბა, სცადე!

$2\lg\dfrac{1}{2} > 3\lg\dfrac{1}{2}$ უტოლობის საერთო მამრავლზე შეკვეცით უტოლობის ნიშანი შეიცვლება და მივიღებთ: 2<3.

5.4 გალოგარითმება და პოტენცირება

საათების სავარაუდო რაოდენობაა 2 საათი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- ალგებრული გამოსახულების გალოგარითმება;
- პოტენცირებით ლოგარითმული განტოლების ამოხსნა.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $\lg x = \lg(6ab) = \lg 6 + \lg|a| + \lg|b|;$ ბ) $\lg x = \lg(6(a+b)) = \lg 6 + \lg(a+b);$

გ) $\lg x = \lg(2a(a+b)) = \lg 2 + \lg|a| + \lg|a+b|;$ დ) $\lg x = \lg(5(a^2+b^2)) = \lg 5 + \lg(a^2+b^2);$

ე) $\lg y = \lg an(m+n) = \lg|a| + \lg|n| + \lg|m+n|;$ ვ) $\lg b = \lg(2a\sin\alpha) = \lg 2 + \lg|a| + \lg|\sin\alpha|$.

სავ.№2. ა) $\lg x = \lg\dfrac{3ab}{c} = \lg|3ab| - \lg|c| = \lg 3 + \lg|a| + \lg|b| - \lg|c|;$

ბ) $\lg x = \lg\dfrac{2mn}{3ac} = \lg|2mn| - \lg|3ac| = \lg 2 + \lg|m| + \lg|n| - \lg 3 - \lg|a| - \lg|c|;$

გ) $\lg x = \lg\dfrac{a^3b^2}{c^4} = \lg(a^3b^2) - \lg c^4 = 3\lg a + 2\lg|b| - 4\lg|c|;$ დ) $\lg x = \lg\dfrac{a+b}{c-b} = \lg|a+b| - \lg|c-b|;$

ე) $\lg x=\lg\dfrac{4(a+b)}{3(a^2-b^2)}=\lg\dfrac{4}{3(a-b)}=2\lg2-\lg3-\lg(a-b);$

ვ) $\lg v=\lg\dfrac{2\pi R}{T}=\lg|2\pi R|-\lg|T|=\lg2+\lg\pi+\lg|R|-\lg|T|;$

ზ) $\lg l=\lg m^2n^2\sqrt[5]{(a-b)^4}=2\lg|m|+2\lg|n|+\dfrac{4}{5}\lg|a-b|;$ თ) $\lg c=\lg(2\pi R)=\lg2+\lg\pi+\lg R.$

სავ.№3. ა) $\lg x=\lg\dfrac{4\pi R^3}{3}=\lg\left(4\pi R^3\right)-\lg3=\lg4+\lg\pi+3\lg R-\lg3;$

ბ) $\lg c=\lg\left(a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}\beta\right)=-\dfrac{3}{4}\lg a+\dfrac{2}{3}\lg b+\lg\operatorname{tg}\beta;$

გ) $\lg x=\lg\dfrac{4\sqrt{a^{-1}}\sqrt[3]{b}}{(a-b)^{-1}}=\lg4-\dfrac{1}{2}\lg a+\dfrac{1}{3}\lg b+\lg(a-b);$ დ) $\lg x=\lg2+\dfrac{7}{6}\lg a;$

ე) $\lg x=\lg\left(\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{5c}}\right)^5=\dfrac{5}{3}\lg a+\dfrac{5}{3}\lg b-\dfrac{5}{2}\lg5-\dfrac{5}{2}\lg c;$

ვ) $\lg x=\lg\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{ab}=\lg|\sin\alpha\cos\alpha|-\lg|ab|=\lg|\sin\alpha|+\lg|\cos\alpha|-\lg|a|-\lg|b|;$

ზ) $\lg x=\lg\left(5a\sqrt[3]{a^4(a-c)^2}\right)=\lg5+\dfrac{7}{6}\lg a+\dfrac{2}{3}\lg|a-c|;$

თ) $\lg u=\lg\left(\dfrac{4}{3}R^3\cos^2\alpha\sqrt[3]{\sin^2\alpha}\right)=\lg\dfrac{4}{3}+3\lg R+2\lg|\cos\alpha|+\dfrac{2}{3}\lg|\sin\alpha|.$

სავ.№4. გეომეტრიული პროგრესიაა: $10;1;0,1;0,01;0,001;---$, გალოგარითმებით მიღებული არითმეტიკული პროგრესიაა $1;0;-1;-2;---$, რომლის პირველი წევრია 1 და სხვაობა -1.

სავ.№5. $\log_3 b_n=\log_3 3^n=n$, ამიტომ მიმდევრობის პირველი 10 წევრის ჯამია:

$S_{10}=1+2+3+\cdots+9+10=55.$

სავ.№6. გეომეტრიული პროგრესიის $2,\ 1,\ 0,5,\ 0,25\ \ldots 2^{-11}$ წევრების 2-ის ფუძით გალოგარითმების შედეგად მიიღება: $1;0;-1;-2;\cdots;-11$. ამ პროგრესიის წევრთა ჯამია -65.

სავ.№7. ა) $\lg x=3\lg a+\lg6=\lg a^3+\lg6=\lg\left(6a^3\right),\quad x=6a^3;$

ბ) $\lg x=2\lg a-3\lg c+4\lg k=\lg a^2-\lg c^3+\lg k^4=\lg\dfrac{a^2k^4}{c^3},\quad x=\dfrac{a^2k^4}{c^3};$

გ) $\lg x=4\lg a+5\lg b=\lg a^4+\lg b^5=\lg\left(a^4b^5\right),\ x=a^4b^5;$

დ) $\lg x=\lg a-4\lg c=\lg\dfrac{a}{c^4}.\quad x=\dfrac{a}{c^4};$ ე) $\lg x=3\lg a-4\lg b=\lg\dfrac{a^3}{b^4},\quad x=\dfrac{a^3}{b^4};$

ვ) $\lg x = 3\lg(a+c) - 0,5\lg(a-c) = \lg\dfrac{(a+c)^3}{\sqrt{a-c}}, \quad x = \dfrac{(a+c)^3}{\sqrt{a-c}}.$

საკ.№8. ა) $\lg x = \dfrac{2}{3}\lg a + 1,5\lg c = \lg\left(c\sqrt{c}\sqrt[3]{a^2}\right), \quad x = c\sqrt{c}\sqrt[3]{a^2};$

ბ) $\lg x = \dfrac{2}{3}(\lg a - \lg c) - \lg(a-c) = \lg\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{(a-c)\sqrt[3]{c^2}}, \quad x = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{(a-c)\sqrt[3]{c^2}};$

გ) $\lg x = \dfrac{2}{3}(\lg a + \lg c) = \lg\sqrt[3]{a^2c^2}, \quad x = \sqrt[3]{a^2c^2};$

დ) $\log_a x = 3\log_a a + 4\log_a b - 5\log_a c = \log_a\dfrac{a^3b^4}{c^5}, \quad x = \dfrac{a^3b^4}{c^5}.$

საკ.№9. ა) $\lg x = \dfrac{2}{3}\lg m - \dfrac{3}{5}\lg n = \lg\dfrac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[5]{n^3}}, \quad x = \dfrac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[5]{n^3}};$

ბ) $\log_a x = 2\log_a(m+n) - 3\log_a(m-n) = \log_a\dfrac{(m+n)^2}{(m-n)^3}, \quad x = \dfrac{(m+n)^2}{(m-n)^3};$

გ) $\lg x = \dfrac{2}{3}\lg m + \dfrac{3}{5}\lg n = \lg\left(m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{3}{5}}\right), \quad x = m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{3}{5}};$

დ) $\log_a x = \dfrac{2}{3}\log_a(m-n) - \dfrac{1}{2}\log_a(m+n) = \log_a\dfrac{\sqrt[3]{(m-n)^2}}{\sqrt{m+n}}, \quad x = \dfrac{\sqrt[3]{(m-n)^2}}{\sqrt{m+n}}.$

საკ.№10. ა) $\log_c x = \dfrac{1}{2}\log_c(a+b) - \dfrac{2}{3}\log_c(a-b) - \dfrac{3}{4}\log_c a = \log_c\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{(a-b)^2}}, \quad x = \dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{(a-b)^2}};$

ბ) $\log_c x = \dfrac{2}{3}\log_c(a-b) - \dfrac{3}{4}(2\log_c a + 3\log_c a) = \log_c\sqrt[3]{(a-b)^2} - \log_c\left(a\sqrt{a}\right) - \log_c\left(a^2\sqrt[4]{a}\right) =$

$= \log_c\dfrac{\sqrt[3]{(a-b)^2}}{a^3\sqrt[4]{a^3}}, \quad x = \dfrac{\sqrt[3]{(a-b)^2}}{a^3\sqrt[4]{a^3}}.$

საკ.№11. $\lg b \cdot \lg a = \lg a \cdot \lg b \Leftrightarrow \cdot\lg a^{\lg b} = \lg b^{\lg a} \Leftrightarrow a^{\lg b} = b^{\lg a}$, $a>0$, $b>0$, რ.დ.გ. .

საკ.№12. ა) $\lg^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x = 1\\ \lg x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 10,\\ x = 0,1\end{array}\right.;$ ბ) $\log_5 \mathrm{tg}x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$

გ) $\log_2\log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 81.$

საკ.№13. ა) $x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3)\cup(3;+\infty);$ ბ) $16 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow x \in (-4;4);$

გ) $x \in (0;5);$ დ) $x \in (-\infty;3)\cup(5;+\infty);$ ე) $x \in (-\infty;0)\cup(1;2).$

საკ.№14. ა) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 7 \cdot \dfrac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \dfrac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1 = \log_3 4 + \log_3 3 = \log_3(3\cdot 4) = \log_3 12.$

ბ) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \log_3 2 \cdot \dfrac{1}{\log_3 4} \cdot \dfrac{\log_3 4}{\log_3 5} \cdot \dfrac{\log_3 5}{\log_3 6} \cdot \dfrac{\log_3 6}{\log_3 7} \cdot \dfrac{\log_3 7}{\log_3 8} = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 8} = \dfrac{1}{3}.$

აბა, სცადე! $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3} = \log_3(3\cdot 5)\cdot\log_3(27\cdot 5) - \log_3 5\cdot\log_3(81\cdot 5) =$

$= (\log_3 5 + 1)(\log_3 5 + 3) - \log_3 5\cdot(\log_3 5 + 4) = 3.$

5.5 ლოგარითმული ფუნქცია და მისი გრაფიკი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკის აგება და თვისებების ჩამოყალიბება და გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a$; ბ) $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$; გ) $a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$;

დ) $b^c = a \Leftrightarrow \log_b a = c$; ე) $c^b = a \Leftrightarrow \log_c a = b$; ვ) $c^a = b \Leftrightarrow \log_c b = a$.

სავ.№2. ა) $a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$; ბ) $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$; გ) $b^c = a \Leftrightarrow \log_b a = c$;

დ) $b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a$; ე) $c^a = b \Leftrightarrow \log_c b = a$. ვ) $c^b = a \Leftrightarrow \log_c a = b$.

სავ.№3. ა) $[0;+\infty)$; ბ) $(-\infty;+\infty)$; გ) $[-2;+\infty)$.

სავ.№5. ა) $\log_3 12 < \log_3 15$; ბ) $\log_{\frac{1}{3}} 12 > \log_{\frac{1}{3}} 15$; გ) $\lg 2 < \lg 3$; დ) $\lg_{0,1} 5 > \lg_{0,1} 6$.

სავ.№6. ა) $\log_2 1,2 > 0$; ბ) $\log_3 0,5 < 0$; გ) $\log_{\frac{1}{3}} 0,3 > 0$; დ) $\log_{\frac{1}{3}} 5 < 0$;

ე) $\lg 2 > 0$; ვ) $\lg 3 > 0$; ზ) $\lg_{0,1} 1 < 0$; თ) $\lg_{0,1} 2 < 0$.

სავ.№7. ა) $\log_{0,6} a < \log_{0,6} \Rightarrow a > b$; ბ) $\log_{4,3} a > \log_{4,3} b \Rightarrow a > b$;

გ) $\log_{0,6}\dfrac{1}{a} < \log_{0,6}\dfrac{1}{b} \Rightarrow a < b$; დ) $\log_{4,3}\dfrac{1}{a} > \log_{4,3}\dfrac{1}{3} \Rightarrow a < b$.

სავ.№8. ა) $x + 2 > 0,\ \ x > -2,\ \ x \in (-2;+\infty)$; ბ) $x \neq 0$; გ) $x > 0$;

დ) $x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$; ე) $\begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;+\infty)$.

სავ.№9. $\lg 0,01 < \log_{0,2} 5 < \log_3 1 < \lg 3 < \lg 7$.

სავ.№10. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{7},\ \log_2 5,\ \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{9},\ \log_2 3, \log_4 8$.

სავ.№11. ა) $\log_7 6 < \log_6 7$; ბ) $\log_{0,4} 0,5 > \lg\sin\dfrac{\pi}{7}$; გ) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\lg\left(\sqrt{3}-1\right)} > 1$;

დ) $3^{\lg\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)} \le 1$, ტოლობა მიიღწევა, მაგალითად, 0 გრადუსზე.

სავ.№12. ა) $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2;2)\cap\left((-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\right) \Rightarrow x \in (-2;-1)\cup(1;2)$

ბ) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$;

გ) $\begin{cases} 5-x>0 \\ x^2-6x+8>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(4;5).$

საშ.№13. გამოთვალე: ა) $8^{\log_4 3}=\left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$; ბ) $343^{1-\log_{49}13}=\dfrac{343}{\left(7^{\log_7 13}\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{343}{13\sqrt{13}}$;

გ) $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36}3}-\dfrac{\log_3 4}{\log_{108}3}=(1+\log_3 12)\log_3 12-(2+\log_3 12)(\log_3 12-1)=2;$

დ) $\log_{\sqrt{2}+1}\left(\sqrt{2}-1\right)=\log_{\sqrt{2}+1}\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}=-1.$

5.6 ლოგარითმული განტოლება

მიზანი: ცოდნის განზოგადება/გაღრმავება თემაზე „ლოგარითმული განტოლება“

რესურსი: მასალა ჯგუფური სამუშაოსთვის, დასარიგებელი ბარათები.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. **ორგანიზაციული მომენტი** (დასწრების შემოწმება, გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა)

II. **საშინაო დავალების შემოწმება** (დაფაზე ხსნიან იმის მსგავს მაგალითებს, რისი ამოხსნაც მოსწავლეებს გაუჭირდა)

III. **წინარე ცოდნის გააქტიურება**

1) უპასუხეთ კითხვებს:

- რას ეწოდება b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით? (b რიცხვის ლოგარითმი $a>0,\ a\neq 1$ფუძით ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a რიცხვი, რომ მივიღოთ b რიცხვი.)
- რას უდრის $\log_a 1$, როცა $a>0,\ a\neq 1$?
- რას უდრის $\log_a a$, როცა $a>0,\ a\neq 1$?
- რა თვისება აქვს ნამრავლის ლოგარითმს?
- რა თვისება აქვს წილადის ლოგარითმს?
- რა თვისება აქვს ხარისხის ლოგარითმს?

2) ზეპირი გამოთვლები

კონკურსი „ საუკეთესო გამომთვლელი“.

მასწავლებელი მაგალითებს ეკრანზე მორიგეობთ აჩვენებს კლასს. კლასი სამ ჯგუფად უნდა იყოს გაყოფილი. თითოეული ჯგუფი ირჩევს „საუკეთესო გამომთვლელს“. გამარჯვებულია ის ჯგუფი, რომლის წარმომადგენელიც 1 წუთში (კარგი იქნება ქვიშის საათის გამოყენება) დანარჩენებზე მეტ მაგალითს ამოხსნის.

ჯგუფი №1		ჯგუფი №2		ჯგუფი №3	
$\lg120-\lg12$	$\log_4 4$	$\lg150-\lg15$	$\log_6 6$	$\lg_5 5+\lg2$	$\log_7 7$
$\lg5+\lg2$	$\log_8 1$	$\lg5+\lg20$	$\log_9 1$	$\lg200-\lg2$	$\log_5 1$

$3\log_2 4$	$3\log_{\frac{1}{3}} 27$	$4\log_3 9$	$\log_{\frac{1}{2}} 8$	$5\log_4 16$	$\log_{\frac{1}{4}} 16$
$\log_3 \frac{1}{9}$	$\lg 10$	$\log_2 \frac{1}{4}$	$2\lg 10$	$\log_5 \frac{1}{25}$	$-3lg10$
$\log_3 5^2$	$-4\lg 10$	$\log_4 7^3$	$-5\lg 10$	$\log_3 8^5$	$\lg 10$
$3^{\log_3 7}+2$	$\log_5 x=3$	$5^{\log_5 3}+1$	$\log_3 x=2$	$7^{\log_7 2}-2$	$\log_6 x=2$
$\lg 0{,}01$	$\lg 10000$	$\lg 1000$	$\lg 0{,}1$	$\lg 100$	$\lg 0{,}001$

პასუხები:

გუნდი №1		გუნდი №2		გუნდი №3	
1	1	1	1	$1+\lg 2$	1
1	0	2	0	2	0
6	-3	8	-3	10	-2
-2	1	-2	2	-2	-3
$2\log_3 5$	-4	$3\log_4 7$	-5	$5\log_3 8$	1
9	$x=125$	4	$x=9$	0	$x=36$
-2	1	3	-1	2	-3

IV. ლოგარითმული განტოლების ამოხსნა (განმტკიცება)

იპოვეთ შეცდომა:

ა) $\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x-2),$

ამოხსნა

$$\begin{cases} x>0, \\ 3x-2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}.$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)\cdot\left(\log_{\frac{1}{3}} x-1\right)=0,$$

$\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=0$ ან $\log_{\frac{1}{3}} x-1=0,$

$x=1$ ან $x=\frac{1}{3}.$

პასუხი: $\frac{1}{3}$, 1. შეცდომა დაშვებულია პასუხში. მითითებულია გარეშე ფესვი – $\frac{1}{3}$. სწორი პასუხია: 1.

ბ) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2.$

ამოხსნა

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x-11>0; \end{cases} \begin{cases} x>1, \\ x>5{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow x>5{,}5.$$

$$\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2,$$

$$\lg\frac{x-1}{2x-11}=\lg 2,$$

$$\frac{x-1}{2x-11}=2,$$

$$x-1=2(2x-11),$$

$$3x=-21,$$

$$x=-7.$$

-7 არ ეკუთვნის X -ის განსაზღვრის არეს. პასუხი: ამონახსნი არა აქვს.

შეცდომა დაშვებულია განტოლების ერთი ნაწილიდან შესაკრების მეორე ნაწილში გადატანისას. სწორი პასუხია 7.

V. **დამოუკიდებელი სამუშაო**

ტესტი (მასწავლებელი მოსწავლეებს ურიგებს ბარათებს. რომელზეც მოცემული დავალებებისთვის შეთავაზებულია ამოსარჩევი პასუხები. სწორ პასუხს მოსწავლე მონიშნავს „+“ ნიშნით.

დავა-ლების №	დავალება	ა	ბ	გ	დ
1	იპოვე $y=\log_2(4x-5)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე	$\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$	$\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$	$\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$
2	ამოხსენი განტოლება $\log_3 x=-2$	ამონახსნი არა აქვს	$x=9$	$x=\frac{1}{9}$	$x=\frac{1}{3}$
3	ამოხსენი განტოლება $\lg x^2=0$	±1	-1	1	ამონახსნი არა აქვს
4	ამოხსენი განტოლება $\lg(2x-1)=\lg 5$	-2	2	ამონახსნი არა აქვს	3
5	მოცემულთაგან რომელია „ზედმეტი“?	$\log_2 0,5$	$\log_{\frac{1}{2}} 10$	$\log_{0,2}\frac{1}{3}$	$\log_{0,4} 27$

პასუხები: 1 – დ, 2 – გ, 3 – ა, 4 – დ, 5 – ა.

3) ამოხსენით განტოლება: სავ.№8 (ბ, გ)-ს და №9 (ა,ბ)-ს ხსნიან დაფაზე და რვეულებში.

VI. **რეფლექსია.**

მასწავლებელი: – რა იყო ჩვენი მიზანი?

–მივაღწიეთ მიზანს?

– რა იყო რთული? რაზე გვიწევს ყურადღების გამახვილება?

VII. **შედეგების შეჯამება**

მოსწავლეები თვითონ გაანალიზებენ და შეაფასებენ ცოდნას ლოგარითმული განტოლების ამოხსნის შესახებ.

VIII. **საშინაო დავალება** – №8, №9, №12 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $\log_2 x = -4,\ x = 2^{-4} = \dfrac{1}{16};$ ბ) $\log_3 x^2 = 4,\ x^2 = 81,\ x = \pm 9;$

გ) $\log_4(x+1) = 2, x+1 = 16, x = 15;$ დ) $\log_{\sqrt[4]{4}}(x-1) = 8,\ x-1 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^8 = 16,\ x = 17;$

ე) $\log_2(x+5) = 2,\ x+5 = 4,\ x = -1;$ ვ) $\log_2 x^2 = 0,\ x^2 = 1, x = \pm 1;$

ზ) $\log_3\left(x^3+1\right) = 2;\quad x^3+1 = 9, x = 2;$ თ) $\lg\left(x^2+19\right) = 2,\quad x^2+19 = 100, x = \pm 9.$

სავ.№2. ორი განტოლება ტოლფასია მაშინ, როცა მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლია, ამიტომ,

ა) არაა ტოლფასი; ბ) არაა ტოლფასი; გ) ტოლფასია;

დ) არაა ტოლფასი; ე) არაა ტოლფასი .

სავ.№3. ა) $\log_4(5x-2) = \log_4 x,\ \ 5x-2 = x, x = 0,5;$

ბ) $\lg x^3 = 5\lg x,\ \ 3\lg x = 5\lg x,\ \ -2\lg x = 0, \lg x = 0, x = 1;$

გ) $\lg\left(x^2+6\right) = \lg(5x),\ \ x^2+6 = 5x, x_1 = 2,\ x_2 = 3;$

დ) $\lg\left(x^2+7\right) = \lg(8x),\quad x^2+7 = 8x,\ x_1 = 1,\ x_2 = 7;$

ე) $\log_7 x = \log_7 12 + \log_7 3,\quad \log_7 x = \log_7(3\cdot 12),\ x = 36;$

ვ) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12,\quad \log_{0,3} x = 2\log_{0,3}\frac{36}{12},\quad x = 3;$

ზ) $\log_3 x = \log_3 0,5 + 2\log_3 8,\quad \log_3 x = \log_3(0,5\cdot 64),\ x = 32.$

სავ.№4. ა) $\lg(x-1)+\lg(x+1) = \lg 3,\quad \lg((x-1)(x+1)) = \lg 3,\quad x^2-1 = 3,\quad x = 2;$

ბ) $\lg(2x-5)-\lg(x+2) = \lg(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x^2-4 = 2x-5 \\ x > 2,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+1 = 0 \\ x > 2,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 2,5 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing;$

გ) $\lg x^2 + \lg(8x) = 2\lg x + 1 \Rightarrow \lg(8x) = 1 \Rightarrow x = 1,25;\ ;$

დ) $\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24) \Rightarrow \begin{cases} x(x+3) = x+24 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \left[\begin{array}{l} -6 \\ 4 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4.$

სავ.№5. ა) $\log_2\left(x^2+4x+3\right)=3 \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}-5\\ 1\end{matrix}\right.$; ბ) 3 ; გ) 5; დ) 2.

სავ.№6. ა) 1; ბ) -3 გ) 12; 18. დ) -5.

სავ.№7. ა) 4 და 0,5. ბ) 0,001 და 0,0001. გ) 1 და125.

