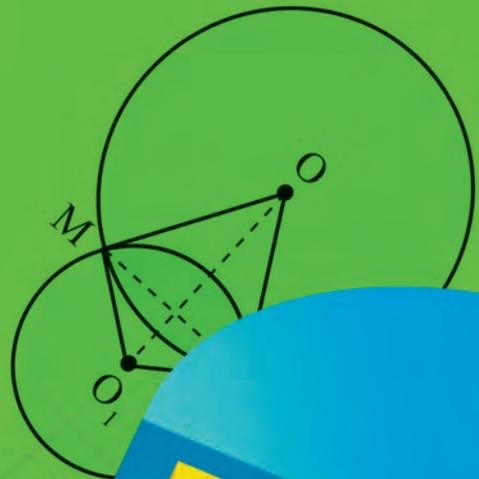
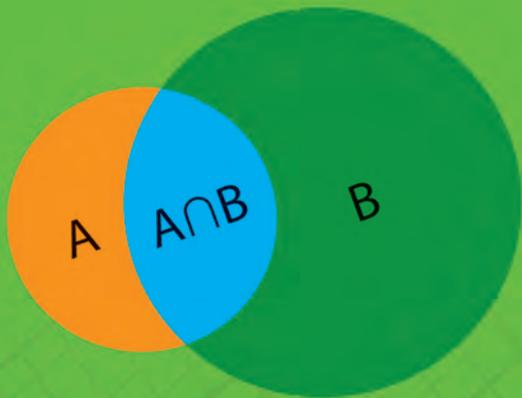


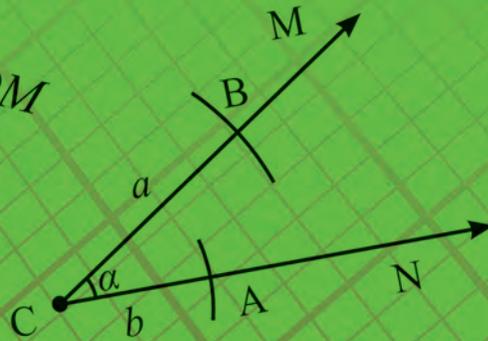
Тина Бекаури
 Автандил Сагинашвили
 Гиორги Бекаури

Математика

7



$$\Delta AOM = \Delta BOM$$



Часть

2





საქართველოს სახელმწიფო ჰიმნი თავისუფლება

ჩემი ხატია სამშობლო,
სახატე მთელი ქვეყანა,
განათებული მთა-ბარი,
წილნაყარია ღმერთთანა.
თავისუფლება დღეს ჩვენი
მომავალს უმღერს დიდებას,
ცისკრის ვარსკვლავი ამოდის
და ორ ზღვას შუა ბრწყინდება,
დიდება თავისუფლებას,
თავისუფლებას დიდება.

ლექსი დავით მაღრაძისა

Тина Бекаури
Автандил Сагинашвили
Гиორги Бекаури

Математика 7

Часть II

Учебник VII класса

В 2020 году присвоен гриф Министерства образования, науки,
культуры и спорта Грузии