სავ.№8. ა) $\lg(2x)+\lg(x+3)=\lg 2+\lg(6x-2) \Rightarrow 2x^2+6x=12x-4 \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}2\\ 1\end{matrix}\right.$;

ბ) $\log_5(1+x)+\log_5(2x+3)=1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}2x^2+5x-2=0\\ x>-1\end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{4}\\ x>-1\end{matrix}\right. \Rightarrow x=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{4}$;

გ) $\log_{0,2}(4x)+\log_5\left(x^2+75\right)=1 \Rightarrow x^2-20x+75=0 \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}5\\ 15\end{matrix}\right.$;

დ) $\log_2 x+\log_{0,5}(x+3)+\log_4 2=0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x^2-6x-9=0\\ x>0\end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x=3\pm3\sqrt{2}\\ x>0\end{matrix}\right. \Rightarrow x=3+3\sqrt{2}$.

სავ.№9. ა) $4^{\lg x}-6\cdot2^{\lg x}+8=0 \Rightarrow \left(2^{\lg x}\right)^2-6\cdot2^{\lg x}+8=0 \Rightarrow 2^{\lg x}=\left[\begin{matrix}2\\ 4\end{matrix}\right. \Rightarrow \lg x=\left[\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right. \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}10\\ 100\end{matrix}\right.$;

ბ) $3^{2\lg x}-4\times3^{\lg x}+3=0 \Rightarrow 3^{\lg x}=\left[\begin{matrix}3\\ 1\end{matrix}\right. \Rightarrow \lg x=\left[\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right. \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}10\\ 1\end{matrix}\right.$;

გ) $49^{\lg x}-6\times7^{\lg x}-7=0 \Rightarrow 7^{\lg x}=\left[\begin{matrix}7\\ -1\end{matrix}\right. \Rightarrow x=10$;

სავ.№10. ა) $x^{\lg x}=10000 \Rightarrow \lg x^{\lg x}=\lg 10000 \Rightarrow (\lg x)^2=4 \Rightarrow \lg x=\pm2 \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}100\\ 0,01\end{matrix}\right.$;

ბ) $x^{\lg x}=1 \Rightarrow \lg x^{\lg x}=\lg 1 \Rightarrow (\lg x)^2=0 \Rightarrow \lg x=0 \Rightarrow x=1$; ;

გ) $10x^{\lg x}=x^2 \Rightarrow \lg\left(10x^{\lg x}\right)=\lg x^2 \Rightarrow 1+(\lg x)^2=2\lg x \Rightarrow (\lg x-1)^2=0 \Rightarrow x=10$;

დ) $2^{2\lg x}=0,4x \Rightarrow \lg 2^{2\lg x}=\lg 0,4x \Rightarrow 2\lg 2\cdot\lg x=2\lg 2-1+\lg x \Rightarrow$
$(2\lg 2-1)\cdot\lg x=2\lg 2-1 \Rightarrow x=10$;

ე) $3^{4\lg x}=8,1x \Rightarrow \lg 3^{4\lg x}=\lg 8,1x \Rightarrow (4\lg 3-1)\lg x=4\lg 3-1 \Rightarrow \lg x=1 \Rightarrow x=10$.

სავ.№11. ა) $\log_3 x=1+\log_x 9 \Rightarrow \log_3 x=1+\dfrac{2}{\log_3 x} \Rightarrow \left(\log_3 x\right)^2-\log_3 x-2=0 \Rightarrow \log_3 x=\left[\begin{matrix}2\\ -1\end{matrix}\right. \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}9\\ \dfrac{1}{3}\end{matrix}\right.$;

ბ) $\log_5\left(5+2\log_2\left(x^2-4\right)^2\right)=2 \Rightarrow 5+2\log_2\left(x^2-4\right)^2=25 \Rightarrow \log_2\left(x^2-4\right)^2=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x^2-4\right)^2=2^{10} \Rightarrow x^2-4=\left[\begin{matrix}2^5\\ -2^5\end{matrix}\right. \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=\pm6$;

გ) $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x}=\dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x} \Rightarrow \dfrac{2\log_2 x}{1+\log_2 x}=\dfrac{4\left(2+\log_2 x\right)}{3\left(3+\log_2 x\right)} \Rightarrow \left(\log_2 x\right)^2+3\log_2 x-4=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2 x = \left[\begin{array}{l} -4 \\ 1 \end{array}\right. \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{16}; \\ 2 \end{array}\right.$$

დ) $5^{\lg x} + x^{\lg 5} = 10 \Rightarrow 2\cdot 5^{\lg x} = 10 \Rightarrow x = 10;$

ე) $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x = x+4 \Rightarrow x^2\cdot\frac{3}{2}\log_x 3\cdot\log_3 x = x+4 \Rightarrow 3x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=2;$

ვ) $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(\log_3 x)^4 = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_3 x = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}\right. \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 9 \\ \frac{1}{9} \end{array}\right. .$

სავ.№12. ამოხსენი უტოლობა:

ა) $x>-1$; ბ) $x\in(-1;5)$; გ) $x\in(-1;1)$; დ) $x\in(-\infty;2)\cup(8;+\infty)$; ე) $x\in(-3;-1)$;

ვ) $x\in(-\infty;-7]\cup[-0,5;3]$; ზ) $x\in(-\infty;2]\cup[2,5;+\infty)$;

ნ) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{2x-5}{(x-7)(x+1)} - \frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+2}{(x-7)(x+1)} < 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(-1;7)$

აბა, სცადე! $\log_2\left(2^{2x}+a\right) = x \Rightarrow \left(2^x\right)^2 - 2^x + a = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-4a>0 \\ a>0 \end{array}\right. \Rightarrow a\in\left(0;\frac{1}{4}\right).$

5.7 მაჩვენებლიანი უტოლობა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს მაჩვენებლიანი უტოლობის ამოხსნა.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. მაჩვენებლიანი ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის გათვალისწინებით გვექნება:

ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < 1;$ ბ) $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\sqrt{3}\right)^0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} > 1;$

გ) $(0,9)^{-\sqrt{5}} > (0,9)^0 \Rightarrow (0,9)^{-\sqrt{5}} > 1;$ დ) $\pi^{-\frac{2}{3}} < \pi^0 \Rightarrow \pi^{-\frac{2}{3}} < 1;$ ე) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} < 1.$

სავ.№2. ა) $4^x \ge 64 \Rightarrow 4^x \ge 4^3 \Rightarrow x \ge 3;$ ბ) $3^x \le 81 \Rightarrow 3^x \le 3^4 \Rightarrow x \le 4;$

გ) $25^{-x} > \frac{1}{5} \Rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^x > \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x < \frac{1}{2};$ დ) $(0,2)^{2x-4} > (0,2)^{1-x} \Rightarrow 2x-4 < 1-x \Rightarrow x < \frac{5}{3};$

ე) $(0,5)^x < \frac{1}{64} \Rightarrow (0,5)^x < (0,5)^6 \Rightarrow x > 6;$ ვ) $8^x < 16 \Rightarrow 2^{3x} < 2^4 \Rightarrow x < \frac{4}{3};$

ზ) $\frac{1}{27} > \left(\frac{1}{9}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow x > \frac{3}{2};$ თ) $2^x < 1 \Rightarrow 2^x < 2^0 \Rightarrow x < 0;$

სავ.№3. ა)უტოლობა $2^x > 2^4$ არაა ტოლფასი $x < 4$ უტოლობის, რადგან მათი ამონახსნთა სიმრავლეები განსხვავებულია ერთმანეთისგან.

ბ) $5^{x^2} > 5^x \iff x^2 > x;$ გ) $\left(\frac{1}{16}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \iff 2x < x-1.$

ამოხსენი უტოლობა№4-12:

სავ.№4. ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \Rightarrow x < -3;$

ბ) $3^{2x-1} \geq \frac{1}{9} \Rightarrow 3^{2x-1} \geq 3^{-2} \Rightarrow 2x-1 \geq -2 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2};$

გ) $(0,4)^x < 0,16 \Rightarrow (0,4)^x < (0,4)^2 \Rightarrow x > 2;$

დ) $(0,4)^{x^2-x-20} > 1 \Rightarrow (0,4)^{x^2-x-20} > (0,4)^0 \Rightarrow x^2-x-20 < 0 \Rightarrow x \in (-4;5);$

ე) $2^{2x-x^2} > 1 \Rightarrow 2^{2x-x^2} > 2^0 \Rightarrow 2x-x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0;2);$

ვ) $2^{9-x^2} < 1 \Rightarrow 2^{9-x^2} < 2^0 \Rightarrow 9-x^2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty);$

ზ) $3^{6-x} > 3^{3x-2} \Rightarrow 6-x > 3x-2 \Rightarrow x < 2;$

თ) $0,3^{x^2} \leq 0,09^{4x-6} \Leftrightarrow x^2-8x+12 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;2] \cup [6;+\infty)..$

სავ.№5. ა) R ბ) $\varnothing$; გ) $x > -1+\lg_3 2;$ დ) $x > \lg_{0,2} 3;$ ე) $x > \frac{1}{2}\lg_5 11.$

სავ.№6. ა) $x > -\frac{1}{2}$; ბ) $x \leq \frac{4}{5}$; გ) $x > \frac{7}{2}$; დ) $x > 1.$

სავ.№7. ა) $x < 3;$ ბ) R; გ) $x \leq -\frac{2}{3};$ დ) $x \geq 0,1.$

სავ.№8. ა) $16^{\frac{2x+1}{3x-7}} < 64^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-2} \Rightarrow 2^{4\cdot\frac{2x+1}{3x-7}} < 2^0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2};\frac{7}{3}\right);$

ბ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{32-2x} \Rightarrow x^2+4x-32 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty;-8) \cup (4;+\infty);$

გ) $6,3^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 6,3^0 \Rightarrow \frac{x-3}{x^2+6x+11} < 0 \Rightarrow x < 3;$

დ) $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x+2 > -\frac{2}{x} \Rightarrow \frac{x^2+2x+2}{x} > 0 \Rightarrow x > 0;$

სავ.№9. ა) $2^{x^2-5x+6} < 4^x \Rightarrow x^2-7x+6 < 0 \Rightarrow 1 < x < 6;$

ბ) $2^{x^2-6x+21} < 16^x \Rightarrow x^2-10x+21 < 0 \Rightarrow 3 < x < 7;$

გ) $(0,1)^{4x^2-2x-2} \geq 10^{2x+1} \Rightarrow 4x^2-1 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2};$

დ) $2^{x^2+2x} > 16^{1-\frac{x}{4}} \Rightarrow x^2+2x > 4-x \Rightarrow x \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty).$

სავ.№10. ა) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x < 2^{2x+6} \Rightarrow 2^{2x^2-2x} < 2^{2x+6} \Rightarrow 2x^2-2x<2x+6 \Rightarrow -1<x<3;$

ბ) $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} > 5\cdot 0,04^{x-1} \Rightarrow 5^{-x} > 5^{3-2x} \Rightarrow x>3;$

გ) $2^{-2x-2,5} < \frac{0,5^{x(x+3)}}{2^{0,5}} \Rightarrow 2^{-2x-2} < 2^{-x^2-3x} \Rightarrow -2<x<1;$

დ) $10^{x^2} < 10^{-3}\left(10^{3-x}\right)^2 \Rightarrow x^2+2x-3<0 \Rightarrow x\in(-3;1).$

სავ.№11. ა) $0,125\cdot 4^{2x-3} < \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x} \Rightarrow 2^{4x-9} < 2^{\frac{5x}{2}} \Rightarrow x<6;$

ბ) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2-5x-35} > 1,8 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2-5x-35} > \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-2} \Rightarrow 2x^2-5x-33<0 \Rightarrow x\in(-3;5,5);$

გ) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > (0,81)^x \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{-4x} \Rightarrow x^2+4x-45>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-9)\cup(5;+\infty);$

დ) $x<1$.

სავ.№12. ა) $9^x-10\cdot 3^x+9\le 0 \Rightarrow \left(3^x\right)^2-10\cdot 3^x+9\le 0 \Rightarrow 1\le 3^x\le 9 \Rightarrow 3^0\le 3^x\le 3^2 \Rightarrow 0\le x\le 2;$

ბ) $3^{2x}-5\cdot 3^x+6<0 \Rightarrow 3^{\lg_3 2}<3^x<3^1 \Rightarrow \lg_3 2<x<1;$

გ) $2^{2x}-3\cdot 2^x+2>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2^x<1\\ 2^x>2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2^x<2^0\\ 2^x>2^1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\ x>1\end{array}\right. \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

დ) $4^x<2^{x+1}+3 \Rightarrow \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-3<0 \Rightarrow \left(2^x-3\right)\left(2^x+1\right)<0 \Rightarrow 2^x<2^{\log_2 3} \Rightarrow x<\log_2 3.$

სავ.№13 . ა)

$$4\cdot 25^x+25\cdot 4^x\le 29\cdot 10^x \Rightarrow 4\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x\right)^2-29\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x+25\le 0 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^0\le\left(\frac{5}{2}\right)^x\le\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow x\in[0;2],$$

მთელი ამონახსნებია 0, 1, 2;

ბ) $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x<5\cdot 25^x \Rightarrow 2\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x-5<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-\frac{5}{2}\right)\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x+1\right)<0 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x<\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \Rightarrow x>-1.$ უტოლობის მთელ ამონახსნთა სიმრავლეა $\{0\}\cup N$.

სავ.№14. ა) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{x^2}\le\left(\sqrt{2}+1\right)^{13x+40} \Rightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{-x^2}\le\left(\sqrt{2}+1\right)^{13x+40} \Rightarrow x^2+13x+40\ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(-\infty;-8]\cup[-5;+\infty);$

ბ) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x>\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \left(4+\sqrt{15}\right)^x>\left(4+\sqrt{15}\right)^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow x>-\frac{1}{x} \Rightarrow x>0.$

სავ.№15. რომელია მეტი:

ა) $\log_2 0,6<\log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 0,6<0$, ხოლო $\log_{0,5}1=0$, ე.ი. $\log_2 0,6<\log_{05}1$;

ბ) $\log_3 6>\log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 6>1$,ხოლო $\log_6 3<\log_6 6 \Leftrightarrow \log_6 3<1$, ე.ი. $\log_3 6>\log_6 3$;

გ) $\log_3 6>\log_6 3; \lg 7\cdot\lg 2=\lg 2\cdot\lg 7 \Leftrightarrow \lg 2^{\lg 7}=\lg 7^{\lg 2} \Leftrightarrow 2^{\lg 7}=7^{\lg 2}$;

დ) $2^{\log_{0,1}2}<2^0 \Leftrightarrow 2^{\log_{0,1}2}<1.$

სავ.№16. იპოვე მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $x^2-3x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$; ბ) $(x-2)(1-x)>0 \Leftrightarrow x\in(1;2)$

გ) $\begin{cases} x-2>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$; დ) $\dfrac{x^2-4}{x+3}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+3}>0 \Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup(2;+\infty)$.

სავ.№17. ა) $\begin{cases} 2x-7<0, \\ x+2>1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3,5 \\ x>-1. \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;3,5)$; ბ) $\begin{cases} 3x+4<1, \\ 5x-8>-2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x>1,2 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$; ;

გ) $\begin{cases} 9-x<4, \\ -2x+1\ge 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5, \\ x\le -6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$; დ) $\begin{cases} 8-x^2>4 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2<4 \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x<2$;

ე) $\begin{cases} x^2-7x+10<0, \\ 5x-10>8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<5 \\ x>3,6 \end{cases} \Leftrightarrow 3,6<x<5$; ვ) $\begin{cases} 16-x^2<7 \\ 9x-8>10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>9 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>3 \end{array}\right. \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$;

ზ) $\begin{cases} x^2+2x<10 \\ 7x+23<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1<11 \\ 7x<-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2<11 \\ x<-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|<\sqrt{11} \\ x<-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{11}<x+1<\sqrt{11} \\ x<-3 \end{cases} \Leftrightarrow -1-\sqrt{11}<x<-3$;

თ) $\begin{cases} 5-x^2>1 \\ x^2-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|<2 \\ |x|\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2;-1]\cup[1;2)$.

აბა, სცადე! გალოგარითმებით მივიღებთ: $x\lg 2>(x+1)\lg 3 \Leftrightarrow x<-\dfrac{\lg 3}{\lg 1,5}\approx -2,7$. პასუხი: -3.

5.8 ლოგარითმული უტოლობა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს ლოგარითმული უტოლობის ამოხსნა.
კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $\log_3 x<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_3 x<\log_3 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<9 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<9$; ბ) $\log_3 x>3 \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>27 \end{cases} \Leftrightarrow x>27$;

გ) $x>\dfrac{1}{4}$; დ) $0<x\le\dfrac{1}{25}$; ე) $0<x\le 0,25$; ი) $x\ge 9$; კ) $x>27$;

ლ) $\lg\left(2x-7\right)<\lg3 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-7<3\\ 2x-7>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(3,5;5\right)$;   მ) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{x}{5}>1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{5}<\frac{1}{4}\\ \frac{x}{5}>0\end{cases} x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)$.

სავ.№2. ა) $x>2$;   ბ) $-1<x\le 999$;   გ) $x>7$;   დ) $10<x\le 10,01$;

ე) $x\ge 26$;   ვ) $\log_{0,2}\left(5-2x\right)>-2 \Leftrightarrow \begin{cases}5-2x<25\\ 5-2x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x<20\\ -2x>-5\end{cases} \Leftrightarrow -10<x<2,5$;

ზ) $\lg\left(2x+10\right)\le -1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+10\le 0,1\\ 2x+10>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+10\le 0,1\\ 2x+10>0\end{cases} \Leftrightarrow -5<x\le -4,95 \Leftrightarrow x\in\left(-5;-4,95\right]$.

სავ.№3. ა) $\lg\frac{x-1}{2-x}>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-x}>1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{2-x}>0 \Leftrightarrow x\in\left(1,5;2\right)$;

ბ) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1-x}{2-x}<0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{2-x}>1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2-x}>0 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in\left(2;+\infty\right)$;

გ) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3-x}{3x-1}<0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{3x-1}>1 \Leftrightarrow \frac{4-4x}{3x-1}>0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$;   დ) $x\in\left(1;3\right)$.

სავ.№4. ამოხსნაში უნდა გავითვალისწინოთ განსაზღვრის არე: $x\in\left(2;14\right)$;

$$\log_8\left(5x-10\right)<\log_8\left(14-x\right),$$
$$5x-10<14-x$$
$$6x<24,$$
$$x<4.$$

პასუხი იქნება არა $x\in\left(-\infty;\ 4\right)$, არამედ $x\in\left(2;4\right)$.

სავ.№5. ამოხსნაში განსაზღვრის არე არასწორადაა მოთხოვნილი, უნდა იყოს:

$\log_3\left(x+2\right)+\log_3 x\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x+2>0\\ x>0\\ x\left(x+2\right)\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-2,\\ x>0,\\ -3\le x\le 1.\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le 1.$ პასუხი: $0<x\le 1$.

სავ.№6. ა) $x>8$;   ბ) $2<x<6,5$;   გ) $x<-37$;   დ) $0<x<2$;

ზ) $\log_{0,3}\left(3-x\right)\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x<3\\ x\ge 2,7\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[2,7;3\right)$;   თ) $\lg x\le \lg34+\lg2 \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\le 68\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(0;68\right]$;

ი) $\log_{0,4}\left(x-4\right)<-1 \Leftrightarrow x-4>2,5 \Leftrightarrow x>6,5 \Leftrightarrow x\in\left(6,5;+\infty\right)$.

სავ.№7. ა) $\log_{0,5}\left(x-2\right)\ge \log_{0,5}\left(2x-12\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x-2>0\\ x-2\le 2x-12\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[10;+\infty\right)$;

ბ) $\log_{\frac{2}{7}}\left(4-7x\right)\ge \log_{\frac{2}{7}}x \Leftrightarrow \begin{cases}4-7x>0\\ 4-7x\le x\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[0,5;\frac{4}{7}\right)$;

გ) $\lg\left(2x-3\right)>\lg\left(x+1\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x+1>0\\ 2x-3>x+1\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(4;+\infty\right)$.

ე) $\log_{0,2}(3-8x)<\log_{0,2}x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 3-8x>x \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{3}\right).$

სავ.№8. ა) $\log_3\left(12-2x-x^2\right)>2 \Leftrightarrow 12-2x-x^2>9 \Leftrightarrow x\in(-3;1);$

ბ) $\log_3\left(12-2x-x^2\right)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} 12-2x-x^2<9, \\ 12-2x-x^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-1-\sqrt{13};-3\right)\cup\left(1;-1+\sqrt{13}\right);$

გ) $\log_{\frac{5}{8}}\left(2x^2-x-\frac{3}{8}\right)>1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-\frac{3}{8}>0 \\ 2x^2-x-\frac{3}{8}<\frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2-8x-3>0 \\ 2x^2-x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-0,25)\cup(0,75;+\infty) \\ x\in(-0,5;1) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-0,5;-0,25)\cup(0,75;1);$

სავ.№9. ა) $\log_5(3x+1)+\log_5(3x-1)\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \\ 9x^2-1\le 25 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{26}}{3}\right];$

ბ) $\log_2(x+2)+\log_2(x-5)\ge 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5>0 \\ x^2-3x-10\ge 8 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(6;+\infty);$

გ) $\log_3 3+\log_3 x<\log_3\left(x^3-x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x>3x \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-2;0)\cup(2;+\infty) \\ x\in(0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(2;+\infty);$

დ) $\log_{20}x+\log_{20}(x+1)\le\log_{20}(2x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \\ x^2+x\le 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;3].$

სავ.№10. ა) $\log_3^2 x>4 \Leftrightarrow \left|\log_3 x\right|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x>2 \\ \log_3 x<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>9 \\ \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{1}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty);$

ბ) $\log_3^2 x<4 \Leftrightarrow \left|\log_3 x\right|<2 \Leftrightarrow -2<\log_3 x<2 \Leftrightarrow \log_3\frac{1}{9}<\log_3 x<\log_3 9 \Leftrightarrow \frac{1}{9}<x<9 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{9};9\right);$

გ) $\lg^2 x+\lg x^2>3 \Leftrightarrow \lg^2 x+2\lg x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x<-3 \\ \lg x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(0;0,001)\cup(10;+\infty);$

დ) $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\le 0 \Leftrightarrow 1\le\log_2 x\le 4 \Leftrightarrow \log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 16 \Leftrightarrow 2\le x\le 16 \Leftrightarrow x\in[2;16].$

სავ.№11. ა) $\log_2\frac{2x+6}{x+2}>1 \Leftrightarrow \frac{2x+6}{x+2}>2 \Leftrightarrow \frac{2}{x+2}>0 \Leftrightarrow x+2>0 \Leftrightarrow x>-2;$

ბ) $\log_6\frac{x+1}{x+4}>0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+4}>1 \Leftrightarrow \frac{-3}{x+4}>0 \Leftrightarrow x+4<0 \Leftrightarrow x<-4;$

გ) $\log_{0,(3)}\log_2\dfrac{2x-3}{x+2}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+2}>0\\ \log_2\dfrac{2x-3}{x+2}>1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x+2}>2 \Leftrightarrow \dfrac{-7}{x+2}>0 \Leftrightarrow x<-2;$

დ) $\log_{0,2}\log_3\dfrac{x-1}{x+4}<0 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{x-1}{x+4}>1 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+4}>3 \Leftrightarrow x\in\left(-6,5;-4\right).$

სავ.№12. ა)

$$\log_3\log_{0,2}\log_{32}\frac{x-1}{x+5}>0 \Leftrightarrow \log_{0,2}\log_{32}\frac{x-1}{x+5}>1 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{32}\dfrac{x-1}{x+5}<\dfrac{1}{5}\\ \log_{32}\dfrac{x-1}{x+5}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-1}{x+5}<2\\ \dfrac{x-1}{x+5}>1\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-11\right);$$

ბ) $\lg 10^{\lg\left(x^2+21\right)}>\lg 10+\dfrac{1}{\lg^{-1}x} \Leftrightarrow \lg\left(x^2+21\right)>\lg\left(10x\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x^2+21>10x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left(0;+\infty\right)\\ x\in\left(-\infty;3\right)\cup\left(7;+\infty\right)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left(0;3\right)\cup\left(7;+\infty\right);$

გ) $\dfrac{\log_2 4x}{\log_2 x\cdot\log_2 2x}>1 \Leftrightarrow \dfrac{2+\log_2 x}{\log_2 x\cdot\left(1+\log_2 x\right)}>1 \Leftrightarrow \dfrac{2-\left(\log_2 x\right)^2}{\log_2 x\cdot\left(1+\log_2 x\right)}>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}<\log_2 x<-1\\ 0<\log_2 x<\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(2^{-\sqrt{2}};0,5\right)\cup\left(1;2^{\sqrt{2}}\right);$$

დ) $\log_{\sqrt[8]{16}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(x+2\right)\right)\geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases}x+2\leq\dfrac{1}{16}\\ x+2>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-2;-\dfrac{31}{16}\right];$

ე) $1+\log_{0,5}\left(3x^2+2\right)>\log_2\dfrac{2}{2x^2+5} \Leftrightarrow \log_{0,5}\left(3x^2+2\right)>\log_{0,5}\left(2x^2+5\right) \Leftrightarrow \left(3x^2+2\right)<\left(2x^2+5\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right);$

ვ) $\log_2\sqrt{x}-2\log_{0,25}^2 x+1>0 \Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2-\log_2 x-2<0 \Leftrightarrow -1<\log_2 x<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{1}{2}<\log_2 x<\log_2 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<4.$

ტესტი № 12

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- ლოგარითმული ფუნქცია და მისი თვისებები;
- ლოგარითმული გამოსახულების გამარტივება;
- ლოგარითმული განტოლება და უტოლობა.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
პასუხი	ბ)	ბ)	დ)	ა)	გ)	დ)	1	-42	$x \in (-\infty;-5) \cup (0;2)$;	$x \in (1;3)$.

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული ცნებები, ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	კარგად ფლობს მათემატიკურ ენას. ეფექტურად იყენებს ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების	არ ესმის არც ლოგარითმული ფუნქციის, მისი თვისებების,	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერ-	ესმის საკითხთან დაკავშირებული ცნებებისა და დებულებების არსი,	ღრმად ესმის ლოგარითმთან და მის თვისებებთან დაკავშირებული

გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირე-ბულობა და დასაბუთება	არც განტოლე-ბისა თუ უტო-ლობის არსი და ვერ განსაზ-ღვრავს გამოყე-ნების არეალს. • ვერ ახერხებს ლოგარითმის შემცველი გამოსახულების გამარტივებას.	ხებს განსაზღვროს გამოყენების არე-ალი. ნაწილობრივ იცის ლოგარით-მული ფუნქციის თვისებები, მაგრამ ხსნის მაგალითე-ბის მცირე ნაწილს.	ახდენს მათ ინტერ-პრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრა-ტეგიას და სწორად იყენებს. მაგალითებს ხსნის არამკაცრი და ნაწი-ლობრივი დასაბუ-თებით.	ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაც-რად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართე-ბების დად-გენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	ლოგარითმული ფუნქციის ფუნ-ქციების თვისე-ბების არცოდ-ნის გამო ვერ ადგენს კავში-რებს სხვა სტრუქტურებ-თან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნა-რი.	ახერხებს სხვა სტრუქტურებთან კავშირების დად-გენას. აქვს ანა-ლიზისა და სინთე-ზის უნარი, საჭი-როებს ცოდნის გაღრმავებას ლოგარითმული ფუნქციის თვისე-ბების შესახებ.	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებ-თან და ობიექტებ-თან. ნაწილობრივ ახერხებს მიღებუ-ლი შედეგების გან-ზოგადებასა და ანა-ლიზს.	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტუ-რებთან და ობიექ-ტებთან. შეუძლია მიღებული შედე-გების განზოგა-დება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

თავი 6. ვექტორები

თავის მიზანია, მოსწავლემ შეძლოს:

- წერტილის კოორდინატების დადგენა და წერტილის პოვნა მისი კოორდინატებით, როგორც ორ, ისე სამგანზომილებიან შემთხვევაში;
- ორ და სამგანზომილებიან ვეტორებზე წრფივი მოქმედებების შესრულება და გრაფიკული გამოსახვა;
- ვექტორის კოორდინატების დადგენა და ვექტორის ამოცნობა მისი კოორდინატებით;
- ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების დადგენა;
- ვექტორების სკალარული ნამრავლის გამოთვლა ვექტორების სიგრძითა და მათ შორის კუთხით ან/და ვექტორების კოორდინატებით;
- ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა მათი კოორდინატების მიხედვით;

- კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორების ამოცნობა;
- ვექტორების წარმოდგენა არაკოლინეარული (ორი განზომილების შემთხვევაში)და არაკომპლანარული (სამი განზომილების შემთხვევაში) ვექტორების საშუალებით;
- კოორდინატებით მოცემული ვექტორის ორტებით წარმოდგენა და ორტებით წარმოდგენილი ვექტორის კოორდინატების დადგენა;
- ვექტორული სიდიდეების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.

- **თემა –**მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები
- **სამიზნე ცნება –** ფუნქცია. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები **(შედეგი მათ.საშ. 2, საშ.3)**
- **ქვეცნება –** მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები;
- **საკითხი –**დემოგრაფიული პროცესების მოდელირება მაჩვენებლიანი და ლოგარით-მული ფუნქციების გამოყენებით.
    - **ქვესაკითხი –**რთული პროცენტის ფორმულა ცვლადი ხარისხის მაჩვენებლით.

მატრიცა

თემა - ვექტორები **სამიზნე ცნება –** გეომეტრიული გარდაქმნები **(შედეგი მათ.საშ.5)** **ქვეცნება** - ვექტორი, ვექტორის კოორდინატები; **საკითხი –** ვექტორები სიბრტყეზე და სივრცეში, დაგეგმარება ვექტორებით. **ქვესაკითხი:** ვექტორებისა და ვექტორული ოპერაციების გამოსახვა კოორდინატებში.		
საკვანძო შეკითხვა – როგორ გამოვიყენოთ ვექტორები მარშრუტის დაგეგმვაში?		
სამიზნე ცნებასთან//ცნე-ბებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები მოსწავლემ უნდა გააც-ნობიეროს, რომ:	**შეფასების კრიტერიუმი** მოსწავლეს შეუძლია:	ნაშრომში/ნაშრომში პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინეთ:
ვექტორი 1. მიმართულების მქონე მონაკვეთი, ვექტორი, გრაფიკულად ისრით გამოისახება, რომლის სიგრძე ვექტორის სიგრძეა,	• ვექტორის ამოცნობა და გამოსახვა, ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების დადგენა**(მკვ.წ.1);** • ვექტორის კოორდინატების დადგენა და ვექტორის წარმოდგენა მისი კო-ორდინატებით, როგორც ორ,	• რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში; • რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;

ხოლო მიმართულება - ვექტორის მიმართულება. 2. საკოორდინატო სიბრტყესა და საკოორ-დინატო სივრცეში მოცემულ ვექტორს გააჩნია კოორდინატები (რიცხვთა წყვილი სიბრტყის და რიც-ხვთა სამეული სივრცის შემთხვევაში). 3. ვექტორებისთვის განი-მარტება შეკრების, რიცხვზე ნამრავლის, ვექტორებზე სკალარული და ვექ-ტორული ნამრავლის მოქმედებები. 4. სიბრტყის შემთხვევაში ორი არაკოლინეარული ვექტორით, ხოლო სივრცის შემთხვევაში სამი არაკომპ-ლანარული ვექტორით შეგვიძლია ვექტორების წარმოდგება. 5. ვექტორები მათემატიკის გარდა გამოიყენება ფიზი-კასა და სხვადასხვა პრაქ-ტიკულ საქმიანობაში.	ისე სამგანზომილებიან შემთხვევაში **(მკვ.წ.2)**; • ორ და სამ განზომილებიან ვეტორებზე წრფივი მოქმედებების შესრულება და გრაფიკული გამოსახვა **(მკვ.წ.3)**; • ვექტორების სკალარული ნამრავლის გამოთვლა ვექტორების სიგრძითა და მათ შორის კუთხით ან/და ვექტორების კოორდინატე-ბით **(მკვ.წ.3)**; • ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა მათი კოორდი-ნატების მიხედვით **(მკვ.წ.3)**; • კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორების ამოცნობა **(მკვ.წ.4)**;; • ვექტორიების წარმოდგენა არაკოლინეარული (ორი განზომილების შემთხვევაში) და არაკომპლანარული (სამი განზომილების შემთხვევაში) ვექტორების საშუალებით **(მკვ.წ.4)** ; • კოორდინატებით მოცემული ვექტორის ორტებით წარმოდგენა და ორტებით წარმოდგენილი ვექტორის კოორდინატების დადგენა **(მკვ.წ.4)**; • ვექტორული სიდიდეების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება **(მკვ.წ.5)**;.	• როგორ დაადგინე პუნქტების კოორდი-ნატები; • როგორ გამოთვალე მანძილები პუნქტებს შორის; • როგორ დაადგინე კუთხეები მიმართუ-ლებებს შორის; • რა ნიშნით შეარჩიე პუნქტები ტურისტუ-ლი (ან სხვა დანიშნუ-ლების) მარშრუტი-სთვის; • როგორ დაადგინე შერჩეული პუნქტების კოორდინატები; • რა ტექნიკური სა-შუალებები გამოიყე-ნე საჭირო ზომების დასადგენად და გა-მოთვლების საწარ-მოებლად; • ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და შენ მიერ შერჩეუ-ლი პუნქტების ფოტო-ები.
კომპლექსური დავალება **„დაგეგმარება ვექტორებით“**		

შენთვის კარგადაა ცნობილი, რა დიდი გამოყენება აქვს ვექტორებს ფიზიკაში. ფიზიკაში განხილული სიდიდეების დიდი ნაწილი ხომ ვექტორული სიდიდეებია. მაგრამ ვექტორებს ბევრ სხვა პრაქტიკულ საქმიანობაშიც ვიყენებთ. ერთ-ერთი ასეთია სახმელეთო, საზღვაო და საჰაერო მარშრუტების დაგეგმარება.

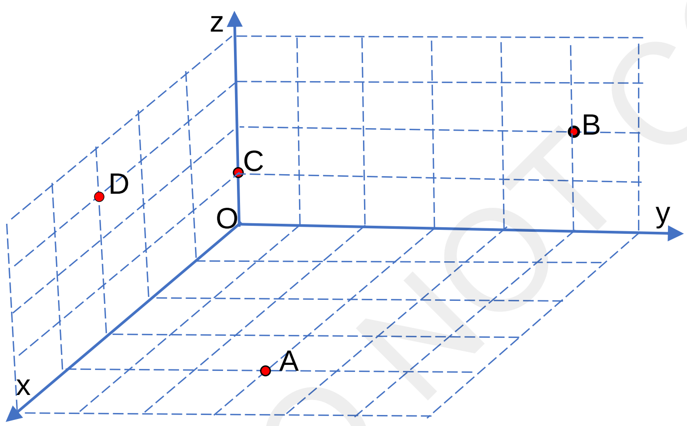
1-ელ ნახაზზე საჰაერო მარშრუტის ერთი სქემაა წარმოდგენილი.

სქემაზე მოცემულია სივრცული (სამგანზომილებიანი) მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელზეც წერტილების სახით დატანილია დასახლებული პუნქტები. A პუნქტი რაიონული ცენტრია, B, C და D – რაიონის მაღალმთიანი სოფლები. რაიონული ცენტრი მიჩნეულია ნულოვან დონედ, ხოლო სოფლები ამ დონიდან სხვადასხვა სიმაღლეზე მდებარეობს. ერთეულის ზომად აღებულია 1კმ.

ვერტმფრენი ყოველკვირეულად ახორციელებს წრიულ ფრენას რაიონული ცენტრიდან ოთხივე სოფლის მიმართულებით.

შენი დავალებაა:

1. მოცემული სქემის ანალიზი



ა) სქემის მიხედვით დაადგინე ოთხივე პუნქტის კოორდინატები;
ბ) დაადგინე მანძილები მოცემულ პუნქტებს შორის;
გ) დაადგინე კუთხეები $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის;
დ) გაარკვიე, არის თუ არა მოცემული ოთხი პუნქტი ერთ სიბრტყეში;
ე) გაარკვიე, A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ მიმავალმა ვერტმფრენმა რა კუთხით უნდა იფრინოს აღმოსავლეთ მიმართულებასთან (OX ღერძი გვიჩვენებს სამხრეთ მიმართულებას);
ვ) გაარკვიე, რა თანმიმდევრობით უნდა მოიაროს ვერტმფრენმა სოფლები, რათა უმცირესი მანძილი დაფაროს;
ზ) შეადგინე მარშრუტის ვექტორული სქემა მანძილებისა და კუთხეების მითითებით.

2. რეალური სქემის შედგენა

ა) შენი საცხოვრებლის მახლობლად (ან შენთვის მისაღებ სხვა ლოკაციაში) შეარჩიე 3-4 პუნქტი და შეადგინე ტურისტული მარშრუტის (ან სხვა დანიშნულების) სქემა;

ბ) ააგე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (სასურველია, სამგანზომილებიანი);

გ) დაიტანე შერჩეული პუნქტები და მიუთითე მათი კოორდინატები. მიმართულება და მანძილი გამოსახე ვექტორების საშუალებით;

დ) მიუთითე გადაადგილების თანმიმდევრობა და კუთხეები მიმართულებათა შორის.

3. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ დაადგინე პუნქტების კოორდინატები;
- როგორ გამოთვალე მანძილები პუნქტებს შორის;
- როგორ დაადგინე კუთხეები მიმართულებათა შორის;
- რა ნიშნით შეარჩიე პუნქტები ტურისტული (ან სხვა დანიშნულების) მარშრუტისთვის;
- როგორ დაადგინე შერჩეული პუნქტების კოორდინატები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად;
- ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და შენ მიერ შერჩეული პუნქტების ფოტოები.

კომპლექსური დავალების განხორციელების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები, შეკითხვები)

ეტაპი I – კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა

რესურსები/განსახილველი ქეისები:

- **რესურსი 1**. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს მე-6 თავი;
- **რესურსი 2.** კალკულატორი;
- **რესურსი 3.** ხანის აკადემია;
- **რესურსი 4.** კუთხისა და მანძილის საზომი ხელსაწყოები.

კომპლექსური დავალების პირობის გააზრებაზე ორიენტირებული შეკითხვები:

- რა საერთო აქვთ და რით განსხვავდებიან ორ და სამგანზომილებიანი ვექტორები.
- როგორ უნდა გამოთვალო მოცემული ვექტორის კოორდინატები მისი საწყისი და ბოლო წერტილის კოორდინატებით?
- კომპლექსურ დავალებაში მოცემულ ნახაზებზე დაკვირვებით რა სიდიდეების ცოდნა არის აუცილებელი საჭირო მანძილების დასადგენად?
- რა სახის ფაქტების ცოდნა დაგეხმარება ამოცანების გადაწყვეტაში?
- როგორ ფიქრობ, საკმარისია თუ არა ვექტორთა კოორდინატების ცოდნა მათ შორის კუთხის დასადგენად?
- რა მარშრუტის გეგმის შედგენას ისურვებდი ვექტორების გამოყენებით?
- რა ტექნოლოგიური საშუალებებს გამოიყენებ?
- როგორ ფიქრობ, პრაქტიკული თვალსაზრისით რამდენად გამოყენებადი იქნება შენ მიერ შედგენილი ვექტორული სქემა?

ქვესაკითხი - **კომპლექსური დავალება**

- შენი სიტყვებით ჩამოაყალიბე, რას შეეხება დღეს მოცემული დავალება, რომელზეც რამდენიმე გაკვეთილის განმავლობაში უნდა იმუშავო.
- მსგავსი ფორმის, ან შინაარსის დავალება სხვა დროს თუ შეგისრულებია?

ეტაპი II – კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა

ქვეცნებები -

- კოორდინატები სივრცეში (პარ. 6.4);
- ვექტორის კოორდინატები (პარ. 6.2, 6.5);
- ვექტორის სიგრძე (პარ. 6.1);
- კუთხე ორ ვექტორს შორის (პარ. 6.2);
- კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორები (პარ. 6.1, 6.5).

ქვესაკითხები -

- წრფივი მოქმედებები ვექტორებზე (პარ. 6.1, 6.5);
- ვექტორების სკალარული ნამრავლი (პარ. 6.2, 6.5).

ნაბიჯი 1.

1-ელი დავალების შესრულება;

მოცემული სქემის ანალიზი.

მოვიყვანოთ 1-ელი დავალების შესრულების ნიმუში:

ა) სქემის მიხედვით პუნქტების კოორდინატებია: A(4;3;0), B(0;5;2), C(0;0;1), D(3;0;3).

ბ) პუნქტებს შორის მანძილებია:

$AB=\sqrt{24}\approx 4,9$ კმ; $AC=\sqrt{26}\approx 5,1$კმ; $AD=\sqrt{19}\approx 4,36$ კმ;

$BC=\sqrt{26}\approx 5,1$კმ; $BD=\sqrt{35}\approx 5,9$; $CD=\sqrt{13}\approx 3,6$ კმ;

გ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორებს შორის კუთხეა დაახლოებით $118°$, რაც ნიშნავს, რომ $\angle ABC\approx 62°$; $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის კუთხეა დაახლოებით $40°$, რაც ნიშნავს, რომ $\angle DAC\approx 40°$;

შენიშვნა: მოსწავლეებს შევახსენოთ, რომ ორ ვექტორს შორის კუთხე არის ის კუთხე, რომელსაც ეს ვექტორები ქმნიან ერთ წერტილში მოდების შემდეგ. მაგალითად, $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორებს შორის კუთხე ABC კუთხის მოსაზღვრე კუთხეა და არა ABC კუთხე. თუ ABC კუთხის ზომა გვაინტერესებს, $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების

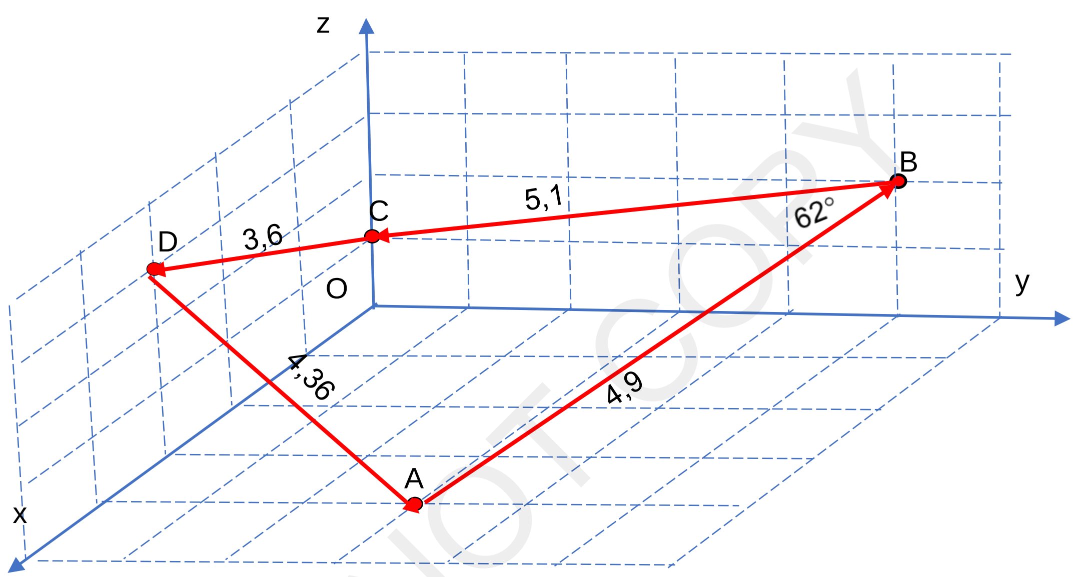
კოორდინატებით უნდა ვისარგებლოთ.

დ) ნახაზიდან ჩანს, რომ A წერტილი არაა BCD სამკუთხედის სიბრტყეში;

ე) აღმოსავლეთ მიმართულებას გვიჩვენებს OY ღერძი, ანუ $\vec{j}$ (0;1;0) ორტი. AB ვექტორთან კუთხე იქნება დაახლოებით 67° ;

ვ) უმოკლესი მარშრუტი, როგორც ჩანს, არის $A \to B \to C \to D \to A$ (მოსწავლეებმა სცადონ სხვადასხვა ვარიანტი);

ზ) მარშრუტის ვექტორულ სქემაზე უნდა მიეთითოს ვექტორები, მათი სიგრძე და



კუთხეები (ნახაზზე ნიმუშის სახით მითითებულია კუთხე BA და BC ვექტორებს შორის.)

პირველ დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- როგორ გამოთვალე პუნქტებს შორის მანძილები?
- როგორ გამოთვალე ვექტორებს შორის კუთხე?
- რა კავშირია $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორებს შორის კუთხესა და ABC კუთხეს შორის?
- როგორ დაადგინე კუთხე აღმოსავლეთ მიმართულებასთან??
- როგორ დაადგინე კუთხეები მიმართულებებს შორის?
- როგორ დაადგინე უმოკლესი მარშრუტი?

ნაბიჯი 2. მეორე დავალებაზე მუშაობა

- რა ლოკაცია და რა პუნქტები შეარჩიე მარშრუტის დასაგეგმად?
- როგორ შეუთავსე შერჩეულ ლოკაციას კოორდინატთა სისტემა?
- როგორი კოორდინატთა სისტემა ამჯობინე ორგანზომილებიანი თუ სამგანზომილებიანი? რატომ?
- როგორ დაადგინე პუნქტების კოორდინატები და მანძილები პუნქტებს შორის?

- როგორ გამოთვალე კუთხეები?

შენიშვნა 1. შესაძლებელია მოსწავლემ ოთახში პუნქტებად განალაგოს სხვადასხვა საგნები და მათ შორის დაგეგმოს მარშრუტი.

ნაბიჯი 3. ნაშრომის საპრეზენტაციოდ მომზადება

პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ დაადგინე პუნქტების კოორდინატები;
- როგორ გამოთვალე მანძილები პუნქტებს შორის;
- როგორ დაადგინე კუთხეები მიმართულობებს შორის;
- რა ნიშნით შეარჩიე პუნქტები ტურისტული (ან სხვა დანიშნულების) მარშრუტისთვის;
- როგორ დაადგინე შერჩეული პუნქტების კოორდინატები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად;
- ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და შენ მიერ შერჩეული პუნქტების ფოტოები.

6.1 ვექტორები სიბრტყეზე

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- თანამიმართული, საწინააღმდეგოდ მიმართული, კოლინეალური, არაკოლინეალური, ტოლი, მოპირდაპირე ვექტორების ამოცნობა და დახაზვა;
- ვექტორების შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესის დემონსტრირება;
- ვექტორის რიცხვზე გამრავლების განმარტება და დემონსტრირება;
- ვექტორის არაკოლინეალური ვექტორების ჯამად წარმოდგენა.

შენიშვნა. ამ და მომდევნო პარაგრაფში გადმოცემული მასალით, მე-9 კლასში განვლილი საკითხების გამეორებას ვისახავთ მიზნად.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. $\overrightarrow{BA}$. **სავ.№2.** ა)4; ბ)8. **სავ.№ 3.** ბ). **სავ.№4.** გ).