2020

Тина Бекаури, Автандил Сагинашвили, Георгий Бекаури

Математика 7

Часть II

Учебник VII класса

Редактор: Автандил Сагинашвили

Дизайн обложки: Иване Сагинашвили

Дизайн и верстка: Алекси Кахниашвили

Перевод: Елены Куртанидзе

© Все права защищены

Тина Бекаури, Автандил Сагинашвили, Георгий Бекаури

ISBN 978-9941-9218-4-1

Содержание

Глава 3. Данные	6
3.1 Виды данных и способы их получения	7
3.2 Выражение числа в процентах	11
3.3 Как найти число по его проценту	16
3.4 Выражение в процентах соотношения двух величин	21
3.5 Числовые характеристики данных	27
Обзор Главы 3	31
Тест №3	35
Глава 4. Одночлен и многочлен	38
4.1 Выражение с переменной	39
4.2 Равные выражения	43
4.3 Степень с натуральным показателем	48
4.4 Свойства степени	53
4.5 Одночлен и многочлен	57
4.6 Раскрытие скобок	64
4.7 Умножение одночлена на многочлен	67
4.8 Умножение многочлена на многочлен	69
4.9 Возведение двучлена в квадрат и куб	73
4.10 Формулы разности квадратов, суммы и разности кубов	77
4.11 Вынос общего множителя за скобки	80
4.12 Разложение многочлена на множители методом группировки	83
4.13 Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения	86
4.14 Уравнение	90
4.15 Линейное уравнение	94
4.16 Алгебраический метод решения задачи	97
4.17 Последовательности	103
4.18 Арифметическая прогрессия	108
Обзор Главы 4	113
Тест №4	119
Глава 5. Система координат	122
5.1 Координаты точки	123
5.2 Нахождение точки с помощью координат	127
5.3 График	130
5.4 График прямой пропорциональности	136
5.5 Параллельный перенос фигур	141
Обзор Главы 5	145
Тест №5	149
Ответы	152
Ознакомительный материал	155

В этой главе ты изучишь:

- ❖ Типы данных и способы их получения;
- ❖ Характеристики данных чисел: диапазон распределения, среднее, мода, медиана;
- ❖ Средства упорядочения данных: таблица, столбчатая, точечная, линейная и круговая диаграммы;
- ❖ Связь между процентной и дробной записью числа;
- ❖ Процент числа и процентное соотношение двух чисел;
- ❖ Вычисление и использование уменьшения-увеличения величины на заданный процент;
- ❖ Определение концентрации смеси.

После изучения главы ты сможешь:

- ❖ Определять числовые и качественные данные;
- ❖ Выбирать соответствующие способы получения данных;
- ❖ Вычислять характеристики числовых данных: диапазон распределения, среднее, моду, медиану;
- ❖ Представлять данные с помощью таблицы и различных диаграмм;
- ❖ Записывать число в виде процента;
- ❖ Нахождение процента от числа и нахождение числа по его проценту;
- ❖ Решать практические задачи по концентрации смеси, снижению/повышению цен и др.

Проект «Регионы»



1. Составь список регионов Грузии;
2. Найди данные о площади и населении регионов;
3. Вычисли процентную долю площади и населения каждого региона;
4. На основании полученных данных составь таблицу и выясни, какой регион является наиболее густонаселенным;
5. Составь круговые диаграммы в соответствии с площадью и количеством населения (укажи процентное соотношение регионов на диаграммах);
6. Вычисли характеристики данных: диапазон, среднее, медиану;
7. Найди и приложи к проекту соответствующие фотографии;
8. Подготовься к презентации своего проекта.



3.1 Виды данных и способы их получения



Цель

Овладеть навыками получения и сортировки количественных и качественных данных.

Чтобы при изучении события сделать обоснованные выводы, нам нужна информация, которая характеризует событие с интересующей нас стороны. Поиск необходимых данных, упорядочение и осознание их совокупности – это основа для принятия правильных выводов и решений.

Пример 1. Предположим, тебе нужно собрать портфель на завтра. На чем основывается твой выбор вещей для школы? Конечно, на расписании уроков. Посмотри на него и ответь на следующие вопросы:

1. Сколько у тебя уроков по понедельникам?
2. Сколько раз в неделю у тебя урок грузинского языка?
3. По каким дням у тебя математика?

Пример 2. При составлении прогноза погоды метеорологическая служба использует информацию о температуре, атмосферном давлении, скорости и направлении ветра, взятую из сотен различных точек Земли и космических спутников. Обработка такого большого количества данных возможна только с использованием мощного компьютерного оборудования.



Мир данных разнообразен. Они делятся на две группы: количественные (числовые) и качественные данные.