სავ.№5. ა)$\overrightarrow{DC}$; ბ) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$; გ) $\overrightarrow{AC}$; დ)$\overrightarrow{DB}$; ე) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{CB}$.
სავ.№6. ბ); ე). **სავ.№7.** გ) . **სავ.№8.** პარალელოგრამი. **სავ.№9.** ტრაპეცია.

სავ.№10. დ). **სავ.№11.** $4\vec{a}$. **სავ.№12.** $7\vec{a}+16\vec{b}$.

სავ.№13. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}.$

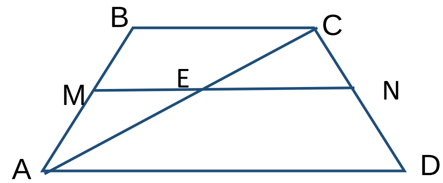
სავ.№14. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}.$

სავ.№15. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}.$

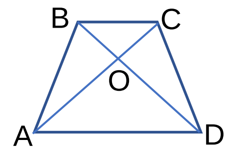
სავ.№16. $\sqrt{336}$ ნიუტონი.

სავ.№17. 90°.

სავ.№18. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$.



სავ.№22. რადგან $\triangle BOC$ და $\triangle DOA$ მსგავსი სამკუთხედებია, ამიტომ $OA=2OC$, ხოლო



$$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

სავ.№23. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{13}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{8}{13}\cdot\overrightarrow{AB}$.

სავ.№24. $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{BC}$.

სავ.№25. $\overrightarrow{MB}=-2\cdot\overrightarrow{MT}=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)=-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$, საიდანაც $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$.

სავ.№27. $2\sqrt{13}$. **სავ.№28.** $(-3;-4)$. **სავ.№29.** 13. **სავ.№30.** ა) 5; ბ) (-2;-5), (-3,-4).

6.2 ვექტორის კოორდინატები

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- ვექტორის კოორდინატების განმარტება და ნახაზზე ჩვენება;
- ვექტორის კოორდინატების მისი საწყისი და წვეროს კოორდინატების მიხედვით გამოთვლა; ვექტორებზე წრფივი მოქმედების კოორდინატებში ჩაწერა;
- ვექტორის სიგრძის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით;
- ვექტორის წარმოდგენა ორტების ჯამად კოორდინატების საშუალებით;
- ვექტორებს შორის კუთხის პოვნა საკოორდინატო სიბრტყის დახმარებით.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№2. ა) $(7;3)$; ბ) $(6;8)$; გ) $(1;2,9)$; დ) $\left(-\sqrt{2};-2\right)$.

სავ.№3. ა)5; ბ) 13; გ) $\sqrt{10}$; დ) 2.

სავ.№4. ა)5; ბ) 5; გ) $3\sqrt{2}$; დ) 17; ე) 17; ვ) 1; ზ) 2.

სავ.№5. ა) $2\vec{i}+2\vec{j}$; ბ) $3\vec{i}+2\vec{j}$; გ) $-2\vec{i}+3\vec{j}$; დ) $-\vec{i}+4\vec{j}$; ე) $\vec{i}-4\vec{j}$; ვ) $5\vec{j}$; ზ) $5\vec{i}$.

სავ.№6. ა) $(3;5)$; ბ) $(3;-5)$; გ) $(-3;-5)$; დ) $(0;5)$; ე) $(3;0)$; ვ) $(1;-1)$; ზ) $(1;1)$.

სავ.№7. ა)5; ბ)13; გ) 5; დ) 7; ე) 5;` ვ) $\sqrt{2}$; ზ) $\sqrt{2}$.

სავ.№8. ა) $(-7;9)$; ბ) $(14;-18)$; გ) $(-21;27)$.

სავ.№9. ა) $2\vec{a}+3\vec{b}=(12;-18)+(-12;18)=\vec{0}=(0;0)$;

ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}=(-1;2)+(-3;1,5)=(-4;3,5)$; გ) $6\vec{i}-15\vec{j}=(6;-15)$; დ) $(16;9)$.

სავ.№10. $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}=3(-3;1)-2(4,5;-0,5)=(-9;3)+(-9;1)=(-18;4)$.

სავ.№11. ა) 5; ბ) 13; გ) 2; დ) $\sqrt{113}$. **12.** $\sqrt{313}$. **13.** ± 6. **14.** ± 8.

სავ.№15. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=(-1;-1)+(1;-1)=(0;-2)$.

სავ.№16. ვექტორები მოვდოთ კოორდინატთა სათავეში. ვექტორების მიმართულებებს შორის კუთხე იგივე აბსცისათა ღერძსა და პირველი მეოთხედის ბისექტრისას შორის კუთხეა, ანუ 45^o.

სავ.№17. ა) 135^o; ბ) 135^o; გ) 15^o.

სავ.№18. ა) 45^o; ბ) 135^o; გ) 30^o; დ) 60^o; ე) 120^o); ვ) 30^o.

სავ.№19. ა) $\uparrow\uparrow$; გ) $\uparrow\downarrow$. **სავ.№20.** ა) 4; ბ) -4.

სავ.№21. ვექტორის სიგრძეა $x^2-4x+4+16-8x+x^2=2(x^2-6x+9)+2=2+2(x-3)^2$, რომელიც უმცირესია მაშინ, როცა $x=3$.

სავ.№22. ა) $k=4$, $\vec{a}=(12;16)$; ბ) $k=-2$, $\vec{a}=(-12;16)$. .

სავ.№23. $3\vec{a}=(1;-4)+(8;-12)=(9;-16)$, საიდანაც $\vec{a}=\left(3;-\dfrac{16}{3}\right)$.

სავ.№24. $\overrightarrow{OK}=\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$, საიდანაც $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=(0;-1)$.

სავ.№25. $(4;-9)=(2\alpha+5\beta;\alpha-3\beta)$, მაშინ გვაქვს: $\alpha=-3$, $\beta=2$, ე.ი. $\vec{a}=-3\vec{b}+2\vec{c}$.

სავ.№26. ა) $\dfrac{\pi}{2}$; ბ) 0; გ) π; დ) $\dfrac{\pi}{3}$; ე) $\dfrac{2\pi}{3}$; ვ) $\dfrac{3\pi}{4}$.

სავ.№27. ა) $\dfrac{1}{9}$; ბ) 0; გ) $-\dfrac{1}{5}$.

სავ.№28. ა) ბლაგვკუთხა; ბ) მართკუთხა; გ) მახვილკუთხა.

6.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი
პირველი გაკვეთილი

მიზანი:

- ვექტორების სკალარული ნამრავლის ცნების შემოტანა;
- ვექტორების სკალარული ნამრავლის თვისებების გაცნობა;
- ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდის დადგენა;
- ვექტორების სკალარული ნამრავლის გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.

გაკვეთილის მსვლელობა

I.ორგანიზაციული მომენტი

II.წინარე ცოდნის გააქტიურება

კითხვებზე პასუხი (ზეპირი სამუშაო)

1) რა არის ვექტორი? (მიმართული მონაკვეთი, რომელსაც აქვს საწყისი და ბოლო ----.)

2) რა არის ნულოვანი ვექტორი? (ვექტორი, რომლის საწყისი ----- ემთხვევა ბოლოს ----.)

3) რა არის $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე? (AB მონაკვეთის სიგრძე.)

4) რას უდრის ნულოვანი ვექტორის სიგრძე? (0-ს)

5) როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეალური? (ვექტორებს, რომელიც პარალელურ წრფეებზე ან ერთ წრფეზე მდებარეობენ.)

6) როგორ ვექტორებს ჰქვია თანამიმართული? (ვექტორებს, რომელთაც ერთნაირი მიმართულება აქვს.)

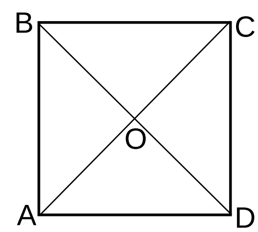
7) როგორ ვექტორებს ჰქვია საწინააღმდეგოდ მიმართული? (საწინააღმდეგოდ მიმართულ კოლინეალურ ვექტორებს.)

8) როგორ ვიპოვოთ ვექტორის კოორდინატები? (ვექტორის წვეროს კოორდინატებს უნდა გამოვაკლოთ ვექტორის საწყისი წერტილის კოორდინატები. თუ გვაქვს $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

9) რას მივიღებთ ვექტორების შეკრებით? გამოკლებით? (შედეგად მივიღებთ ვექტორს.)

10) რას წარმოადგენს ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი? (საწყისი ვექტორის კოლინეალურ ვექტორს.)

11) მოცემულია $ABCD$ კვადრატი, O წერტილი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. დაასახელეთ კუთხე: ა) $\overrightarrow{CD}$ და $\overrightarrow{CA}$; ბ) $\overrightarrow{AO}$ და $\overrightarrow{OA}$; გ) $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BD}$; დ) $\overrightarrow{AO}$ და $\overrightarrow{CO}$ ე) $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{DB}$ ვექტორებს შორის.



III. თემის გაცნობა, ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი: – დღეს უნდა გავეცნოთ ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეების ნამრავლს მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსზე.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს ასე აღვნიშნავთ: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. თუ α მათ შორის კუთხეა, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha$.

მასწავლებელი: – წაიკითხეთ 1-ელი სავარჯიშო. როგორ გამოთვლით $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს?

გამოჰყავს დაფასთან ერთ-ერთი მსურველი, რომელიც მსჯელობს (ვინაიდან თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 0°-ის ტოლია, ხოლო 0°-იანი კუთხის კოსინუსი 1-ის ტოლი, ამიტომ მოცემულ შემთხვევაში $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი იქნება მათი სიგრძეების ნამრავლის ტოლი.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha = 3\cdot 4\cdot\cos 0^\circ = 3\cdot 4 = 12.$$

გავეცნოთ სკალარული ნამრავლის ძირითად თვისებებს ნებისმიერი $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ვექტორებისა და k რიცხვისათვის (მასწავლებელი ფორმულებს წერს დაფაზე, ხოლო მოსწავლეები სიტყვიერად აყალიბებენ თვისებებს):

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

3) $k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(k\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\right)^2=a^2.$, ამასთან $\vec{a}^{\,2}>0$, როცა $\vec{a}\neq\vec{0}$

IV. განმტკიცება, ამოცანების ამოხსნა

ხსნიან №3 სავარჯიშოს ა), გ) და დ) დავალებებს.

დაფასთან გამოსული მოსწავლე ამოცანას ხსნის მსჯელობით. დაფაზე სრულდება ჩანაწერი:

$$\text{ა)}\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=6\cdot7\cdot\cos60^\circ=42\cdot\frac{1}{2}=21;$$

$$\text{გ)}\ \vec{a}\cdot\vec{b}=12\cdot11\cdot\cos120^\circ=132\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-66;$$

$$\text{დ)}\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1{,}13\cdot3{,}27\cdot\cos90^\circ=1{,}13\cdot3{,}27\cdot0=0.$$

V. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი შესაბამისი კოორდინატების გამოყენებით

ამტკიცებენ თეორემას:

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამის ტოლია. (სახელმძღვანელოში დამოუკიდებლად ეცნობიან თეორემას და დამტკიცებას, შემდეგ მსურველი გამოდის დაფასთან, ჩამოაყალიბებს თეორემას და დაამტკიცებს.) ამასთან დაკავშირებით ხსნიან სახელმძღვანელოდან №4 სავარჯიშოს ა) დავალებას.

როგორც ა), ისე ბ) დავალების შესრულებისას დაფასთან გამოსული მოსწავლე დავალებას ხსნის მსჯელობით. ჩანაწერი იქნება შემდეგი სახის:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\alpha=x_1x_1+y_2y_2=-12+9=-3;$$

მეორე გაკვეთილზე იმუშავებენ დღეს შესწავლილი მასალის განმტკიცებასა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლებზე სკალარული ნამრავლის გამოყენებით.

განხილული ამოცანების მიხედვით შეგვიძლია შევადგინოთ ცხრილი:

კუთხის სიდიდე	სკალარული ნამრავლი
მახვილი (60°)	დადებითი (21)
ბლაგვი (120°)	უარყოფითი (-66)
მართი (90°)	ნულის ტოლი (0)

განვაზოგადოთ და ჩამოვაყალიბოთ დასკვნა:

თუ არანულოვან ვექტორებს შორის კუთხე:

- მახვილია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი დადებითია;
- ბლაგვია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი უარყოფითია;
- მართია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია.

მასწავლებელი: – რა შეგიძლიათ თქვათ საპირისპიროდ მიმართული არანულოვანი ვექტორების სკალარულ ნამრავლზე? (ვინაიდან 180°-იანი კუთხის კოსინუსი (-1)-ის ტოლია, ამიტომ საპირისპიროდ მიმართული ვექტორების ნამრავლი უარყოფითი იქნება.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha=ab\cdot(-1)=-ab.$$

VI. დ/ს სავარჯიშო №5 ა) და გ).

VII. რეფლექსია

მასწავლებელი: – რა ვისწავლეთ დღეს?

– რას წარმოადგენს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი?

– როგორ გამოვთვალოთ ვექტორთა სიგრძის გამოყენებით ვექტორის თავისთავზე სკალარული ნამრავლი?

– როგორ გამოვთვალოთ ვექტორთა კოორდინატების გამოყენებით მათი სკალარული ნამრავლი?

– ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის რა თვისებებს გავეცანით?

– განსაზღვრავს თუ არა ვექტორებს შორის კუთხე სკალარული ნამრავლის ნიშანს?

VIII. საშინაო დავალება: №2, №3-ის ბ) და გ); №4-ის გ) და დ); №8.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი: ცოდნის გაღრმავება საკითხებზე:

- ვექტორების სკალარული ნამრავლი და მისი თვისებები;
- ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა სკალარული ნამრავლის გამოყენებით;
- ვექტორების სკალარული ნამრავლის გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.

გაკვეთილის მსვლელობა

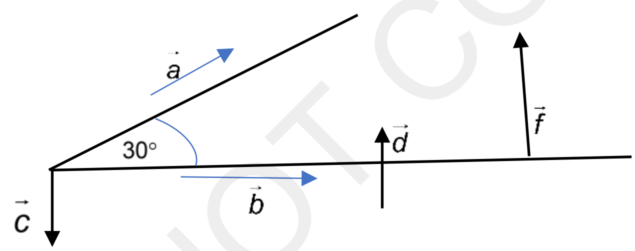
I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

1) უპასუხეთ კითხვებს:

- რას ეწოდება ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი?
- რა მიიღება სკალარული ნამრავლის შედეგად? (რიცხვი, ანუ სკალარი.)
- რას ეწოდება ორ ვექტორს შორის კუთხე?
- ნახაზის მიხედვით იპოვეთ კუთხე ქვემოთ მოცემულ ვექტორებს შორის.

ა) $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$; ბ) $\angle\left(\vec{a},\vec{c}\right)$; გ) $\angle\left(\vec{b},\vec{c}\right)$; დ) $\angle\left(\overrightarrow{d,c}\right)$; ე) $\angle\left(\vec{d},\vec{f}\right)$.

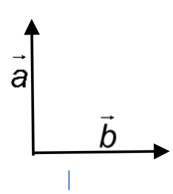


- როგორ გამოვთვალოთ ორ ვექტორს შორის კუთხე სკალარული ნამრავლის გამოყენებით?
- დაწერეთ სკალარული ნმრავლის გამოსათვლელი ფორმულა.
- როგორ გამოვთვალოთ ორ ვექტორს შორის კუთხე სიბრტყეზე მოცემული მათი კოორდინტებით?

2) დაასრულე წინადადება, შეასრულე შესაბამისი ნახაზი და ჩანაწერი

- ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ვექტორები . . .

დაფაზე შესრულდება ნახაზი და ჩანაწერები:

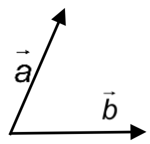


$$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ,\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=ab\underbrace{\cos 90^\circ}_{=0}=0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$

- ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი დადებითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორებს შორის კუთხე . . .

დაფაზე შესრულდება ნახაზი და ჩანაწერები:

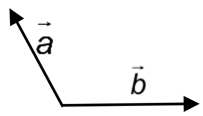


$\angle(\vec{a},\vec{b}) < 90^\circ, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\underbrace{\cos 90^\circ}_{>0} > 0.$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) < 90^\circ.$$

- ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უარყოფითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორებს შორის კუთხე . . .

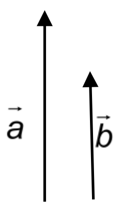
დაფაზე შესრულდება ნახაზი და ჩანაწერები:



$\angle(\vec{a},\vec{b}) > 90^\circ, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\underbrace{\cos 90^\circ}_{<0} < 0.$

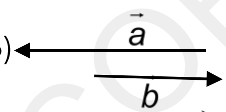
$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) > 90^\circ.$$

მასწავლებელი – კიდევ რა კერძო შემთხვევები შეგვიძლია განვიხილოთ?
მოსწავლეები პასუხობენ და დაფაზე ასრულებენ შესაბამის ნახაზებსა და ჩანაწერებს.

ა) 

$\angle(\vec{a},b) = 0^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = ab.$

ბ) 

$\angle(\vec{a},b) = 180^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -ab.$

გ) $\angle(\vec{a},\vec{a}) = 0^\circ \quad \vec{a}\cdot\vec{a} = a\cdot a\cdot\cos 0^\circ = a\cdot a\cdot 1 = a^2$

მასწავლებელი – რა სახელწოდებას შეურჩევთ $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ნამრავლს? ($\vec{a}$ ვექტორის სკალარული კვადრატი.)

– ზეპირსიტყვიერად ჩამოაყალიბეთ, რა არის ვექტორის სკალარული კვდრატი. (ვექტორის სკალარული კვდრატი არის მისი სიგრძის კვადრატი.)

– როგორ ჩაწერთ? ($\vec{a}^{\,2} = a^2$.)

– როგორ გამოვთვალოთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის მათი კოორდინატების გამოყენებით? (ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის გამოსათვლელად უნდა გამოვთვალოთ მათი შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამი. $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$, სადაც $(x_1;y_1)$ არის $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, ხოლო $(x_2;y_2,)$ – $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.)

III. ამოცანების ამოხსნა

ხსნიან:

- კონტექსტში მოცემულ მაგალითს ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლაზე;
- სახელმძღვანელოდან №6 სავარჯიშოს ა) და ბ) ამოცანებს;
- სახელმძღვანელოდან №7 სავარჯიშოს ა) ამოცანას;
- სახელმძღვანელოდან №11 ამოცანას.

IV. დამოუკიდებელი სამუშაო სახელმძღვანელოდან №9 სავარჯიშო.
პასუხი: 0 ან -1,5.

V. რეფლექსია

VI.საშინაო დავალება – №6(გ,დ), №7(ბ,გ), №10, №11 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. 12. **სავ.№2.** -10. **სავ.№3.** ა) 21; ბ) $14\sqrt{2}$; გ) -66; დ) 0.

სავ.№4. ა)-3; ბ)0; გ) 4; დ) 0. **სავ.№5.** ა) $\frac{7}{25}$; ბ) 0; გ) 0; დ) $\frac{240}{289}$.

სავ.№6. ა) 180^o; ბ) 90^o; გ) 0; დ) 30^o. **სავ.№ 7.** ა) 60^o; ბ) 45^o; გ) 150^o.

სავ.№8. ა) მახვილკუთხა; ბ)ბლაგვკუთხა; გ) მართკუთხა; დ) ბლაგვკუთხა.

სავ.№9. $x = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{array}\right.$. **სავ.10.** სამკუთხედი მართკუთხაა, $S = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 2$.

სავ.11. -59. **სავ.12.** $\sqrt{4\cdot 9 + 12\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 9\cdot 25} = 3\sqrt{29 + 10\sqrt{3}}$.

სავ.№13. $S = \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\sqrt{1-\left(\frac{-4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}\right)^2} = 1{,}5$.

სავ.№14. ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 5\cdot 8\cdot\left(-\frac{25+64-49}{80}\right) = -20$;

ბ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-25-20) = -22{,}5$;

გ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(-\frac{8}{13}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{5}{13}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{8}{13}\cdot 25 - \frac{5}{13}\cdot 20 = -\frac{300}{13}$.

სავ.№15. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right) = 16-9 = 7$.

სავ.№16. 10. **სავ.№17.** $(-1{,}5;7)$. **სავ.№18.** 5.

სავ.№19. სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები წვეროთა შესაბამისი კოორდინატების საშუალო არითმეტიკულიას ტოლია:

$$\left(\frac{0-2-4}{3};\frac{1+2+0}{3}\right) = (-2;1).$$

სავ.№20. $4\sqrt{3}$ მ. **სავ.№**13სმ.

ტესტი №13

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- თანამიმდევრული, საწინააღმდეგოდ მიმართული, კოლინეალური, არაკოლინეალური, მოპირდაპირე ვექტორები;
- მოქმედებანი ვექტორებზე;
- ვექტორის წარმოდგენა არაკოლინეალური ვექტორების ჯამად;
- ვექტორის კოორდინატები და მათი გამოთვლა;

- ვექტორის სიგრძის გამოთვლა მისი კოორდინატების საშუალებით;
- ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა საკოორდინატო სიბრტყის გამოყენებით;

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7
პასუხი	ბ)	ა)	დ)	გ)	დ)	გ)	$\vec{a}=-7\vec{i}+2\vec{j}$

8	9	10
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$	−15;	$\vec{a}=\vec{b}+2\vec{c}$

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული ვექტორული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს ვექტორული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს ვექტორული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს ვექტორულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.

მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულობა და დასაბუთება	არ ესმის ვექტორისა და მისი კოორდინატების ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას, ვერ განსაზღვრავს გამოყენების არეალს, ვერ ხსნის ამოცანებს.	შეუძლია მარტივი ვექტორული ცნებისა და დებულების(ვექტორების ჯამი, სხვაობა) ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ნაწილობრივ ასრულებს ვექტორებზე მოქმედებებს.	ესმის ვეტორული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მაგალითებს ხსნის არამკაცრი და ნაწილობრივი დასაბუთებით.	ღრმად ესმის ვექტორული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაცრად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობლემის გადაჭრის უნარი	თემის არცოდნის გამო ვერ ადგენს კავშირებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი.	ახერხებს სხვა სტრუქტურებთან კავშირების დადგენას. აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი. საჭიროებს ცოდნის გაღრმავებას (ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის საკოორდინატო სიბრტყის მეშვეობით).	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივი შეცდომით ახერხებს მიღებული შედეგების განზოგადებასა და ანალიზს.	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. შეუძლია მიღებული შედეგების განზოგადება და ანალიზი პრობლემის გადაჭრისას.

6.4 მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- წერტილის პოვნა მოცემული კოორდინატებით;
- მოცემული წერტილის კოორდინატების დადგენა;
- წერტილებს შორის მანძილის გამოთვლა კოორდინატებით.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) OX; ბ) OZ; გ)OX ; დ) OY; ე) სამივეს; ვ) არცერთს.

სავ.№2. ა) XOZ; ბ) YOZ ; გ)XOY ; დ) YOZ; ე) YOZ-ს და XOY-ს; ვ) არცერთს.

სავ.№3. ა) 13; ბ) 5; გ) 13; დ) $\sqrt{111}$.

სავ.№4. $\pm\sqrt{21}$.

სავ.№5. $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(2;0;-2)\right|=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}.$

სავ.№6. 5. **სავ.№7.** 13. **სავ.№8.** $(\pm1{,}1;0;0)$.

სავ.№9. $(0;\pm9;0)$. **სავ.№10.** $(0;0;\pm7)$. **სავ.№ 11.** ა) 3; ბ) 2 ; გ)1.

სავ.№12. ა) $(2;0;-1)$; ბ) $(2{,}5;-4{,}5;2)$; გ) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};4;\frac{1}{2}\right)$.

სავ.№13. ა) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(6;2;-10)+\frac{1}{2}(-6;4;2)=(0;3;-4)$, $AM=5$; ბ) $\sqrt{14}$; გ) $\frac{\sqrt{70}}{2}$.

M-ის კოორდინატებია (-1; 3; 0), $AM=\sqrt{0+9+16}=5$.

სავ.№14. $C=(1;1;0)$; $C_1=(1;1;1)$; $D_1=(0;1;1)$; $B_1=(1;0;1)$.

სავ.№15. ა) მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{-1+5-7}{3};\frac{0+2+4}{3};\frac{4-6+6}{3}\right)=\left(-1;2;\frac{4}{3}\right)$, ამიტომ მანძილი სათავემდე იქნება $\frac{\sqrt{61}}{3}$;

ბ) $\frac{\sqrt{14}}{3}$; გ) $\frac{\sqrt{13}}{3}$. სავ.№16. $C=(3;4;0)$; $C_1=(3;4;5)$; $D_1=(0;4;5)$; $B_1=(3;0;5)$.

სავ.№ 17. $\overrightarrow{AB}=(-3;3)$, $\overrightarrow{BA}=(3;-3)$.

სავ.№18. ა) $3\vec{a}-4\vec{b}=(3;-6)-(12;20)=(-9;-26)$; ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}=(2;-4)+(9;15)=(11;11)$;

გ) $\cos\theta=\frac{3-10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{34}}=-\frac{7}{\sqrt{170}}$.

6.5 ვექტორები სივრცეში

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- 3-განზომილებიანი ვექტორების კოორდინატების დადგენა;
- წრფივი მოქმედებების კოორდინატებით და გრაფიკულად გამოსახვა;
- ვექტორის სიგრძის გამოთვლა;
- ვექტორის წარმოდგენა ორტების საშუალებით;
- კომპლანარული და არაკომპლანარული ვექტორების ამოცნობა და გრაფიკულად გამოსახვა;
- ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის კოორდინატებით გამოთვლა;
- ვექტორებს შორის კუთხის კოორდინატებით გამოთვლა.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) (-2;-1;-6); ბ) (6;1;-13) ; გ) (0,5;-3;1); დ) $(-\sqrt{3};-2)$.

სავ.№2. ა) $\sqrt{16+9+144}=13$; ბ) $\sqrt{25+0+144}=13$;

გ) $\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$; დ) $\sqrt{2+0+0}=\sqrt{2}$.

სავ.№3. ა) 5; ბ) 5; გ) 5; დ) 17; ე) 3; ვ) 2.

სავ.№4. ა) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$; ბ) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; გ) $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; დ) $\vec{a}=-4\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$.

სავ.№5. ა) (1;2;3); ბ) (2;3;-4) ; გ) (1;4;0); დ) (0;2;3); ე). (-7;0;0).

საჟ.№6. ა) $\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$; ბ) $\sqrt{1+144+1}=\sqrt{146}$; გ) $\sqrt{9+16+0}=5$.

საჟ.№7. ა) (-1;4;-3); ბ) (2;-8;6) ; გ) (-3;12;-9).

საჟ.№8. ა) $2\vec{a}+3\vec{b}=(0;10;-14)+(-12;9;18)=(-12;19;4)$;

ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}=(6;-1;2)+(-3;6;15)=(3;5;17)$;

გ) $2\vec{a}+3\vec{b}=(6;-2;0)+(0;-15;3)=(6;-17;3)$.

საჟ.№9. $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}=(-2;6;1)-(8;14;-10)=(-10;-8;11)$.

საჟ.№10. ა) $2\vec{a}+\vec{b}=(-2;14;-7)$, სიგრძეა $\sqrt{4+196+49}=\sqrt{249}$;

ბ) $2\vec{a}+\vec{b}=(-3;3;10)$, სიგრძეა $\sqrt{9+9+100}=\sqrt{118}$;

გ) $2\vec{a}+\vec{b}=(2\sin\alpha;2\cos\alpha;0)$, სიგრძეა $\sqrt{4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}=2$;

დ) $2\vec{a}+\vec{b}=5\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$ სიგრძეა $\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}$.

საჟ.№11. $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(12;-6;-2)+(5;-4;-3)=(17;-10;-5)$ სიგრძეა $\sqrt{289+100+25}=\sqrt{414}$.

საჟ.№12. ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot7\cdot\frac{1}{2}=10,5$; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$; გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=8\cdot13\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-52$; დ)0.

საჟ.№13. ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8+9+0=1$; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0-3+3=0$; გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4+0+6=10$;

დ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=9-6+0=3$.

საჟ.№14. ა) $\cos\alpha=\frac{-9+16-144}{\sqrt{169}\sqrt{169}}=-\frac{137}{169}$; ბ) $\cos\alpha=\frac{25}{169}$; გ) $\cos\alpha=0,48$; დ) $\cos\alpha=\frac{64}{289}$.

საჟ.№15. ა) ერთი ვექტორი მიიღება მეორისგან -1-ზე გამრავლებით, ე.ი. საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია და ამიტომ მათ შორის კუთხეა 180°, ცხადია, იგივე შედეგს მივიღებთ,თუ გამოვითვლით მათ შორის კუთხის კოსინუსს:

$\cos\alpha=\frac{-9-16-1}{26}=-1, \alpha=180^\circ$; ბ) ერთი ვექტორი მიიღება მეორისგან 2-ზე გამრავლებით, ე.ი. თანამიმართული ვექტორებია და ამიტომ მათ შორის კუთხეა 0°;

გ) ერთი ვექტორი მიიღება მეორისგან -3-ზე გამრავლებით, ე.ი. საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია, ამიტომ მათ შორის კუთხეა 180°;

დ) $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha=30^\circ$. **საჟ.№16.** ა) 60°; ბ) 45° გ) 150°.

საჟ.№17. ა) $\cos\alpha=\frac{2-12-5}{3\sqrt{62}}<0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე ბლაგვია;

ბ) $\cos\alpha > 0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე მახვილია;
გ) $\cos\alpha > 0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე მახვილია; დ) $\cos\alpha < 0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე ბლაგვია.

საე.№18. რადგან ვექტორებს შორის კუთხე მართია, ამიტომ მათი სკალარული ნამრავლია 0, ანუ $x^2 - 4x + 4 = 0, x = 2.$

საე.№19. რადგან ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლია 0, ამიტომ ვექტორებს შორის კუთხე მართია, ე.ი. $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

საე.№20. $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = a^2 - b^2 = 6 - 74 = -68$.

საე.№21. $|\vec{a}-2\vec{b}| = \sqrt{a^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4b^2} = \sqrt{25 - 4\cdot 5\cdot 4\cdot \frac{1}{2} + 64} = 7$.

საე.№22. ა) $\vec{a} = 4(12;-3;4) = (48;-12;16)$; ბ) $\vec{a} = -2(-6;8;24) = (12;-16;-48)$.

საე.№23. $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{55}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{46}}{\sqrt{55}} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}\cdot\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

საე.№24. $\cos\alpha = -\frac{5}{13} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 13\cdot 14\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -70$.

საე.№25. $\sqrt{1+x^2-2x+1+4-4x+x^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}+(x-1{,}5)^2}$, უმცირესია $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

ტესტი №14

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- სამგანზომილებიანი ვექტორების კოორდინატების დადგენა;
- ვექტორის სიგრძის გამოთვლა;
- ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლისა და ვექტორებს შორის კუთხის კოორდინატებით გამოთვლა.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
პასუხი	ა)	ა)	გ)	დ)	ბ)	ბ)	$5\sqrt{2}$	$x = -0{,}5;\ y = -8;$	$\frac{48}{65}$	8.

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული საკითხი ფასდება 1 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

აბა, სცადე! მითითება. ვისარგებლოთ იმ ფაქტით, რომ სიბრტყის ნებისმიერი ვექტორი ორი არაკოლინეალური ვექტორის წრფივი კომბინაციით წარმოდგება.

ტესტის განმავითარელი შეფასების სქემა

ფასდება შემდეგი აქტივობები	1-4 არადამაკმ.	5-6 დამაკმ.	7-8 კარგი	9-10 სანიმუშო
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მათემატიკური ენის ფლობა, დამხმარე რესურსების განსაზღვრა	ვერ ფლობს მათემატიკურ ენას, არა აქვს გააზრებული ვექტორული ტერმინები. ვერ განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ნაწილობრივ ფლობს მათემატიკურ ენას, უჭირს ვექტორული ტერმინების გააზრება. ხანდახან განსაზღვრავს საჭირო რესურსებს.	ახერხებს ვექტორული ტერმინების გააზრება-გამოყენებას. ხანდახან განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.	ეფექტრად იყენებს ვექტორულ ტერმინებს. განსაზღვრავს და იყენებს საჭირო რესურსებს.
მათემატიკური ცნებებისა და დებულებების გამოყენება, მსჯელობა, ლოგიკურობა, არგუმენტირებულობა და დასაბუთება	არ ესმის ვექტორული ცნებებისა და დებულებების არსი, ვერ ახერხებს ინტერპრეტაციას,არ შეუძლია ვექტორების კოორდინატების დადგენა, ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა.	შეუძლია მარტივი ცნებისა და დებულების ინტერპრეტაცია, ვერ ახერხებს განსაზღვროს გამოყენების არეალი. ნაწილობრივ ახერხებს ვექტორების კოორდინატების დადგენას, ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა.	ესმის ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, არჩევს გამოყენების სტრატეგიას. ახერხებს მათ სწორად გამოყენებას. შეუძლია სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა ვექტორის კოორდინატების გამოყენებით.	ღრმად ესმის ვექტორული ცნებებისა და დებულებების არსი, ახდენს მათ ინტერპრეტაციას, სწორად ირჩევს გამოყენების სტრატეგიას და სწორად იყენებს. მსჯელობს მკაცრად, ლოგიკურად, თანმიმდევრულად ასაბუთებს.
კავშირებისა და მიმართებების დადგენა. ანალიზის, სინთეზისა და პრობ-	ვერ ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან. არ აქვს ანალიზისა და სინთეზის უნარი.	გაჭირვებით ახერხებს დაადგინოს კავშირები და მიმართებები სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ	ადგენს კავშირებსა და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. ნაწილობრივ ახერხებს მიღებული შედე-	ადგენს კავშირებს და მიმართებებს სხვა სტრუქტურებთან და ობიექტებთან. შეუძლია მიღებული შედეგების განზოგადება და

ლემის გა-დაჭრის უნარი		ახერხებს მიღებუ-ლი შედეგების გან-ზოგადებასა და ანალიზს.	გების განზოგადე-ბასა და ანალიზს.	ანალიზი პრობ-ლემის გადაჭრისას.

თავი 7. სტატისტიკა და ალბათობა

თავის მიზანია მოსწავლემ შეძლოს:

- ტიპური და გამორჩეული მონაცემების მითითება და დახასიათება;
- რიცხვით მონაცემთა გაფანტულობის მახასიათებლების (დიაპაზონისა და სტანდარტული გადახრის) გამოთვლა;
- რიცხვით მონაცემთა რანგის დადგენა;
- მოცემული სიხშირული ცხრილის მიხედვით დაგროვილი სიხშირისა და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირის ცხრილების აგება;
- დაგროვილი სიხშირისა და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირის დიაგრამების აგება;
- მოცემული შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის აგება;
- ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულების ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელად გამოყენება;
- ხდომილობათა და მათზე მოქმედებათა ვენის დიაგრამით გამოსახვა;
- ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელად ვენის დიაგრამის გამოყენება;
- პირობითი ალბათობის გამოთვლა და ხდომილობათა ნამრავლისა და ჯამის ალბათობის გამოსათვლელად გამოყენება;
- პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად ალბათური გამოთვლების გამოყენება.

მატრიცა

თემა - სტატისტიკა და ალბათობა **სამიზნე ცნება** - ხდომილობის ალბათობა **(შედეგი მათ.საშ.(I). 1,2,3,4,5,6)** **ქვეცნება** - პირობითი ალბათობა. **საკითხი/ ქვესაკითხი-** პირობითი ალბათობის სტატისტიკური ანალიზი
საკვანძო შეკითხვა - როგორ შეამოწმებ პირობითი ალბათობის განმარტებით მიღებულ

შედეგებს სტატისტიკური მეთოდებით?

სამიზნე ცნებასთან/ცნებებთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები <u>მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:</u>	**შეფასების კრიტერიუმი** <u>მოსწავლეს შეუძლია:</u>	<u>ნაშრომში/ნაშრომში პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:</u>
ხდომილობის ალბათობა **1.** შემთხვევითი მოვლენის ამა თუ იმ შედეგის (ხდომილობის) მოსალოდნელობის მახასიათებელი სკალარული სიდიდე. ალბათობა $[0;1]$ შუალედში მოთავსებული რიცხვია. რაც მეტია ალბათობა, მით მეტადაა ხდომილობა მოსალოდნელი. შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობაა 0, ხოლო აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა 1. **2.** ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შემთხვევითი მოვლენის ან/და ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო არათავსებად შედეგთა ერთობლიობაა. კლასიკურ სქემაში ყველა შედეგი (ანუ ყველა ელემენტარული ხდომილობა) ტოლად მოსალოდნელია. **3**. ხდომილობა ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეა. ხდომილობა განხორციელებულად ითვლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ხორციელდება მისი ერთ-ერთი ელემენტარული ხდომილობა. **4.** A ხდომილობის ალბათობა B პირობით (A/B) გამოითვლება ფორმულით: $p(A/B)=\frac{p(AB)}{p(B)}$.	• ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულების ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელად გამოყენება (მკვ.წ.1); • ხდომილობათა და მათზე მოქმედებათა ვენის დიაგრამით გამოსახვა (მკვ.წ.2); • ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელად ვენის დიაგრამის გამოყენება (მკვ.წ.3); • პირობითი ალბათობის გამოთვლა და ხდომილობათა ნამრავლისა და ჯამის ალბათობის გამოსათვლელად გამოყენება (მკვ.წ.4); • პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად ალბათური გამოთვლების გამოყენება. • მონაცემთა შეგროვების მიზნით კითხვარის შედგენა; • ამა თუ იმ მონაცემთა შეგროვებისათვის შესაბამისი პოპულაციის შერჩევა; • მონაცემთა შეგროვება გამოკითხვით; • მონაცემთა მიზნობრივი გადარჩევა-დახარისხება; • მონაცემთა სტატისტიკური ანალიზი.	• ერთი შეხედვით ტოლადმოსალოდნელ ხდომილობებს რატომ აქვთ არატოლი ალბათობები; • რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში; • როგორ დაადგინე ხდომილობათა ალბათობები • როგორ გამოიყენე (თუ არა) პირობითი ალბათობის ცოდნა; • გამოიყენე თუ არა კლასიკური ალბათობის ცოდნა; • როგორ შეადგინე კითხვარი • როგორ ჩაატარე სტატისტიკური ანალიზი; • დადასტურდა თუ არა, რომ: ○ თუ ოჯახში ორი ბავშვიდან ერთ-ერთი გოგონაა, მაშინ მეორე გოგონას არსებობის ალბათობა მეორე ბიჭის არსებობის ალბათობაზე, დაახლოებით, 2-ჯერ ნაკლებია? ○ თუ ოჯახში სამი ბავშვიდან ერთ-ერთი გოგონაა, მაშინ იმის ალბათობა, რომ დანარჩენი ორიც გოგონაა, სამჯერ ნაკლებია იმის ალბათობაზე, რომ დანარჩენი ორი ბავშვი ბიჭია. • რა დასკვნა გამოიტანე ჩატარებული სამუშაოდან..

კომპლექსური დავალება -

„პირობითი ალბათობის სტატისტიკური ანალიზი“

ამა თუ იმ მოვლენის სტატისტიკური ანალიზისთვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს, თუ რა გარემოში, რა პირობებში ან/და რა პოპულაციაში მოიპოვება მონაცემები. მაგალითად, იმის გასარკვევად, მოსახლეობის რამდენი პროცენტია გატაცებული ფეხბურთით, საფეხბურთო სტადიონზე მაყურებლებს შორის ჩატარებული გამოკითხვა და ქუჩაში ჩატარებული გამოკითხვა სხვადასხვა შედეგს მოგვცემს; სხვადასხვა შედეგს მოგვცემს მთვარობის მიერ გატარებული ამა თუ იმ რეფორმის შესახებ გამოკითხვა მმართველ და ოპოზიციურ პარტიებში და ა.შ.

ანალოგიური სიტუაცია წარმოიშობა ხდომილობის ალბათობის გამოთვლის დროს იმის მიხედვით, თუ ხდომილობათა სივრცედ რა სიმრავლეს ავიღებთ. მაგალითად, იმის გასარკვევად, თუ რის ტოლია მონეტის ორჯერ აგდების დროს ორივეჯერ გერბის მოსვლის ალბათობა, დამოკიდებულია ხდომილობათა სივრცეზე: თუ ხდომილობათა სივრცედ ცდის ყველა შედეგს ავიღებთ, ალბათობა 0,25-ის ტოლი იქნება, თუ სივრცეს შევზღუდავთ იმ პირობით, რომ პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, მაშინ ალბათობა 0,5-ის ტოლი იქნება, ხოლო თუ პირობად გვექნება, რომ ერთ-ერთი აგდებისას მოვიდა გერბი, მაშინ – $\frac{1}{3}$.

შენი დავალება.

ამოხსენი ამოცანები:

1. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ ორბავშვიან ოჯახში
   ა) ორივე ბავშვი გოგონაა;
   ბ) ორივე ბავშვი გოგონაა, თუ ცნობილია, რომ პირველი ბავშვი გოგონაა;
   გ) ორივე ბავშვი გოგონაა, თუ ცნობილია, რომ ერთ-ერთი ბავშვი გოგონაა;
   დ) ერთი ბავშვი ბიჭია, თუ ცნობილია, რომ ერთ-ერთი ბავშვი გოგონაა.

2. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ სამბავშვიან ოჯახში, რომელშიც ერთი-ერთი ბავშვი გოგონაა,
   ა) დანარჩენი ორი ბავშვიც გოგონაა;

   ბ) დანარჩენი ორი ბავშვი ბიჭია.

3. ამოხსენი ანალოგიური ამოცანები, რომლებშიც გოგონებს ჩაანაცვლებ ბიჭებით და პირიქით – ბიჭებს გოგონებით.

შენიშვნა. ამოცანებში იგულისხმება, რომ ბიჭისა და გოგოს დაბადება ტოლად მოსალოდნელი ხდომილობებია.

4. ჩაატარე გამოკითხვა თანაკლასელებში ან/და შენთვის ხელმისაწვდომ სხვა პოპულციაში 2-ბავშვიან და 3-ბავშვიან ოჯახებში ბავშვთა შემადგენლობის შესახებ. დააჯგუფე რესპონდენტი გოგონებისა და ბიჭების პასუხები ცალ-

ცალკე და გამოიკვლიე, რამდენად ახლოსაა შენ მიერ თეორიულად დადგენილი კანონზომიერებები რეალობასთან.

5. **ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:**
   - ერთი შეხედვით, ტოლად მოსალოდნელ ხდომილობებს რატომ აქვთ არატოლი ალბათობები;
   - რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
   - როგორ დაადგინე ხდომილობათა ალბათობა;
   - როგორ გამოიყენე პირობითი ალბათობის ცოდნა;
   - გამოიყენე თუ არა ალბათობის კლასიკური განმარტება;
   - როგორ შეადგინე კითხვარი;
   - როგორ ჩაატარე სტატისტიკური ანალიზი;
   - რა დასკვნა გამოიტანე ჩატარებული სამუშაოდან.

კომპლექსური დავალების განხორციელების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები, შეკითხვები)

ეტაპი I – კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა

რესურსები/განსახილველი ქეისები:

- **რესურსი 1**. მე-11 კლასის სახელმძღვანელოს მე-7 თავი;
- **რესურსი 2.** კალკულატორი;
- **რესურსი 3.** ხანის აკადემია.

<u>კომპლექსური დავალების პირობის გააზრებაზე ორიენტირებული შეკითხვები:</u>

- რა არის პირობითი ალბათობა?
- რატომ არის დავალებაში მოყვანილი მონეტის აგდების ექსპერიმენტში პირობითი ალბათობები განსხვავებული?
- როგორ ფიქრობ, ბიჭის და გოგოს დაბადება ტოლად მოსალოდნელი ხდომილობებია?
- შენი აზრით, თუ პირველი ბავშვი გოგონაა, იმას, რომ მეორე ბავშვი გოგონაა და მეორე ბავშვი ბიჭია, განსხვავებული ალაბათობები აქვთ?
- შენი აზრით, თუ შენი კლასელი გოგონაა, რომელია მეტად მოსალოდნელი, რომ მას ძმა ჰყავდეს თუ და ჰყავდეს?
- პრაქტიკულად, როგორ შეძლებ შეამოწმო შენი ვარაუდები დასმულ შეკითხვებზე? სად ჩაატარებ გამოკითხვას?
- როგორ დააჯგუფებ გამოკითხვით მიღებულ მონაცემებს?
- როგორ აპირებ მონაცემთა ანალიზს რათა შეამოწმო შენი ვარაუდი და თეორიული გამოთვლები?
- როგორ ფიქრობ, პრაქტიკული თვალსაზრისით რამდენად გამოყენებადი იქნება შენ მიერ ჩატარებული კვლევა?

ქვესაკითხი - კომპლექსური დავალება

- შენი სიტყვებით ჩამოაყალიბე, რას შეეხება დღეს მოცემული დავალება, რომელზეც რამდენიმე გაკვეთილის განმავლობაში უნდა იმუშაო.
- მსგავსი ფორმის, ან შინაარსის დავალება სხვა დროს თუ შეგისრულებია?

ეტაპი II – კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა

ქვეცნებები -

ელემენტარული ხდომილობა (პარ.7.3)

ხდომილობათა სივრცე (7.3);

ხდომილობა(პარ.7.3);

ხდომილობათა ალბათობა (პარ.7.3);

დამოუკიდებელი და არათავსებადი ხდომილობები (პარ.7.3);

პირობითი ალბათობა (პარ. 7.4).

ქვესაკითხები -

- მოქმედებები ხდომილობებზე;
- პირობითი ხდომილობის გამოსათვლელი ფორმულა.

ნაბიჯი 1. 1-ელი დავალების შესრულება;

მოვიყვანოთ 1-ელი დავალების შესრულების ნიმუში:

ა) სულ გვაქვს 4 ტოლად მოსალოდნელი ელემენტარული ხდომილობა: გგ, გბ, ბგ, ბბ. ხელშემწყობია გგ. კლასიკური სქემის თანახმად ალბათობაა $\frac{1}{4}$;

ბ) თუ პირველი ბავშვი გოგონაა, მაშინ სულ დარჩენილია ორი შესაძლებელი შედეგი: გგ და გბ, რომელთაგან გვაწყობს გგ. იმავე სქემით ალბათობაა $\frac{1}{2}$;

გ) თუ ერთ-ერთი ბავშვია გოგონა (არ ვიცით რომელი), მაშინ გვაქვს სამი შესაძლებელი შედეგი: გგ, გბ და ბგ, რომელთაგან ხელშემწყობია გგ. ე.ი. ალბათობა $\frac{1}{3}$ – ის ტოლია.

დ) წინა პუნქტის პირობებში სამი შედეგიდან გვაწყობს ორი – გბ და ბგ. ამიტომ ალბათობა ტოლია $\frac{2}{3}$-ის.

შენიშვნა: ყურადღება უნდა გავამახვილოთ იმაზე, რომ გ) და დ) შემთხვევაში ერთი შეხედვით თანაბარ პირობებში ბიჭის ყოლის ალბათობა 2-ჯერ აღემატება გოგოს ყოლის ალბათობას. ამ ფაქტის პრაქტიკული შემოწმების მიზნით მოსწავლემ გამოკითხვის დროს გოგონებს უნდა დაუსვას ერთადერთი შეკითხვა, და ჰყავს თუ ძმა.