Количественные данные выражаются в числах и характеризуют объект исследования в количественном смысле. Это, например, размер, вес, возраст, цена и т. д. Качественные данные отражают характеристики объекта исследования, численное представление которых невозможно или неудобно. Например, цвет, вкус, имя и фамилия человека, название страны или города и т. д.

Пример 3. Выдержка из энциклопедического справочника:

Великобритания — это государство в северо-западной Европе; площадь — 244 000 км²; население — 66,4 миллиона человек; столица — Лондон; государственный язык — английский; валюта — фунт стерлингов; государственное устройство — парламентская монархия.

Работа с данными начинается с их поиска. Иногда интересующие нас данные легко доступны и находятся в идеальном и упорядоченном виде. Об этом для нас позаботились другие. Например, календарь, телевизионная программа, различные словари или справочники, расписание поездов и т.д. Если требуемые данные недоступны, нам придется искать их самостоятельно, например, пойти в библиотеку или войти в Интернет, где хранится большое количество информации.

Иногда, чтобы сделать правильные выводы, необходимо учитывать мнение многих людей. В этом случае проводится опрос. Опросив общественное мнение, мы можем определить рейтинг политической партии или отдельного политика; опросив радиослушателей и телезрителей, мы можем определить победителя в музыкальном конкурсе и так далее.

Важным способом получения данных является наблюдение. Во время наблюдений измеряются и регистрируются значения, характерные для интересующего нас события.

Большая часть знаний о внешнем мире была приобретена человечеством путем наблюдения за событиями. Наблюдение приводит к выявлению закономерности, а объяснение причин закономерности приводит к открытию законов.

Другим важным методом поиска данных является эксперимент - наблюдение за запланированными и проведенными нами событиями.

Обработка данных во всех областях науки обычно осуществляется математическими методами.

Ответ на вопросы:

1. С какими данными ты познакомился? Приведи примеры.
2. Какие данные содержит классный журнал?
 - а) Какие из них количественные, а какие - качественные?
 - б) На какие вопросы мы можем ответить, основываясь на данных, собранных в журнале? Задай несколько таких вопросов.
 - в) В каком порядке перечислены в журнале имена твоих одноклассников?
3. Какими количественными и качественными данными характеризуется геометрическая фигура - угол?
4. Какие методы поиска данных ты знаешь?
5. Какие примеры получения данных путем опроса ты знаешь?
6. Какие примеры получения данных путем наблюдения и/или измерения ты знаешь?
7. Какой способ получения данных ты используешь, чтобы узнать:
 - а) У скольких твоих одноклассников математика является любимым предметом?
 - б) Сколько часов в день твоя семья обычно смотрит телевизор?
 - в) Сколько раз мяч падал с разной высоты на пол?
 - г) Территории скольких государств пересекает экватор?

Упражнения

1. Какими количественными и качественными данными можно охарактеризовать дроби? Приведи соответствующие примеры.
2. Какими данными характеризуются смешанные дроби? В частности, следующие дроби:
а) $2\frac{3}{4}$; б) $3\frac{3}{4}$; в) $3\frac{4}{7}$.
3. Нарисуй в тетради треугольник. Измерь и запиши количественные данные этого треугольника. Какие качественные данные треугольника ты можешь указать?

4 Начерти треугольник, две качественные характеристики которого ты можешь назвать.

5 Согласно примеру 3, найди и запиши количественные и качественные данные о Грузии.

6 Какие измерения ты проведешь для вычисления площади класса? Найди необходимые данные и определи, сколько примерно квадратных метров площади приходится на одного ученика.

7 Где, по-твоему, лучше всего провести опрос, чтобы узнать, какая часть населения любит футбол?

а) на стадионе, перед началом футбольного матча;

б) на людной улице.

8 Насколько длинную цепочку можно сделать из взявшихся за руки одноклассников? Какие данные тебе нужны, чтобы высказать предположение? Как ты найдешь и используешь эти данные?

9 Начерти в тетради и заполни личную анкету.

Имя	
Фамилия	
Пол	
Дата рождения	
Адрес	
Номер телефона	

10 Какие количественные и качественные данные характеризуют:

а) ломаную?

б) многоугольник?

11 Найди данные об автомобилях разных марок (максимальная скорость, масса, мощность и т. д.) Составь таблицу, дай ей название.

12 Узнай, какие данные указаны на этикетке одежды. При каких обстоятельствах и как мы используем эту информацию?

13 Найди данные о населении и площади стран Прибалтики и сравни их с количеством населения Грузии на 1 км².



Рига, столица Латвии

14 Твой друг задумал двузначное число и на все вопросы отвечает только «да» или «нет». Какие вопросы ты ему задашь, чтобы угадать число, которое он задумал?

15 Вычисли:

а) $2,1 \times 1\frac{1}{7} - 2,4$;

б) $2,1 \times (1\frac{1}{7} - 2,4)$;

в) $8,7 + 0,3 \times 3\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$;

г) $(8,7 + 0,3) \times 3\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$.

16 Сумма величин трех углов, образованных пересечением двух прямых, равна 205° . Какова величина четвертого угла?

17 Реши уравнения:

а) $x:7,5=-2$;

б) $x \times (-2,4)=12$;

в) $3,6-9x=1,8$;

г) $2(x-7,4)=8,6$.

18 Сумма величин двух из четырех углов, образованных пересечением двух прямых, равна 112° . Какова величина двух других углов?

19 Сумма величин двух углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равна 60° . Какова величина каждого из этих углов?

20 Соотношение величин углов треугольников составляет $1:2:3$. Длина наименьшей стороны - 5 см. Определи длину наибольшей стороны.

21 Для ограждения земельного участка квадратной формы было использовано 40 столбов. Расстояние между столбами составляет 1,5 метра. Чему равна площадь участка?

22 Вычисли:

а) $\frac{1}{2}$ часть от 3 м;

б) $\frac{2}{5}$ части от 2 кг

в) 0,2 части от 0,5 т;

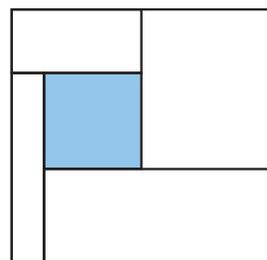
г) 0,125 часть от 4 га;

д) 0,4 часть от 5 литров;

е) 0,25 часть 3 часов.

Ну-ка, попробуй!

Начерченный внутри большого квадрата маленький квадрат находится в окружении четырех прямоугольников (см. рисунок). Периметр большого квадрата — 15 см. Чему равна сумма периметров прямоугольников?



3.2 Процентная запись числа



Цель

Уметь:

1. Записывать число в процентах;
2. Записывать процент в виде дроби;
3. Вычислять процент от числа.

Для передачи данных часто используют процентную запись числа. Процентная запись числа указывает на количество сотых в числе

Например: $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$; $0,75 = 75\%$.

При умножении десятичной дроби на 100, нужно перенести запятую на две цифры вправо.

Чтобы записать число в виде процента, нужно умножить число на 100 и написать знак процента: «%».

Пример 1. Напишем число в виде процента:

а) $1\frac{3}{4}$; б) 0,432.

Решение.

а) $1\frac{3}{4} = (1\frac{3}{4} \times 100)\% = 175\%$;

б) $0,432 = (0,432 \times 100)\% = 43,2\%$.

Так же мы должны поступать при процентной записи части. Например, $\frac{3}{5}$ части числа равны $\frac{3}{5} \times 100$ процентов этого числа, или 60%; 0,36 части — это $0,36 \times 100$ процентов или 36%. И наоборот,

При делении десятичной дроби на 100, нужно перенести запятую на две цифры влево.

Чтобы записанное в виде процентов число записать в виде дроби, достаточно разделить число процентов на 100.

Пример 2. Запишем в виде дроби: а) 48%; б) 325,8%.

Решение.