შემდეგ „და“ პასუხების რაოდენობა შეადაროს „ძმა“ პასუხების რაოდენობას. რა თქმა უნდა მცირერიცხოვანი რესპოდენტების შემთხვევაში შეიძლება თეორიულად მიღებული შედეგი, რომ „და“ პასუხების რაოდენობა ორჯერ ნაკლებია „ძმა“ პასუხების რაოდენობაზე შეიძლება არ დადასტურდეს.

პირველ დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- როგორ დაადგინე მოსალოდნელ შედეგთა რაოდენობა (ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე)?
- როგორ დაადგინე ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა?
- ისარგებლე თუ არა კლასიკური სქემით?
- როგორ ფიქრობ, რატომ აღმოჩნდა გ) პუნქტის პასუხი 2-ჯერ ნაკლები დ) პუნქტის პასუხზე?

ნაბიჯი 2. მეორე დავალებაზე მუშაობა

3-ბავშვიან ოჯახში სულ მოსალოდნელია 8 შედეგი:

გგგ, გგბ, გბგ, ბგგ, გბბ, ბგბ, ბბგ, ბბბ.

თუ ერთ-ერთო ბავშვი გოგონაა, მაშინ ერთი შედეგი ბბბ გამოირიცხა და ხდომილობის – „დანარჩენი ორი ბავშვი გოგონაა“ - ხელშემწყობია მხოლოდ ერთი გგგ ელემენტარული ხდომილობა. ამიტომ, კლასიკური სქემით მეორე დავალების ა) პუნქტის პასუხია: $\frac{1}{7}$; ხდომილობის „დანარჩენი ორი ბავშვი ბიჭია“ ხელშემწყობებია გბბ, ბგბ, ბბგ ელემენტარული ხდომილობები. აქაც, კლასიკური სქემით მივიღებთ ალბათობას $\frac{3}{7}$.

მეორე დავალების შემთხვევაშიც ძალაშია პირველი დავალების ბოლოს გამოთქმუ ლი შენიშვნა. მითუმეტეს, რომ ამ შემთხვევაში ორი გოგოს ალბათობა უკვე 3-ჯერ ნაკლები აღმოჩნდა ორი ბიჭის ალბათობაზე.

ამ დავალების შეკითხვებიც პირველი დავალების შეკითხვების ანალოგიურია.

ნაბიჯი 3. მესამე დავალებაზე მუშაობა

ეს დავალება არაფრით განსხვავდება პირველ და მეორე დავალებებისაგან. მისი მიცემა მხოლოდ იმითაა განპირობებული, რომ მოსწავლეებს არ შეექმნათ შთაბეჭდილება, თითქოს პირველ და მეორე დავალებებში გენდერული თანასწორობაა დარღვეული. მასწავლებელს შეუძლია პირველი და მეორე დავალება მისცეს ვა-ჟებს, ხოლო მესამე დავალება – გოგონებს და გამოკითხვა გოგონებმა ბიჭებს შორის, ხოლო ბიჭებმა გოგონებს შორის ჩაატარონ.

ნაბიჯი 4. მეოთხე დავალებაზე მუშაობა

მეოთხე დავალებასთან დაკავშირებული კითხვები:

- სად და რა პოპულაციაში ჩაატარე გამოკითხვა?

- რა შეკითხვით მიმართავდი რესპოდენტებს?
- როგორ დააჯგუფე პასუხები?
- რა შედეგი მიიღე ორბავშვიანი ოჯახების შემთხვევაში?
- რა შედეგი მიიღე სამბავშვიანი ოჯახების შემთხვევაში?
- დაემთხვა თუ არა გამოკითხვით მიღებული სტატისტიკური შედეგი შენ მიერ მიღებულ თეორიულ შედეგებს?
- თუ არ დაემთხვა, როგორ ახსნი განსხვავებას?

ნაბიჯი 5. ნაშრომის საპრეზენტაციოდ მომზადება

პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინე:

- ერთი შეხედვით ტოლადმოსალოდნელ ხდომილობებს რატომ აქვთ არატოლი ალბათობები;
- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- როგორ დაადგინე ხდომილობათა ალბათობები;
- როგორ გამოიყენე პირობითი ალბათობის ცოდნა;
- გამოიყენე თუ არა ალბათობის კლასიკური განმარტება;
- როგორ შეადგინე კითხვარი;
- როგორ ჩაატარე სტატისტიკური ანალიზი;
- დადასტურდა თუ არა, რომ: თუ ოჯახში ორი ბავშვიდან ერთ–ერთი გოგონაა, მაშინ მეორე გოგონას ალბათობა, მეორე ბიჭის ალბათობაზე, დაახლოებით, 2-ჯერ ნაკლებია? ან/და თუ ოჯახში სამი ბავშვიდან ერთ-ერთი გოგონაა, მაშინ იმის ალბათობა, რომ დანარჩენი ორიც გოგონებია, 3-ჯერ ნაკლებია იმის ალბათობაზე, რომ დანარჩენი ორი ბავშვი ბიჭია.
- რა დასკვნა გამოიტანე ჩატარებული სამუშაოდან.

7.1 ტიპური და ექსტრემალური მონაცემები

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- ტიპური და ექსტრემალური მონაცემების ამოცნობა და დახასიათება;
- რიცხვით მონაცემთა ერთობლიობის გაფანტულობის მახასიათებლების (გაბნევის დიაპაზონის, სტანდარტული გადახრა) გამოთვლა;
- მონაცემთა აღწერა მათი რაოდენობრივი და თვისობრივი მახასიათებლების მიხედვით.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა)-17; ბ)2მმ და 2მ; გ)25მგ და 2კგ; დ)0,1ჰა.

სავ.№2. ა) საშუალო, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის -2, ექსტრემალური მონაცემის გარეშე არის $\frac{1}{9}$; მედიანა, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 0, ექსრემალური მონაცემის გარეშე არის 1; ბ) საშუალო, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 11,8, ექსტრემალური მონაცემის გარეშე არის $5\frac{1}{3}$; მედიანა, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 6, ექსტრემალური მონაცემის გარეშე არის 5.

სავ.№3. ექსტრემალური მონაცემებია: 11000 და 600; საშუალო, ექსტრემალური მონაცემების ჩათვლით, არის 3500, ექსტრემალური მონაცემის გარეშე არის 2925; მედიანა, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 2900, ექსრემალური მონაცემის გარეშეც არის 2900; ტიპურ მაჩვენებლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ 2900.

სავ.№4. ბათუმში: გაბნევის დიაპაზონი 4°, სტანდარტული გადახრა $\sqrt{2}^{\circ}$; თელავში: გაბნევის დიაპაზონი 6°, სტანდარტული გადახრა 2° ; ბათუმში ამინდი უფრო სტაბილურია, ვიდრე თელავში.

სავ.№6. მათემატიკა: საშუალო 7,4, მედიანა 8, დიაპაზონი 7, სტანდარტული გადახრა $\sqrt{6} \approx 2{,}45$; ბიოლოგია: საშუალო 7,4, მედიანა 7, დიაპაზონი1, სტანდარტული გადახრა 0,5; ისტორია: საშუალო 8,8, მედიანა 9, დიაპაზონი 2, სტანდარტული გადახრა 0,75;

სალომე უკეთესად სწავლობს ისტორიას, რადგან საშუალო ქულა ისტორიაში აქვს ყველაზე მაღალი, მათემატიკასა და ბიოლოგიაში შედეგები თანაბარი აქვს (ორივეში საშუალო ქულაა 7,4) მაგრამ უფრო სტაბილური შედეგები აქვს ბიოლოგიაში, რადგან, როგორც გაბნევის დიაპაზონი, ისე სტანდარტული გადახრა ამ საგანში აქვს უმცირესი.

7. 2 დაგროვილი სიხშირე და მონაცემთა რანგი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- მონაცემთა დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილის შედგენა და ანალიზი;
- მონაცემთა რანგის დადგენა და გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სანამ ფარდობით სიხშირეს განვუმარტავთ, მოსწავლეებს შევახსენოთ სიხშირის განმარტება: სიხშირე მონაცემთა ერთობლიობაში კონკრეტული მონაცემის რაოდენობაა . დაგროვილი სიხშირე კი – იმ მონაცემთა რაოდენობაა, რომელიც მოცემულ ფიქსირებულ რიცხვს არ აღემატება.

სავ.№2. ა)

ასაკი	დაგროვილი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
9	2	10%
10	2	10%
11	3	15%
12	3	15%
13	7	35%
14	8	40%
15	10	50%
16	14	70%
17	20	100%

სავ.№5.

მონაცემები	3	4	4	5	5
რანგი	1	2,5	2,5	4,5	4,5

სავ.№7.

ქულა	3	5	6	7	8	9
სიხშირე	1	1	2	3	2	1

სავ.№9. ა) გადანაცვლებათა რაოდენობაა. პასუხი: $3!=6$;
ბ) ამორჩევა დაბრუნებით. პასუხი: $3^3=27$.

სავ.№10. ა) წყობათა რაოდენობა. $5\cdot4\cdot3$; ბ) ამორჩევა დაბრუნებით. პასუხი: $5^3=125$.

სავ.№11. ჯუფთებათა რაოდენობაა: ა) და ბ): $C_5^2 = C_5^3 = 10$; გ) $C_5^1 = 5$.

სავ.№12. გამრავლების წესით: $12\cdot13$, $C_{12}^2 \cdot C_{12}^2$.

ტესტი №15

მიზანი: ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების ათვისების შემოწმება:

- რიცხვით მონაცემთა ერთობლიობის გაფანტულობის მახასიათებლების გამოთვლა;
- მონაცემთა დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილის ანალიზი;
- მონაცემთა რანგი.

პასუხები

დავალების №	1	2	3	4	5
პასუხი	გ)	დ)	ბ)	დ)	ა)

№6

ასაკი	დაგროვილი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
17	2	$\frac{1}{6}$
18	2	$\frac{1}{6}$
19	4	$\frac{1}{3}$
20	4	$\frac{1}{3}$
21	6	$\frac{1}{2}$
22	9	$\frac{3}{4}$
23	11	$\frac{11}{12}$
24	12	1

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული №1, №2, №3 და №4 საკითხი ფასდება 1 ქულით, ხოლო მე-5 და მე-6 დავალებები 3-3 ქულით. მაქსიმალური - 10 ქულა.

ქულები	შეფასების დონეები
9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

7.3 ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულები

მიზანი. მოსწავლემ შეძლოს:

- შემთხვევითი ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის შედგენა;
- ალბათობის კლასიკური სქემის ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება;
- ხდომილობებზე მოქმედებების ვენის დიაგრამით გამოსახვა;

• ხდომილობათა ნამრავლისა და ჯამის ალბათობის გამოთვლა.

შენიშვნა. ამ პარაგრაფში ყურადღება გამახვილებულია წინა წლებში განვლილი საკითხების გამეორებაზე.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. პასუხები: ა)2; ბ)8; გ)6; დ)36; ე) 2^n; ვ) 6^n .

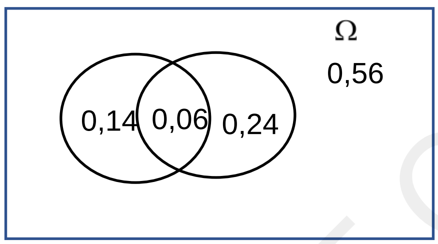
სავ.№2. პასუხები: ა) 36; ბ) C_{36}^2 ; გ) თითოეულ თამაშს აქვს სამი შედეგი: მოგება, ფრე, წაგება, ამიტომ 3 თამაშში ექნება 3^3=27 შედეგი (ამორჩევა დაბრუნებით); დ) თითოეულ თამაშს აქვს ორი შედეგი: მოგება და წაგება (კალათბურთში ფრე არ არსებობს), ამიტომ სულ გვექნება $2^4 = 16$ ელემენტარული ხდომილობა.

სავ.№3. ა) შეუძლებელი; ბ) შემთხვევითი; გ) აუცილებელი.

სავ.№4. ა) შემთხვევითი; ბ) შეუძლებელი; გ) აუცილებელი.

სავ.№5. ა) და ბ). **6.** ა) და ბ). **7.** A და C. **8.** ბ) .

სავ.№10.



სავ.№12. $\frac{1}{4}$. **13.** ა) $\frac{1}{36}$; ბ) $\frac{5}{36}$; გ) $\frac{1}{6}$; დ)0. **14.** ა) $\frac{3}{5}$; ბ) $\frac{2}{5}$.

სავ.№15. ა) $\frac{3}{10}$; ბ) $\frac{1}{10}$. **16.** ა)0; ბ) $\frac{1}{C_{15}^5}$; გ) $\frac{6}{C_{15}^5}$. **17.** ა) $\frac{C_4^2}{C_{15}^2}$; ბ) $\frac{C_5^2}{C_{15}^2}$; გ) $\frac{C_6^2}{C_{15}^2}$.

სავ.№18. ამ ხდომილობათა ალბათობების ნამრავლია $\frac{9}{16}$, ხოლო ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა – $\frac{1}{2}$. $\frac{9}{16} \neq \frac{1}{2}$.

სავ.№19. არათავსებადია, რადგან სულ სამი მონეტაა. ხდომილობათა ჯამი მოიცავს ყველა შემთხვევას.

სავ.№20. ა) დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა, მათი ალბათობათა ნამრავლის ტოლი. პასუხი: 0,28; ბ) ვსარგებლობთ ჯამის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით: 0,4+0,7-0,28 = 0,82.

სავ.№ 21. ა) $0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,21$; ბ) $0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,29$;

გ) $0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,44$; დ) $1 - 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,94$. 0,94.

სავ.№22. ა) 12 მგზავრიდან თითოეულმა დარჩენილი 9 ვაგონიდან ერთ-ერთი უნდა აირჩიოს (ამორჩევა დაბრუნებით), ამიტომ პასუხია$(0,9)^{12}$; ბ) ვსარგებლობთ ჯამის ფორმულით: $(0,9)^{12} + (0,9)^{12} - (0,9)^{12} \cdot (0,9)^{12}$.

სავ.№23. ა) $\frac{C_3^3 C_{17}^7}{C_{20}^{10}}$; ბ) $\frac{C_3^1 C_{17}^9}{C_{20}^{10}}$; გ) $1-\frac{C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}}$.

სავ.№24. ვთქვათ, სულ გამოსაკვლევად მივიდა x და მათგან y-ს აქვს ვირუსი. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ვწერთ განტოლებას:

$$0,95y+0,03(x-y)=0,187x.$$

საძიებელი ალბათობა იქნება $\frac{y}{x}=\frac{157}{920}\approx 0,17$.

7.4 პირობითი ალბათობა

მიზანი. პირობითი ალბათობის განმარტება და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.
სავ.№1-4 –ებში ვიყენებთ პარაგრაფის 1-3 ფორმულებს.

პასუხები: **სავ.№1.** $\frac{3}{4}$. **სავ.№ 2.** 0,4. **სავ.№3.** 0. **სავ.№4.** 0,7.

სავ.№5. ა)0,5; ბ)0,5; გ) 0, რადგან A და B არათავსებადია; დ) $\frac{1}{3}$, რადგან B პირობამ გამორიცხა ორივე აგდებისას საფასურის მოსვლა, ე.ი. სამი შედეგიდან ხელშემწყობია ერთი; ე) $\frac{2}{3}$, რადგან B პირობამ გამორიცხა ორივე აგდებისას გერბის მოსვლა, დარჩენილი სამი შესაძლებლობიდან გვაწყობს ორი: გს და სგ.

მე-**6** და მე-**7** სავარჯიშოები კომპლექსურ დავალებაში შემავალი პირველი დავალების ანალოგიურია და მათი ანლიზი მოცემულია ამ თავის მატრიცაში.

პასუხი: **სავ.№6.** ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{3}$. **სავ.№7.** ა) $\frac{2}{3}$; ბ) $\frac{1}{3}$.

სავ.№8. ექვსი შესაძლო შემთხვევიდან გვაწყობს მხოლოდ ერთი. პასუხი: ა) $\frac{1}{6}$; ბ) $\frac{1}{6}$.

სავ.№9. ა)პირობის გამო სულ გვაქვს 18 ელემენტარული ხდომილობა, რომელთაგან გვაწყობს სამი: 1:6, 3:4 და 5:2. $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$; ბ) აქაც 18 ელემენტარული ხდომილობიდან გვაწყობს სამი: 2:5; 4:3 და 6:1. $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$. პასუხი: ა) $\frac{1}{6}$; ბ) $\frac{1}{6}$.

სავ№10. $p(A\cdot B)=p(A/B)\cdot p(B)=0,3$, $p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)=0,7$. პასუხი:0,3, 0,7.

სავ.№11. შევიტანოთ რიცხვითი მონაცემები ხდომილობათა ჯამის გამოსათვლელ ფორმულაში: 0,7=0,4+0,6-p(A/B)·0,6, აქედან p(A/B)=0,5. პასუხი. 0,5.

სავ.№12. თუ პირველ ამოღებაზე ამოვა თეთრი ბურთი, მაშინ ყუთში დარჩება 2 თეთრი და 2 შავი ბურთი, ამიტომ მეორე ამოღებაზე თეთრი ბურთის ამოღების ალბათობა იქნება $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, ე.ი. p(A/B)=0,5. თუ პირველ ამოღებაზე არ ამოვა თეთრი ბურთი (ანუ ამოვა შავი ბურთი), მაშინ დარჩება 3 თეთრი და 1 შავი ბურთი, ამიტომ მეორე ამოღებაზე თეთრი ბურთის ამოღების ალბათობა იქნება $\frac{3}{4}$, ე.ი. $p(A/\bar{B})=0,75$.

საკ.№13. ამ შემთხვევაში A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, ამიტომ:

$$p(A/B)=p(A/\bar{B})=p(A)=\frac{3}{5}.$$

საკ.№14. ა)ვთქვათ A და B იგივე ხდომილობებია რაც 12-13 ამოცანებში, ხოლო C –ორივეჯერ ერთი ფერის ამოღება. მაშინ:

$$p(C)=p(A\cdot B)+p(\overline{A}\overline{B})=p(A/B)p(B)+p(\bar{A}/\bar{B})p(\bar{B})=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{20}=0,4.$$

ბ) საძიებელი ალბათობაა 1-p(C)=1-0,4=0,6.

გ) იმავე აღნიშვნებში

$$p(A)=p(A\cdot B)+p(A\cdot\bar{B})=p(A/B)\cdot p(B)+p(A/\bar{B})\cdot p(\bar{B})=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=0,6.$$

15. გამომდინარეობს პარაგრაფის 1-ელი ფორმულიდან.

16. ა) B პირობა 8 ელემენტარული ხდომილობიდან გამორიცხავს სამივეზე საფასურის მოსვლას. ხელშემწყობია 4 ხდომილობა: გგგ, გგს, გსგ, გსს. პასუხი: ა) $\frac{4}{7}$; ბ)1.

17. 3-ზე მეტი ქულა მოდის 36 შესაძლებლიდან 18-ში. მათგან 7-ზე ნაკლები ქულა მოვა: 4:1, 4:2, 5:1 შემთხვევებში. პასუხი: $\frac{1}{6}$;

18. A ხდომილობაა (1:1, 1:3, 1:5, 3:1, 3:3, 3:5, 5:1, 5:3, 5:5), ხოლო B ხდომილობა – (1:5, 5:1, 2:4, 4:2, 3:3). $p(A/B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{3}{5}$, ხოლო $p(B/A)=\frac{p(AB)}{p(A)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{1}{3}$.

ტესტი №16
პასუხები

1. ა); **2.** ბ); **3.** დ); **4.** გ); **5.** გ); **6.** ა);

7. $p(A\cdot B)=p(A/B)p(B)=0,4\cdot0,5=0,2;\ p(A+B)=0,3+0,5-0,2=0,6;$

8. არაა დამოუკიდებელი, რადგან $p(A)\neq p(A/B)$;

9. ვიყენებთ ჯამის ალბათობის გამოსათვლელ ფორმულას: 0,4+0,6-0,24=0,76;

10. $p(A)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{40}{72}=\frac{5}{9};\ p(B)=\frac{4}{9};\ p(A/B)=\frac{5}{8}\Rightarrow p(A)\neq p(A/B)$, ე.ი. A და B არაა დამოუკიდებელი.

ტესტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

თითოეული სწორად შესრულებული დავალება ფასდება 1 ქულით.

ქულები	შეფასების დონეები

9-10	სანიმუშო
7-8	კარგი
5-6	დამაკმაყოფილებელი
1-4	არადამაკმაყოფილებელი

მთელი კურსის გასამეორებელი სავარჯიშოების კომენტარები და პასუხები

სავ.13. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. **სავ.15.** $30°$. **სავ. 16.** $4,8\sqrt{2}$. **სავ.17.** ა) $\sqrt{592}$ სმ. ბ) 84 სმ^2. **სავ.18.** არა.

სავ. 19. არაა ჭეშმარიტი, რადგან შეიძლება ეს სამი წერტილი ერთ დიაგონალს ეკუთვნოდეს.
სავ. 20. დ). **სავ. 21.** შესაძლებელია, თუ B წერტილი A წერტილის გეგმილია.

სავ. 22. პირამიდის წვეროს გეგმილია ჰიპოტენუზის შუა წერილი. პასუხი: 8სმ.

სავ. 23. მტკიცდება საწინააღმდეგოს დაშვებით. **სავ. 24.** $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel \alpha$.

სავ. 25. 3 სმ. **სავ. 26.** $60°$. **სავ. 27.** 54 სმ. **სავ. 35.** ა) $(0;0,36)$; დ) $(0;0,01)$.

სავ. 36. ა) შესაკრებები ჩავანაცვლოთ მათი ტოლი ვექტორებით: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD_1}$;
ბ) ეს სხვაობა იგივეა, რაც $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{A_1B}$.

სავ. 37. $-\frac{\overrightarrow{DA}}{2}-\frac{\overrightarrow{DB}}{2}+\frac{\overrightarrow{DC}}{2}$. **სავ. 38.** $90°, 90°, 180°$. **სავ. 39.** $60°$.

სავ. 40. 0,16. **სავ. 41.** $\frac{C_{997}^2}{C_{1000}^2}$. **სავ. 42.** $\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{44}$. **სავ. 43.** პასუხი: ა) $\frac{1}{11}$; ბ) $\frac{2}{11}$.

შემაჯამებელი სამუშაოები

შემაჯამებელი სამუშაო №1

ლოგიკა, რიცხვები

I ვარიანტი

1) მოცემულია ორი პირობითი გამონათქვამი:

A: თუ ანა ფრენბურთელია, მაშინ ბელაც ფრენბურთელია;

B: თუ ანა არაა ფრენბურთელი, მაშინ ბელაც არაა ფრენბურთელი.

თუ მოცემული ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მაშინ ქვემოთ ჩამოთვლილი გამონათქვამებიდან რომელია ჭეშმარიტი?

ა)ანი ფრენბურთელია; ბ) ანი არაა ფრენბურთელი;

გ) ანი არაა ფრენბურთელი და ბელა ფრენბურთელია;

დ) ანი ფრენბურთელია და ბელა არაა ფრენბურთელი;

ე) ანი მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ფრენბურთელი, როცა ბელაა ფრენბურთელი;

ვ) არცერთი. (პასუხი დაასაბუთე)

2) მოცემულია სამი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: m მარტივი რიცხვია; B: n მარტივი რიცხვია; C: m^2-n^2 მარტივი რიცხვია.

დაადგინე $A \wedge B \wedge C$ ნამრავლის ჭეშმარიტების არე.