а) $48\% = 48 : 100 = \frac{12}{25}$; б) $325,8\% = 325,8 : 100 = 3,258$.

Задача 1. В классе Левана 30 учеников, 60% из них — девочки. Сколько девочек в классе Левана?

Решение. Запишем 60% в виде дроби: $60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

То есть, $\frac{3}{5}$ части одноклассников Левана или $30 \times \frac{3}{5} = 18$ девочки.

Ответ: В классе Левана 18 девочек.

1% от числа составляет сотую часть этого числа.

100% числа равно самому этому числу.

Процент p числа a равен $\frac{p}{100}$ части числа a , или $\frac{ap}{100}$.

Пример 3. Найти 2,5% от 120.

Решение. $\frac{120 \times 2,5}{100} = 3$.

Ответь на вопросы:

1. Как записать число в виде процентов?
2. Как записать в виде дроби число, записанное в виде процентов?
3. Какова связь между частью числа и процентом?
4. Как вычислить процент заданного числа?
5. Как записать десятичную дробь в виде процентов?
6. Как записать процент в виде десятичной дроби?

Упражнения

1 Запиши данное число в виде процентов:

- а) 1; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{1}{10}$; г) $\frac{7}{10}$; д) $\frac{13}{20}$; е) $\frac{16}{25}$;
ж) $\frac{19}{50}$; з) $1\frac{1}{2}$; и) $2\frac{3}{4}$; к) 0,5; л) 0,26; м) 0,256;
н) 1,01; о) 1,15; п) 2,2356.

2 Запиши в виде дроби число, данное в виде процентов:

- а) 3%; б) 17%; в) 10%; г) 1%; д) 25%; е) 5%;
ж) 50%; з) 85%; и) 115%; к) 27,5%; л) 32,215%; м) $3\frac{1}{3}\%$;
н) $33\frac{1}{3}\%$; о) 0,01%.

3 Какой процент числа составляет:

- а) $\frac{1}{2}$ часть? б) $\frac{1}{4}$ часть? в) $\frac{11}{20}$ часть? г) 0,2 часть?
д) 0,75 часть? е) 0,99 часть? ж) 0,125 часть? з) $\frac{1}{3}$ часть?

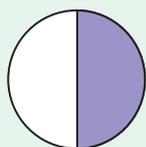
4 Какую часть числа составляет:

- а) 25%? б) 50%? в) 10%? г) 100%?
д) 67%? е) 2,5%? ж) 0,1%? з) 75%?

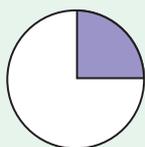
5 Вычисли:

- а) 25% от 20; б) 10% от 45; в) 5% от 200; г) 50% от 7,2;
д) 1% от 3,5; е) 80% от 1,7; ж) 3% от; з) 33% от 33.

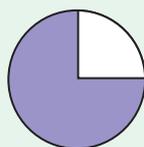
6 Согласно рисунку определи, какой процент круга закрашен:



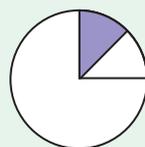
а)



б)



в)



г)

7 Что больше:

- а) 25% от 12 или 10% от 20? б) 5% от 10 или 3% от 15?
в) 50% от 3,6 или 3,6% от 50? г) 100% от $\frac{1}{10}$ или $\frac{1}{10}$ % от 100?

8

Начерти и заполни таблицу:

Процент	Десятичная дробь	Дробь
10%		
	0,25	
		$\frac{3}{8}$
15,6%		
	0,268	
		$\frac{2}{25}$

9 Вес сахара, получаемого из сахарной свеклы, составляет 13% от веса свеклы. Сколько килограммов сахара будет получено из 200 кг сахарной свеклы?

10 Вес сахара, получаемого из тростникового сахара, составляет 15% от веса тростника. Сколько килограммов сахара будет получено из 1 тонны сахарного тростника?

11 Площадь Грузии составляет 69700 квадратных километров. 54% его территории занимают горы. Какую площадь занимают горы?