3) გამოთვალე: ა) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$; ბ) $\sqrt{12} : \sqrt[4]{9} - (0,25)^{-\frac{1}{2}}$.

4) მოცემულია ორი შუალედი: $A = (\sqrt{7}; \pi)$, $B = \left[3,14; \frac{22}{7}\right]$. ჩაწერე შუალედის სახით:

ა) $A \cup B$; ბ) $A \cap B$.

5) რა თანხა დაუგროვდება გიას ანგარიშზე 4 წლის ბოლოს, თუ ყოველი წლის დასაწყისში ანგარიშზე შეაქვს 200 ლარი, ხოლო წლიური საპროცენტო დარიცხვაა 5%.

II ვარიანტი

1) მოცემულია ორი პირობითი გამონათქვამი:

A: თუ გია ფრენბურთელია, მაშინ ბესოც ფრენბურთელია;

B: თუ გია არაა ფრენბურთელი, მაშინ ბესოც არაა ფრენბურთელი.

თუ მოცემული ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მაშინ ქვემოთ ჩამოთვლილი გამონათქვამებიდან რომელია ჭეშმარიტი?

ა)გია ფრენბურთელია; ბ) ბესო არაა ფრენბურთელი;

გ) გია არაა ფრენბურთელი და ბესო ფრენბურთელია;

დ) გია მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ფრენბურთელი, როცა ბესო ფრენბურთელია;

ე) გია ფრენბურთელია და ბესო არაა ფრენბურთელი;

ვ) არცერთი. (პასუხი დაასაბუთე)

2) მოცემულია სამი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: x მარტივი რიცხვია; B: y მარტივი რიცხვია; C: x^2-y^2 მარტივი რიცხვია.

დაადგინე $A \wedge B \wedge C$ ნამრავლის ჭეშმარიტების არე.

3) გამოთვალე: ა) $27^{\frac{2}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; ბ) $\sqrt{8} : \sqrt[4]{4} - \left(0{,}125\right)^{-\frac{1}{3}}$.

4) მოცემულია ორი შუალედი: $A = \left(3{,}14; \frac{22}{7}\right)$, $B = \left[\sqrt{8}; \pi\right]$. ჩაწერე შუალედის სახით:

ა) $A \cup B$; ბ) $A \cap B$.

5) რა თანხა დაუგროვდება გიას ანგარიშზე 4 წლის ბოლოს, თუ ყოველი წლის დასაწყისში ანგარიშზე შეაქვს 400 ლარი, ხოლო წლიური საპროცენტო დარიცხვაა 5%.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

1. პასუხი (ე) – 1 ქულა;
   დასაბუთება (მოცემული გამონათქვამების ჭეშმარიტება ნიშნავს, რომ გამონათქვამები „ანი ფრენბურთელია“ და „ბელა ფრენბურთელია“ ტოლფასი გამონათქვამებია) – 1 ქულა; სულ 2 ქულა.
2. დაწერა $n = m - 1$ - 1 ქულა;
   პასუხი (m=3, n=2) - 1 ქულა; სულ 2 ქულა.
3. თითოეულ პასუხში (ა) 64; ბ) 0) –თითო ქულა; სულ 2 ქულა.
4. თითოეულ პასუხში (ა) $\left(\sqrt{7}; \frac{22}{7}\right]$; ბ) $[3{,}14; \pi)$) –თითო ქულა; სულ 2 ქულა.
5. დაწერა გეომეტრიული პროგრესიის რომელიმე წევრი (მაგ. $200 \cdot 1{,}05$))-1 ქულა;

   გაამოთვალა მიახლოებითი პასუხი (მაგ.905,1ლარი) (დასაშვებია კალკულატორის გამოყენება)

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
ტიგონომეტრიული გამოსახულების გამოთვლა	არ იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები .	იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები გრადუსული ზომისთვის, მაგარამ არ იცის რიცხვითი არგუმენტის შემთხვევაში.	იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები როგორც რიცხვითი, ისე გრადუსული არგუმენტისთვის, მაგრამ გამოთვლაში უშვებს შეცდომას.	იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები როგორც რიცხვითი, ისე გრადუსული არგუმენტისთვის, სწორად ითვლის გამოსახულების მნიშვნელობას.
ლუწ-კენტობა და დაყვანის ფორმულები	არ იცის არც ლუწ-კენტობა და არც დაყვანის ფორმულები.	იცის ლუწ-კენტობა მაგრამ არ იცის დაყვანის ფორმულები.	იცის ფორმულები მაგრამ გამოთვლაში უშვებს შეცდომას.	იცის ფორმულები და სწორად ითვლის მნიშვნელობებს.
კავშირები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის და ტრიგონომეტრიული გამოსახულების გამარტივება	არ იცის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირი, ვერ ასრულებს გარდაქმნებს.	იცის ერთი და იმავე ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირი, მაგრამ ვერ იყენებს ამოცანის ამოსახსნელად.	სწორად იყენებს კავშირებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის,სწორად ასრულებს გარდაქმნებს, თუმცა აქვს მცირედი ხარვეზები.	უშეცდომოდ აკავშირებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და ასრულებს საჭირო გარდაქმნებს.

შემაჯამებელი სამუშაო №2

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, ტრიგონომეტრიული განტოლებები

I ვარიანტი

1) იპოვე $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha = 0,2$ და $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
2) იპოვე $y = 3\sin^2 x - 2\cos^2 x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა;
3) იპოვე $y = \sin 2x - \mathrm{tg}x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი;
4) ამოხსენი განტოლება: ა) $\sin x=0$; ბ) $\cos x=\frac{1}{2}$.
5) იპოვე $\mathrm{tg}x=1$ განტოლების $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი;

II ვარიანტი

1) იპოვე $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha = -0,2$ და $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
2) იპოვე $y = 2\sin^2 x - 3\cos^2 x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა;
3) იპოვე $y = \cos 2x + \mathrm{tg}x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი;
4) ამოხსენი განტოლება: ა) $\cos x=0$; ბ) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5) იპოვე $\mathrm{tg}x=\sqrt{3}$ განტოლების $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი;

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

.

1. თითოეულ პასუხში თითო ქულა;
   სულ 2 ქულა
2. დაიყვანა ერთ ფუნქციაზე ან გამოთვალა უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა 1 ქულა;
   გამოთვალა ორივე მნიშვნელობა (3 და -2) – 2ქულა;
   სულ 2 ქულა.
3. აღნიშნა თითოეული შესაკრების პერიოდი –1 ქულა;
   პასუხი– 2 ქულა;
   სულ 2 ქულა.
4. თითოეული განტოლების ამოხსნაში თითო ქულა;
   სულ 2 ქულა;
5. დაწერა ერთ-ერთი ან ზოგადი ამონახსნი – 1 ქულა;
   იპოვა საძიებელი ამონახსნი $\frac{5\pi}{4}$ -2 ქულა;
   სულ 2 ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
ტიგონომეტრიული ფუნქციები, მათი განსაზღვრის არეები და მნიშვნელობათა სიმრავლეები	არ იცის როგორ იპოვოს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არეები და მნიშვნელობათა სიმრავლეები.	ახერხებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენას.	იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა. ითვლის მცირე ხარვეზებით.	კარგად იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა. ადგენს უშეცდომოდ და თანმიმდევრულად.
ტიგონომეტრიული ფუნქვიების ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების გამოთვლა	ვერ იაზრებს ფუნქციის ლუწ-კენტობის, პერიოდულობის ცნებებს, ვერ ითვლის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს.	ახერხებს ფუნქციის ლუწ-კენტობის დადგენას, მაგრამ ვერ ახერხებს პერიოდულობის დადგენას.	იცის ტიგონომეტრიული ფუნქვიების ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების გამოთვლა, მაგრამ უშვებს შეცდომას.	იცის ტიგონომეტრიული ფუნქვიების ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების გამოთვლა და უშეცდომოდ ითვლის.
კავშირები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის. ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნა.	არ იცის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირები, ვერ ხსნის განტოლებას.	იცის ერთი და იმავე ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირები, მაგრამ ეშლება განტოლების ფესვთა ფორმულები.	სწორად იყენებს კავშირებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის, მცირე ხარვეზებით ხსნის განტოლებას.	უშეცდომოდ აკავშირებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და უპრობლემოდ ხსნის განტოლებას..

შემაჯამებელი სამუშაო №3

სამკუთხედების ამოხსნა

I ვარიანტი

1) გამოთვალე ABC სანკუთხედის AB გვერდი, თუ BC =5სმ, AC =8სმ, ხოლო $\cos\angle C = \frac{1}{4}$
2) გამოთვალე ABCD პარალელოგრამის AC დიაგონალი, თუ AB =5სმ, BC =6სმ, ხოლო BD =4სმ.
3) გამოთვალე ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ $AB = 4\sqrt{2}$ სმ, $\cos\angle C = -\frac{1}{3}$.
4) სამკუთხედის გვერდებია 5სმ, 6სმ, 7სმ. გამოთვალე სამკუთხედი უდიდესი კუთხის სინუსი.
5) გამოთვალე სამკუთხედის უმცირესი სიმაღლე, თუ მისი გვერდებია 3სმ, 4სმ, 5სმ.

II ვარიანტი

1) გამოთვალე AB გვერდი, თუ BC =4სმ, AC =6სმ, ხოლო $\cos\angle C = \frac{1}{8}$.
2) გამოთვალე ABCD პარალელოგრამის AC დიაგონალი, თუ AB =6სმ, BC =4სმ, ხოლო BD =5სმ.
3) გამოთვალე ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ $AB = 4\sqrt{3}$ სმ, $\cos\angle C = -\frac{1}{2}$.
4) სამკუთხედის გვერდებია 4სმ, 5სმ, 6სმ. გამოთვალე სამკუთხედი უმცირესი კუთხის სინუსი.
5) გამოთვალე სამკუთხედის უმცირესი სიმაღლე, თუ მისი გვერდებია 6სმ, 8სმ, 10სმ.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

1. დაწერა კოსინუსების თეორემა – 1 ქულა;
   მიიღო პასუხი($\sqrt{69}$) – 2 ქულა;
   სულ 2 ქულა.

2. დაწერა პარალელოგრამში შესაბამისი ტოლობა – 1ქულა
   პასუხი$\left(\sqrt{106}\right)$– 2 ქულა;
   სულ 2 ქულა.

3. გამოთვალა კუთხის სინუსი $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ –1 ქულა;
   გამოთვალა რადიუსი (3) – 2 ქულა;
   სულ 2 ქულა.

4. გამოთვალა კუთხის კოსინუსი (0,2) ან სამკუთხედის ფართობი ($6\sqrt{6}$) – 1ქულა;

პასუხი ($\left(0,4\sqrt{6}\right)$ –2 ქულა;

სულ 2 ქულა.

5. გამოთვალა სამკუთხედის ფართობი (6)(ჰერონით ან მიხვდა, რომ მართკუთხაა) – 1ქულა;
   პასუხი (2,4) — 2 ქულა;
   სულ 2 ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
ტიგონომეტრიული ფუნქციები, მათი განსაზღვრის არეები და მნიშვნელობათა სიმრავლეები	არ იცის როგორ იპოვოს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არეები და მნიშვნელობათა სიმრავლეები.	ახერხებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენას.	იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა. ითვლის მცირე ხარვეზებით.	კარგად იცის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა. ადგენს უშეცდომოდ და თანმიმდევრულად.
სამკუთხედების ამოხსნა (პითაგორას თეორემა, სინუსების თეორემა, კოსინუსების თეორემა.	ვერ იაზრებს ამოცანის პირობას, ვერ ფლობს სამკუთხედის ამოხსნის გზებსა და ხერხებს ტრიგონომეტრიის გამოყენებით.	ახერხებს ამოცანის პირობის გააზრებას, დაწერა სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები (ფორმულები), მაგრამ არასწორი სტრატეგია შეარჩია.	შეუძლია სამკუთხედების ამოხსნა. სათანადოდ იყენებს პითაგორას თეორემას, სინუსების თეორემას, კოსინუსების თეორემას.	უპრობლემოდ შეუძლია სამკუთხედების ამოხსნა. სათანადოდ იყენებს პითაგორას თეორემას, სინუსების თეორემას, კოსინუსების თეორემას. მსჯელობს ლაკონურად, მკაცრად და თანმიმდევრულად.
სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა ტრიგონომეტრიის გამოყენებით	ვერ ახერხებს სამკუთხედის ფართობის გამოთვლას ტრიგონომეტრიის გამოყენებით	იცის, თუ როგორ გამოთვალოს სამკუთხედის ფართობი, მაგრამ არასწორად ხსნის ამოცანას.	იცის, თუ როგორ გამოთვალოს სამკუთხედის ფართობი, წორად ხსნის ამოცანას.	იცის, თუ როგორ გამოთვალოს სამკუთხედის ფართობი. წორად და ხარვეზების გარეშე ხსნის ამოცანას.

შემაჯამებელი სამუშაო №4

დახრილი და გეგმილი

I ვარიანტი

1.იპოვე კუბის დიაგონალსა და წახნაგს შორის კუთხის კოსინუსი.

2. სიბრტყის გარეთ მდებარე A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებული AB დახრილი სიბრტყესთან ადგენს კუთხეს, რომლის ტანგენსი 0,75-ის ტოლია. იპოვე მანძილი A წერტილიდან სიბრტყემდე, თუ AB=10სმ.

3. სიბრტყის გარეთ მდებარე A წერტილიდან, სიბრტყისადმი გავლებულია AB და AC ტოლი დახრილები. დახრილებს შორის კუთხე 60°-ის, ხოლო მათ გეგმილებს შორის 90° – ის ტოლია. იპოვე დახრილების სიბრტყესთან კუთხის სიდიდე.

4. ABCD კვადრატის A წვეროდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია AK მართობი. KB=8სმ, ხოლო KC=10სმ. გამოთვალე AK მონაკვეთის სიგრძე.

II ვარიანტი

1. იპოვე კუბის დიაგონალსა და წახნაგს შორის კუთხის სინუსი.

2. სიბრტყის გარეთ მდებარე A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებული AB დახრილი სიბრტყესთან ადგენს კუთხეს, რომლის ტანგენსი 2,4-ის ტოლია. იპოვე მანძილი A წერტილიდან სიბრტყემდე, თუ AB=13სმ.

3. სიბრტყის გარეთ მდებარე M წერტილიდან, სიბრტყისადმი გავლებულია MN და MK ტოლი დახრილები. დახრილებს შორის კუთხე 60°-ის ტოლია, ხოლო მათ გეგმილებს შორის 90° – ის. იპოვე დახრილების სიბრტყესთან კუთხის სიდიდე.

4. ABCD კვადრატის A წვეროდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია AK მართობი. KB=12სმ, ხოლო KC=13სმ. გამოთვალე AK მონაკვეთის სიგრძე.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

1. მონიშნა საძიებელი კუთხე – 1 ქულა;
   მიიღო პასუხი($\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$) – 1 ქულა;
   სულ 2 ქულა.
2. ნახაზი კუთხის მითითებით – 1ქულა;
   პასუხი (6სმ)– 1 ქულა;
   სულ 2 ქულა.
3. ნახაზი კუთხეთა მითითებით –1 ქულა;
   საძიებელი კუთხის შემცველ სამკუთხედში გვერდების ერთი პარამეტრით გამოსახვა (მაგალითად, a და $\frac{a}{\sqrt{2}}$) –1ქულა
   პასუხი (45°) – 1 ქულა;
   სულ 3 ქულა.
4. ნახაზი საჭირო მართი კუთხეების მითითებით – 1ქულა;
   კვადრატის გვერდის გამოთვლა – 1ქულა;
   პასუხი $\left(\sqrt{28}\right)$ –1 ქულა; სულ 3 ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
დავალების გააზრება, სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები, აქსიომები და მათი შედეგები	ვერ იაზრებს სტერეომეტრიის ძირითად ცნებებს, აქსიომებსა და მათ შედეგებს.	ახერხებს დავალების ნაწილობრივ გააზრებას, ცდილობს სტერეომეტრიული ცნებებისა და დებულებების გამოყენებას.	კარგად აქვს დავალება გააზრებული. სწორად იყენებს ცნებებსა და დებულებებს,თუმცა, დასაბუთება ზოგჯერ არათანმიმდევრულია.	კარგად აქვს დავალება გააზრებული. სწორად იყენებს ცნებებსა და დებულებებს. მსჯელობს და ასაბუთებს ლოგიკურად, არგუმენტირებულად.
დახრილი და გეგმილი, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის, მანძილი წრფესა და სიბრტყეს შორის	არა აქვს სივრცის აღქმის სათანადო უნარი. ვერ ხედავს სიბრტყისადმი დახრილსა და მის გეგმილს, კუთხეს წრფესა და სიბრტყეს შორის.	ახერხებს სიბრტყისადმი დახრილისა და მისი გეგმილის, წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის დანახვას, თუმცა, სწორად ვერ განსაზღვრა საძიებელი კუთხე	კარგად აქვს განვითარებული სივრცის აღქმის უნარი. სწორად ხედავს სიბრტყისადმი დახრილსა და მის გეგმილს ამ სიბრტყეზე, კუთხეს წრფესა და სიბრტყეს შორის.	უპრობლემოდ ასრულებს დავალებას. იცის რა არის დახრილი და მისი გეგმილი სიბრტყეზე, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის, მანძილი წრფესა და სიბრტყეს შორის, სწორად განსაზღვრა საძიებელი კუთხე.
ნახაზის აგება ამოცანის პირობის მიხედვით	ვერ აგებს ამოცანისათვის საჭირო ნახაზს.	ახერხებს ამოცანისათვის საჭირო ნახაზის აგებას, მაგრამ შეცდომას უშვებს კუთხეთა მითითებაში.	სწორად აგებს ამოცანისათვის საჭირო ნახაზს კუთხეთა მითითებით.	უშეცდომოდ აგებს ნახაზს, სწორად უთითებს კუთხეებს.

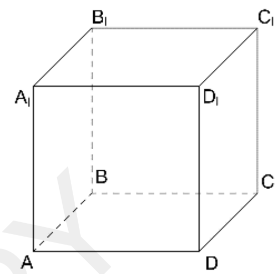
შემაჯამებელი სამუშაო №5

ორწახნაგა კუთხე, ობოექტებს შორის მანძილი

I ვარიანტი

1.ABC და ABD ტოლგვერდა სამკუთხედები $60°$-იან ორწახნაგა კუთხეს ქმნიან. იპოვე მანძილი C და D წვეროებს შორის, თუ $AB = 4\sqrt{3}$ სმ.

2. ABCD კვადრატის O ცენტრიდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართული OK მართობის სიგრძეა 3სმ. გამოთვალე კვადრატის ფართობი, თუ AK=5სმ.



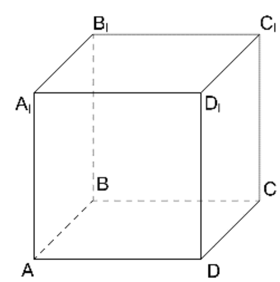
3. ნახაზზე მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. იპოვე ADC და AD_1C სამკუთხედებს შორის ორწახნაგა კუთხის ტანგენსი.

4.კუბის წიბო a-ს ტოლია. იპოვე მანძილი A წვეროდან A_1C დიაგონალამდე (იხ. ნახაზი).

II ვარიანტი

1. ABC და ABD ტოლგვერდა სამკუთხედები $60°$-იან ორწახნაგა კუთხეს ქმნიან. იპოვე მანძილი C და D წვეროებს შორის, თუ $AB = 2\sqrt{3}$ სმ.

2. ABCD კვადრატის O ცენტრიდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართული OM მართობის სიგრძეა 8სმ. გამოთვალე კვადრატის ფართობი, თუ AM=10სმ.



3. ნახაზზე მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. იპოვე ABD და A_1BD სამკუთხედებს შორის ორწახნაგა კუთხის ტანგენსი.

4. კუბის წიბო a-ს ტოლია. იპოვე მანძილი D წვეროდან D_1B დიაგონალამდე (იხ. ნახაზი).

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

1. ნახაზი ხაზოვანი კუთხის მითითებით – 1 ქულა;
   პასუხი (6სმ) – 1 ქულა;
   სულ 2 ქულა.
2. ნახაზი მოცემული მონაკვეთების მითითებით – 1ქულა;
   OA მონაკვეთის გამოთვლა (4სმ) –1 ქულა;
   პასუხი (32სმ²)– 1 ქულა;
   სულ 3 ქულა.
3. ნახაზი საძიებელი ხაზოვანი კუთხის მითითებით –1 ქულა;
   საძიებელი კუთხის შემცველ სამკუთხედში გვერდების ერთი პარამეტრით გამოსახვა (მაგალითად, a და $\frac{a}{\sqrt{2}}$) –1ქულა
   პასუხი ($\sqrt{2}$) – 1 ქულა;
   სულ 3 ქულა.
4. ნახაზი საძიებელი მონაკვეთის მითითებით – 1ქულა;
   პასუხი $\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$–1 ქულა; სულ 2 ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
დავალების გააზრება, ორწახნაგა კუთხე, კუთხე სიბრტყეებს შორის, სიბრტყეთა მართობულობა	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ხედავს ორწახნაგა კუთხეს., მართობულ სიბრტყეებს.	ახერხებს დავალების გააზრებას, ორწახნაგა კუთხის წაკითხვას, მართობული სიბრტყეების დანახვას.	სწორად იაზრებს ამოცანის პირობას. ხედავს ორწახნაგა კუთხეს და ითვლის ხაზოვანი კუთხის სიდიდეს, ხედავს მართობულ სიბრტყეებს.	უშეცდომოდ, ხარვვეზების გარეშე ხსნის ამოცანებს.
მანძილები სივრცეში	არ იცის რას წარმოადგენს ორ ფიგურას შორის მანძილი სივრცეში.	სწორად აღიქვამს ორ ფიგურას შორის მანძილს სივრცეში, თუმცა, ზოგჯერ გამოთვლა არასწორი აქვს.	სწორად აღიქვამს ორ ფიგურას შორის მანძილს სივრცეში.	სწორად აღიქვამს ორ ფიგურას შორის მანძილს სივრცეში. ამოცანას ხსნის მკაცრი, ლოგიკური, თანმიმდევრული მსჯელობით.
ნახაზის აგება ამოცანის პირობის მიხედვით	ვერ აგებს ამოცანისათვის საჭირო ნახაზს.	ახერხებს ამოცანისათვის საჭირო ნახაზის აგებას, მაგრამ შეცდომას უშვებს კუთხეთა მითითებაში.	სწორად აგებს ამოცანისათვის საჭირო ნახაზს კუთხეთა მითითებით.	უშეცდომოდ აგებს ნახაზს, სწორად უთითებს კუთხეებს.

შემაჯამებელი სამუშაო №6

მაჩვენებლიანი ფუნქცია და მაჩვენებლიანი განტოლება

I ვარიანტი

1. რომელია მეტი?

ა) $1{,}1^{0{,}7}$ თუ $1{,}1^{\frac{3}{4}}$;   ბ) $0{,}9^{-3}$ თუ 1. (პასუხი დაასაბუთე)

2. ამოხსენი განტოლება:

ა) $4^x = 32$;   ბ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-2x} = 1{,}5$;   გ) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 10$;   დ) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

3 . გამოთვალე $y = 9^{x+1} - 27$ ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები.

II ვარიანტი

1. რომელია მეტი?

ა) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ თუ $0{,}8^{0{,}5}$;   ბ) $1{,}2^{-3}$ თუ 1. (პასუხი დაასაბუთე)

2.ამოხსენი განტოლება:

ა) $9^x = 27$;   ბ) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^{-2x} = 1{,}25$;   გ) $3^{x+1} - 3^{x-1} = 8$;   დ) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

3 . გამოთვალე $y = 4^{x+2} - 32$ ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

1. თითოეული დასაბუთებული პასუხისთვის თოთო ქულა.
   სულ 2ქულა.