12 80% из 25 учеников класса присутствовали на уроке. Сколько учеников не присутствовали на уроке?

13 Сколько тетри составляют 20% от 2 лари?

14 Сколько километров останется проехать пассажиру после того, как он проехал 40% дороги, если длина всей дороги составляет 5 километров?

15 Из 30 учеников класса 60% - девочки. 50% девочек - отличницы. Сколько девочек-отличниц в классе?

16 В таблице приведены данные о том, какой процент территории Грузии составляют 5 ее регионов:

Картли	19,3%	
Кахетия	15,6%	
Абхазия	12,7%	
Имерети	8,7%	
Самегрело	6,5%	

- а) Начерти таблицу, вычисли площади регионов по данным и введи полученные результаты в третий столбец таблицы (для упрощения вычислений используй калькулятор).
б) Какой процент территории Грузии занимают другие регионы?
в) В соответствии с полученными результатами начерти столбчатую диаграмму.

17 В коробке 20 мячей. 20% мячей - белые, 25% - черные, остальные - красные. Какой процент мячей:

- а) красные? б) белые или черные? в) белые или красные?

18 За месяц в магазине было продано 12 тонн овощей. Столбчатая диаграмма показывает долю некоторых видов проданных овощей в процентах.

а) Каков процент той доли овощей, которые не показаны на диаграмме?

в) Сколько тонн овощей каждого вида было продано?



19 Сколько лари составляют 15% от $\frac{2}{3}$ части 15 лари?

20 Обоснуй, что процент b числа a и процент a числа b равны друг другу.

21 У Гии было 10 лари. На 30% от этой суммы он купил две плитки шоколада, а на оставшиеся 20% - 14 жевательных резинок.

- а) Сколько стоила одна плитка шоколада?
 б) Сколько стоила одна жевательная резинка?
 в) Сколько денег осталось у Гии?

22 Четыре дерева были посажены вдоль прямолинейного участка дороги. Расстояние между соседними деревьями составляет 10, 45 и 60 метров. Сколько минимум деревьев нужно посадить дополнительно, чтобы расстояние между двумя соседними деревьями было одинаковым?

23 Гванца, Лана и Саломе живут на первом, втором и третьем этажах одного дома (не обязательно в таком порядке). Одна из них - шестиклассница, вторая - семиклассница, а третья - восьмиклассница.

- Шестиклассница живет на первом этаже.
 Семиклассница живет над квартирой Гванцы.
 Восьмиклассница живет под квартирой Ланы.
 В каком классе учится каждая девочка и на каком этаже она живет?

24 Ника заплатил 125 лари за природный газ. Выплаченная сумма составила 0,125 части от его зарплаты. Какая зарплата у Ники?

25 Саломе заплатила 135 лари за электричество, 38 лари - за уборку и 12 лари - за воду. Уплаченная сумма составила 0,2 части от ее зарплаты. Какая зарплата у Саломе?

26 Найди неизвестный член пропорции:

а) $\frac{x}{9} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{7}{t} = \frac{14}{9}$; в) $\frac{1,5}{4} = \frac{y}{1,2}$; г) $\frac{2\frac{2}{3}}{1\frac{1}{2}} = \frac{4\frac{4}{5}}{z}$; д) $\frac{4 \times 1,5}{x} = \frac{1,4:0,7}{0,75 + 1,25}$.

27 Раздели число 512:

- а) на 5, 11 и 16 пропорциональных частей;
 б) в соотношении 4: 5: 7.