2. ა)-სა და ბ)-ს ამოხსნებში თითო ქულა; გ)-სა და დ) -ს ამოხსნებში 2-2 ქულა.
   სულ 6 ქულა.

3. თითოეულ ღერძთან გადაკვეთის კოორდინატების პოვნაში თითო ქულა.
   სულ 2ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს დავალების შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს დავალების შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მაჩვენებლიანი ფუნქცია და მისი თვისებები	ვერ ახერხებს დავალების შესრულებას, რადგან არ იცის მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები.	ნაწილობრივ ახერხებს დავალების შესრულებას, მაგრამ ირჩევს არასწორ სტრატეგიას.	შეუძლია დავალების შესრულება მაჩვენებლიანი ფუნქციისა და მისი თვისებების გამოყენებით. მსჯელობს არამკაცრად.	კარგად ფლობს მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებებს. უპრობლემოდ შეუძლია დავალების შესრულება. მსჯელობს ლაკონურად, მკაცრად და თანმიმდევრულად.
მაჩვენებლიანი განტოლება	ვერ ახერხებს მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნას.	იცის, თუ როგორ ამოხსნას მაჩვენებლიანი განტოლება, მაგრამ ამოხსნისას უშვებს შეცდომას.	იცის, თუ როგორ ამოხსნას მაჩვენებლიანი განტოლება და წორად პოულობს ამონახსნებს.	უშეცდომოდ, ხარვეზების გარეშე ხსნის მაჩვენებლიან განტოლებას.

შემაჯამებელი სამუშაო №7

ლოგარითმის თვისებები და ლოგარითმული ფუნქცია
I ვარიანტი

1. გამოთვალე: ა) $\log_{\sqrt{2}} 8$; ბ) $\lg 0,01$; გ) $4^{\log_2 7}$; დ) $\log_3 3,6 - \log_3 4 + \log_3 10$.
2. რომელია მეტი?

   ა) $\log_5 \sqrt{7}$ თუ $\log_5 3$; ბ) $2^{\log_3 0,3}$ თუ 1. (პასუხი დაასაბუთე)
3. ამოხსენი განტოლება: $\lg(x-4) + 2\lg 5 = 1 + \lg 15$.
4. იპოვე $y = \log_7 (x^2 - 4x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

II ვარიანტი

1. გამოთვალე: ა) $\log_{\sqrt{3}} 9$; ბ) $\lg 0,1$; გ) $9^{\log_3 7}$; დ) $\log_2 1,2 - \log_2 3 + \log_2 10$.
2. რომელია მეტი?

   ა) $\log_4 3$ თუ $\log_4 \sqrt{6}$; ბ) $3^{\log_2 0,2}$ თუ 1. (პასუხი დაასაბუთე)
3. ამოხსენი განტოლება: $\lg(x-6) + 3\lg 2 = 1 + \lg 12$.
4. იპოვე $y = \log_3 (x^2 - 7x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

1. თითოეული პასუხისათვის 1 ქულა.
   სულ 4 ქულა.

2. თითოეული დასაბუთებული პასუხისთვის თოთო ქულა.
   სულ 2ქულა.

3. წრფივ განტოლებაზე მიყვანისთვის (მაგ. $25(x-4)=150$) –1 ქულა;
   პასუხი (10) – 1 ქულა.
   სულ 2 ქულა.

4. $x^2-4x>0$ უტოლობის ჩაწერაში – 1 ქულა;
   პასუხი ($(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$) – 1 ქულა.
   სულ 2 ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს დავალების შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს დავალების შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
ლოგარითმული ფუნქცია და მისი თვისებები	ვერ ახერხებს დავალების შესრულებას, რადგან არ იცის ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები.	ნაწილობრივ ახერხებს დავალების შესრულებას, მაგრამ ირჩევს არასწორ სტრატეგიას.	შეუძლია დავალების შესრულება ლოგარითმული ფუნქციისა და მისი თვისებების გამოყენებით. მსჯელობს არამკაცრად.	კარგად ფლობს ლოგარითმული ფუნქციის თვისებებს. უპრობლემოდ შეუძლია დავალების შესრულება. მსჯელობს ლაკონურად, მკაცრად და თანმიმდევრულად.
ლოგარითმული განტოლება	ვერ ახერხებს ლოგარითმული განტოლების ამოხსნას.	იცის, თუ როგორ ამოხსნას ლოგარითმული განტოლება, მაგრამ ამოხსნისას უშვებს შეცდომას.	იცის, თუ როგორ ამოხსნას ლოგარითმული განტოლება და წორად პოულობს ამონახსნებს.	უშეცდომოდ, ხარვეზების გარეშე ხსნის ლოგარითმულ განტოლებას.

შემაჯამებელი სამუშაო №8

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

I ვარიანტი

1. ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-4x+2} \geq 2,5$;   ბ) $5^{\frac{x+1}{x}} < 0,2$;   გ) $\log_{0,5}(2x-8) > -1$;   დ) $\log_3\left(25-x^2\right) > 2$.

2. ქალაქში, სადაც ამჟამად 250 000 მოსახლეა, მოსახლეობის რაოდენობა ყოველ-წლიურად საშუალოდ 20%-ით იზრდება. რამდენი წლის შემდეგ გადააჭარბებს მოსახლეობის რაოდენობა 1 მილიონს?

II ვარიანტი

1. ამოხსენი უტოლობა:

ბ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x+2} \geq 1,5$;   ბ) $2^{\frac{x+1}{x}} < 0,5$;   გ) $\log_{0,2}(4x-7) > -1$;   დ) $\log_5\left(29-x^2\right) > 2$.

2. ქალაქში, სადაც ამჟამად 100 000 მოსახლეა, მოსახლეობის რაოდენობა ყოველ-წლიურად საშუალოდ 20%-ით იზრდება. რამდენი წლის შემდეგ გადააჭარბებს მოსახლეობის რაოდენობა ნახევარ მილიონს?

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა

1. ალგებრულ უტოლობაზე ან/და უტოლობათა სისტემაზე დაყვანისთვის თითო ქულა;
   პასუხისათვის 1 ქულა.
   სულ 8 ქულა.

2. ამოცანის შესაბამისი უტოლობის ან განტოლების შედგენაში 1 ქულა;
   პასუხისთვის(8 წლის) 1 ქულა.
   სულ 2ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ ალიქვამს დავალების შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ალიქვამს დავალების შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად ალიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მაჩვენებლიანი უტოლობა და მისი ამოხსნა	ვერ ახერხებს მაჩვენებლიანი უტოლობის ამოხსნას.	უტოლობათა სისტემაზე დაყვანის გზით ხსნის მაჩვენებლიან უტოლობას, მარამს უშვებს შეცდომას.	ადგენს ალგებრულ უტოლობას, ხსნის სწორად, მაგრამ მსჯელობს არამკაცრად.	ადგენს ალგებრულ უტოლობას, ხსნის სწორად, მსჯელობს ლოგიკურად,არამკაცრად და თანმიმდევრულად..
ლოგარითმულიუტოლობა და მისი ამოხსნა	ვერ ახერხებს ლოგარითმული უტოლობის ამოხსნას.	ამოცანის ამოსახსნელად ადგენს პირობის შესაბამის განტოლებას, მაგრამ წერს არასწორ პასუხს.	ამოცანის ამოსახსნელად ადგენს პირობის შესაბამის უტოლობას, მაგრამ ხსნის ხარვეზებით.	ამოცანის ამოსახსნელად ადგენს პირობის შესაბამის უტოლობას, ხსნის სწორად, მსჯელობს ლოგიკურად,არამკაცრად და თანმიმდევრულად..

შემაჯამებელი სამუშაო №9

ვექტორები

I ვარიანტი

1. საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია $A(1;3;-4)$ და $B(4;7;8)$ წერტილები. გამოთვალე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის: ა) კოორდინატები; ბ) სიგრძე.
2. მოცემულია $\vec{a}(-4;0;3;)$ და $\vec{b}(-6;8;0)$ ვექტორები. გამოთვალე $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორზე სკალარული ნამრავლი.
3. ABC სამკუთხედში O მედიანების გადაკვეთის წერტილია. გამოსახე $\overrightarrow{AO}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების საშუალებით.
4. წერტილზე მოქმედებს ორი ძალა, რომელთა შორის კუთხეა $60°$. ერთი ძალის სიდიდეა 4 ნიუტონი, მეორე ძალის სიდიდე – 6 ნიუტონი. გმოთვალე ამ ორი ძალის ტოლქმედი ძალის სიდიდე.
5. გამოთვალე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (2;6), ხოლო $\overrightarrow{AC}$ ვექტორის კოორდინატები – (-9;3).

II ვარიანტი

1. საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია $A(2;4;-3)$ და $B(5;8;9)$ წერტილები. გამოთვალე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის: ა) კოორდინატები; ბ) სიგრძე.
2. მოცემულია $\vec{a}(-7;3;0;)$ და $\vec{b}(0;1;-1)$ ვექტორები. გამოთვალე $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორზე სკალარული ნამრავლი.
3. ABC სამკუთხედში O მედიანების გადაკვეთის წერტილია. გამოსახე $\overrightarrow{BO}$ ვექტორი $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების საშუალებით.
4. წერტილზე მოქმედებს ორი ძალა, რომელთა შორის კუთხეა $60°$. ერთი ძალის სიდიდეა 2 ნიუტონი, მეორე ძალის სიდიდე – 3 ნიუტონი. გმოთვალე ამ ორი ძალის ტოლქმედი ძალის სიდიდე.
5. გამოთვალე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (1;3), ხოლო $\overrightarrow{AC}$ ვექტორის კოორდინატები – (9;-3).

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

1. კოორდინატების გამოთვლაში – 1 ქულა;
   სიგრძის გამოთვლაში (13) – 1.
   სულ 2ქულა.

2. ჩაწერა სიგრძეთა კვადრატების სხვაობა ან ჩაწერა ვექტორთა ჯამისა და სხვაობის კოორდინატები -1 ქულა;
   გამოთვალა სკალარული ნამრავლი (-75) – 1ქულა.
   სულ 2ქულა.

3. ჩაწერა $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, სადაც M არის BC გვერდის შუა წერტილი, ან გამოსახა $\overrightarrow{AM}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების საშუალებით– 1ქულა;
   გამოსახა $\overrightarrow{AO}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების საშუალებით ($\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$) – 1ქულა.
   სულ 2ქულა.

4. შეადგინა ნახაზი და მიუთითა ტოლქმედი ძალა –1 ქულა;
   იპოვა საძიებელი სიდიდე ($2\sqrt{19}$ ნ) - 1.
   სულ 2ქულა.

5. იპოვა ვექტორებს შორის კუთხე ($90°$) ან ვექტორების სიგრძე ($2\sqrt{10}$ და $3\sqrt{10}$) – 1 ქულა;
   გამოთვალა ფართობი (30) – 1 ქულა.
   სულ 2 ქულა.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს დავალების შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს დავალების შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში, წერტილებს შორის მანძილის გამოთვლა. წრფივი მოქმედებები ვექტორებზე	ვერ ახერხებს ვექტორის კოორდინატებისა და ვექტორებზე მოქმედებების (ვექტორთა ჯამი, სხვაობა, რიცხვზე ნამრავლი) ჩაწერას.	ახერხებს ვექტორის კოორდინატებისა და ვექტორებზე მოქმედებების (ვექტორთა ჯამი, სხვაობა, რიცხვზე ნამრავლი) ჩაწერას.	პოულობს ვექტორის კოორდინატებს, სწორად ასრულებს ვექტორებზე მოქმედებებს.	უშეცდომოდ და უპროპლემოდ პოულობს ვექტორის კოორდინატებს, სწორად ასრულებს ვექტორებზე მოქმედებებს.
ვექტორებს შორის კუთხისა და ვექტორის სიგრძის გამოთვლა კოორდინატების გამოყენებით	ვერ ახერხებს ვექტორებს შორის კუთხისა და ვექტორის სიგრძის გამოთვლას კოორდინატების გამოყენებით.	ვერ ახერხებს ვექტორებს შორის კუთხისა და ვექტორის სიგრძის გამოთვლას კოორდინატების გამოყენებით.	სწორად ითვლის ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდესა და ვექტორის სიგრძეს კოორდინატების გამოყენებით.	უშეცდომოდ და უხარვეზოდ ითვლის ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდესა და ვექტორის სიგრძეს კოორდინატების გამოყენებით.

შემაჯამებელი სამუშაო №10

სტატისტიკა და ალბათობა

I ვარიანტი

1. სიხშირეთა ცხრილში მოცემულია კატოს მიერ მიღებული შეფასებები ერთ საგანში:

შეფასება	5	8	9	10
სიხშირე	1	2	1	1

ცხრილის მიხედვით:

ა) გამოთვალე მონაცემთა მედიანა;

ბ) შეადგინე დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი;

გ) შეადგინე დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი;

დ)გამოთვალე მონაცემთა საშუალო;

ე) გამოთვალე მონაცემთა სტანდარტული გადახრა.

2. ყუთში 10 თეთრი და 5 შავი ბურთია. თანმიმდევრობით იღებენ ჯერ ერთ, შემდეგ მეორე ბურთს. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ამოღებული პირველი ბურთი თეთრია;

ბ) ამოღებული პირველი ბურთი შავია;

გ) ამოღებული ორივე ბურთი თეთრია;

დ) ამოღებული მეორე ბურთი შავია იმ პირობით, რომ ამოღებული პირველი ბურთი თეთრია;

ე) ამოღებული ბურთები სხვადასხვა ფერისაა.

II ვარიანტი

1. სიხშირეთა ცხრილში მოცემულია კოტეს მიერ მიღებული შეფასებები ერთ საგანში:

შეფასება	5	8	9	10
სიხშირე	1	2	1	1

ცხრილის მიხედვით:
ა) გამოთვალე მონაცემთა მედიანა;
ბ) შეადგინე დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი;
გ) შეადგინე დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი;
დ)გამოთვალე მონაცემთა საშუალო;
ე) გამოთვალე მონაცემთა სტანდარტული გადახრა.

2. ყუთში 6 თეთრი და 4 შავი ბურთია. თანმიმდევრობით იღებენ ჯერ ერთ, შემდეგ მეორე ბურთს. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ:
ა) ამოღებული პირველი ბურთი თეთრია;
ბ) ამოღებული პირველი ბურთი შავია;
გ) ამოღებული ორივე ბურთი თეთრია;
დ) ამოღებული მეორე ბურთი შავია იმ პირობით, რომ ამოღებული პირველი ბურთი თეთრია;
ე) ამოღებული ბურთები სხვადასხვა ფერისაა.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების სქემა:

1. ა) მედიანის გამოთვლა (8) – 1 ქულა;

ბ) დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილის შედგენა –1 ქულა;

გ) დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილის შედგენა – 1 ქულა;

დ) საშუალოს გამოთვლა (8) – 1ქულა;

ე) სტანდარტული გადახრის გამოთვლა ($\sqrt{2{,}8}$) –1ქულა.

სულ 5ქულა.

2. ა) პასუხი ($\frac{2}{3}$) -1 ქულა; ბ) პასუხი ($\frac{1}{3}$) -1 ქულა;

გ) ამოხსნის რამდენიმე გზა არსებობს. კომბინატორიკით: $\frac{C_{10}^{2}}{C_{15}^{2}}=\frac{3}{7}$.

ფორმულით: $p(AB)=p(B/A)p(A)=\frac{9}{14}\cdot\frac{10}{15}=\frac{3}{7}$ სადაც A — პირველად თეთრის ამოღება, ხოლო B - მეორედ თეთრის ამოღებაა. იგივე მიიღება შესაბამისი მსჯელობით.

დ) დარჩენილი 14 ბურთიდან გვაწყობს 5 . პასუხი: $\frac{5}{14}$. – 1ქულა.

ე) აქაც ამოხსნის რამდენიმე გზა არსებობს. კომბინატორიკით: $\frac{C_{10}^1 \cdot C_5^1}{C_{15}^2} = \frac{10}{21}$;

შემთხვევების განხილვით: თშ+შთ, ანუ $\frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{10}{21}$. – 1ქულა.

სულ 5 ქულა

შენიშვნა. თვალსაჩინოებისათვის სასურველია, მოცემული შემთხვევითი ექსპერიმენტისთვის აიგოს ხისებრი დიაგრამა. ხისებრი დიაგრამის მეთოდით ანალოგიურ ამოცანებს ვიხილავდით მე-9 და მე-10 კლასებში.

შემაჯამებელი სამუშაოს განმავითარებელი შეფასების სქემის ნიმუში

აქტივობები, რომელშიც ფასდება მოსწავლე	არადამაკმაყოფილებელი (0-4 ქულა)	დამაკმაყოფილებელი (5-6 ქულა)	კარგი (7-8 ქულა)	წარჩინებული 9-10 ქულა
დავალების გააზრება	ვერ იაზრებს დავალებას, ვერ ახერხებს მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	ნაწილობრივ აღიქვამს დავალების შინაარსს, ნაწილობრივ ახერხებს მონაცემთა და საძიებელ სიდიდეთა ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	აღიქვამს დავალების შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, ნაწილობრივ ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.	კარგად აღიქვამს ამოცანის შინაარსს, გამიჯნავს მონაცემებსა და საძიებელ სიდიდეებს, კარგად ახერხებს მათ ორგანიზებასა და წარმოდგენას.
ტიპური და ექსტრემალური მონაცემები. მონაცემთა ერთობლიობის რაოდენობრივი და თვისობრივი ნიშნების მახასიათებლები	ვერ ერკვევა მონაცემთა მახაისათებლებში, მათი ერთობლიობის რაოდენობრივ და თვისობრივ ნიშნებში.	ახერხებს მონაცემთა ერთობლიობის მახასიათებლების მხოლოდ ნაწილის გამოთვლას	სწორად მუშაობს ტიპურ და ექსტრემალურ მონაცემებზე, მონაცემთა ერთობლიობის მახასიათებლებზე.	კარგად ერკვევა მონაცემთა თვისობრივ და რაოდენობრივ მახასიათებლებში. უშეცდომოდ ასრულებს დავალებას.
დაგროვილი სიხშირე და მონაცემთა რანგი. ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულები	ვერ ახერხებს ვერც მონაცემთა სიხშირის და ვერც ალბათობის გამოთვლას.	ახერხებს დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილის შედგენას, მაგრამ ვერ ახერხებს დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილის შედგენას. ითვლის დავალებაში მოცემულ ალბათობათა მხოლოდ ნაწილს.	სწორად, მაგრამ ხარვეზით ასრულებს დავალებას როგორც მონაცემთა სიხშირეების გამოთვლაზე, ისე ალბათობის გამოთვლაზე.	კარგად ასრულებს დავალებას როგორც მონაცემთა სიხშირეების, ისე ალბათობის გამოთვლაზე.

დამატებით ვაწვდით მასწავლებლებს შეფასების სქემათა ნიმუშებს, რომელიც დაეხმარება მათ მოსწავლის ცოდნის შემოწმებასა და ხარვეზების აღმოფხვრაში

პრეზენტაციის შეფასების სქემა

კრიტერიუმები	ქულები
საინტერესო შესავალი (პრობლემის იდენტიფიცირება)	0-1
კვლევები/ ნაშრომის წარმოჩენის უნარი	0-1
შემოქმედებითი უნარი	0-1
პრობლემის გადაჭრის გზების შეთავაზება	0-1
თემის გასაგებად წარმოდგენა (ლოგიკური ჯაჭვი)	0-1
საუბარი (გამართულობა, ტემბრი)	0-1
თვალსაჩინოების გამოყენება	0-1
აუდიტორიასთან კონტაქტი	0-1
ინფორმაციის ფლობის უნარი (ადეკვატური კითვა-პასუხი)	0-1
დროის ლიმიტის დაცვა	0-1
ჯამი	0-10

პრეზენტაციის შეფასების რუბრიკა

ფასდება აქტივობები	დაბალი	საშუალო	მაღალი
თემის გასაგებად წარმოდგენა	ვერ წარმოადგენს თემას გასაგებად	წარმოადგენს თემას გასაგებად, მაგრამ არაარგუმენტირებულად	წარმოადგენს თემას გასაგებად, ამყარებს არგუმენტებით
ინფორმაციის ფლობის უნარი	ვერ ფლობს საჭირო ინფორმაციას, არ შეუძლია დასაბუთებული მსჯელობა	ფლობს საჭირო ინფორმაციას, მაგრამ არ შეუძლია დასაბუთებული მსჯელობა	ფლობს საჭირო ინფორმაციას, ამყარებს არგუმენტებით და დამაჯერებლად ასაბუთებს
თვალსაჩინოების გამოყენება	არ იყენებს თვალსაჩინოებას	იყენებს თვალსაჩინოებას, თუმცა თემას ნაწილობრივ პასუხობს	იყენებს თემატიკის შესაბამის თვალსაჩინოებას
დროის ლიმიტი	ვერ იცავს დროის ლიმიტს	ნაწილობრივ იცავს დროის ლიმიტს	ზუსტად იცავს დროის ლიმიტს

საშინაო და ტესტური დავალების შეფასების რუბრიკა

ფასდება აქტივობები	არადამაკმაყ.	დამაკმაყ.	კარგი	სანიმუშო
დავალების სწორად გააზრება	არ აქვს გააზრე-ბული დავალება	ნაწილობრივ აქვს გააზრებული დავალება	კარგად აქვს გააზრებული დავალება	კარგად აქვს გააზ-რებული დავალება, მომზადებული მასალა მრავალფეროვანია
შესრულების სისტემატურობა	არ ასრულებს დავალებას სისტემატურად	დავალებას ზოგჯერ ასრულებს	დავალებას სის-ტემატურად ასრულებს, თუმცა ხარვეზებით	დავალებას ასრულებს სისტემატურად და ამდიდრებს დამატებითი ინფორმაციით
საკუთარი აზრის გადმოცემის უნარი	ვერ ახერხებს საკუთარი აზრის გადმოცემას	მეტ-ნაკლებად ახერხებს საკუთარი აზრის გადმოცემას	გასაგებად ახერხებს საკუთარი აზრის გადმოცემას	დამაჯერებლად ახერხებს საკუთარი აზრის გადმოცემას
წერის კულტურა	წერს გაურკვევლად	წერს გარკვევით, თუმცა ხარვეზებით	წერს გასაგებად და უშეცდომოდ	წერს შესანიშნავად და უშეცდომოდ

საგაკვეთილო მასალის ცოდნის შეფასების რუბრიკა

აქტივობები	არადამაკმაყ.	დამაკმაყ.	კარგი	სანიმუშო
ფაქტობრივი მასალის ცოდნა	არაადეკვატუ-რად იყენებს ცნე-ბებს, არაორ-განიზებულად წარმოადგენს საკითხს	ადეკვატურად იყენებს ზოგიერთ ცნებას, არასრულყოფილა დ წარმოადგენს საკითხს	ადეკვატურად იყენებს ცნე-ბებს, ორგანი-ზებულად წარმოადგენს საკითხს	ყოველთვის ადეკვა-ტურად იყენებს ცნე-ბებს,სრულყოფი-ლად წარმოადგენს საკითხს, ავლენს ღრმა ანალიზის უნარს
თეორიული ცოდნის პრაქტიკასთან კავშირი	არაადეკვატურად იყენებს თეო-რიულ ცოდნას პრაქტიკაში	ნაწილობრივ იყენებს თეო-რიულ ცოდნას პრაქტიკაში	ადეკვატურად იყენებს თეორი ულ ცოდნას პრაქტიკაში	ადეკვატურად იყენებს თეორიულ ცოდნას პრაქტიკაში ავლენს ტრანსფერის უნარს