28 Начерти и заполни таблицу, если известно, что между значениями x и y:

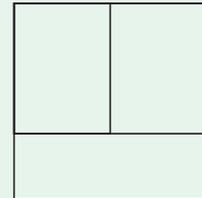
а) прямо пропорциональное соотношение.

x	1	2	0,5				5		30	3		0,2
y	3			15	36	0,6		2			0,3	

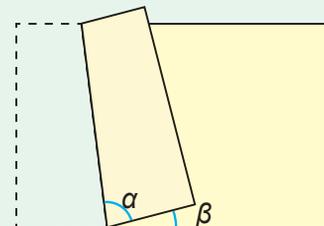
б) обратно пропорциональное соотношение.

x	2	1	0,5				5		11	3		0,2
y	10			150	100	0,5		2			0,9	

29 Квадрат со стороной 6 см разделен на три прямоугольника с равной площадью. Вычисли периметр каждого прямоугольника.



30 Прямоугольный лист бумаги сложен так, как показано на рисунке. Вычисли величину угла α , если $\beta = 30^\circ$.



Проект (исследовательского характера, срок - 1 неделя)

Процент в нашей жизни

План:

- Краткая история введения процента;
- Основные задачи с использованием процентов;
- Проведение процентных вычислений;
- Использование процента людьми разных профессий;
- Где процент наиболее часто встречается в реальной жизни?

3.3 Как найти число по его проценту



Цель

Уметь:

1. Вычислить число по его проценту;
2. Вычислить число, полученное путем увеличения или уменьшения на заданный процент;
3. Решать практические задачи на повышение-снижение цен и сметы.

Рассмотрим задачу, для решения которой нам нужно найти число по его заданному проценту.

Задача 1. После вычета 20% подоходного налога зарплата учителя составила 720 лари. Какая зарплата учителя без вычета?

Решение. Примем зарплату учителя без вычета за 100%. Тогда, после вычета 20%, останется 80% заработной платы, которая, согласно условию задачи, равна 720 лари.

Чтобы решить задачу, нам нужно найти число, 80% которого равно 720.

Допустим, это число x , тогда его 80% будет равно $0,8x$. Согласно условию задачи, пишем: $0,8x = 720$

Если мы разделим обе части этого уравнения на 0,8, то получим: $x = 720 : 0,8 = 900$.

Ответ: Зарплата учителя без вычета составляет 900 лари.

Чтобы найти число x , процент p которого равен числу a , необходимо:

I. Написать $p\%$ в виде дроби (мы получим $\frac{p}{100}$).

II. Разделить число a на $p\%$, записанное в виде дроби (или на $\frac{p}{100}$).

Пример 1. Найти число x :

а) 25% которого равно 20; б) 3,125% которого равно 1,5.

Решение.

I. $25\% = 0,25$

I. $3,125\% = 0,03125$

II. $x = 20 : 0,25 = 80$

II. $x = 1,5 : 0,03125 = 48$

Увеличение числа на 10% означает умножение этого числа на 1,1.

На практике нам часто встречается задача, в которой заданное число (величина) увеличивается или уменьшается на заданный процент. Например,

Задача 2. Цены на бензин выросли на 10%. Сколько стоит литр бензина сейчас, если до повышения его цена составляла 2,1 лари?

Решение. Увеличение 2,1 лари на 10% означает прибавление к 2,1 лари его 10%, то есть $2,1 + 2,1 \times 0,1 = 2,31$ (лари).

Эту же задачу можно решить с помощью следующих рассуждений: если цену на бензин до повышения - 2,1 лари - мы примем за 100%, то после повышения на 10% цена станет 110%.

110% от 2,1 равно: $2,1 \times 1,10 = 2,31$.

Ответ: Сейчас бензин стоит 2 лари и 31 тетри.



Чтобы вычислить число, полученное путем увеличения числа a на $p\%$, необходимо:

I. Вычислить $p\%$ от числа a , или $\frac{ap}{100}$.

II. Добавить к числу a его $p\%$, или $\frac{ap}{100}$, получим $a + \frac{ap}{100}$.

Пример 2. Какое число мы получим, если увеличим 12 на 5%?

15% от 12 равно $\frac{12 \times 5}{100} = 0,6$

II. $12 + 0,6 = 12,6$.

Чтобы получить в этом примере тот же результат, достаточно вычислить $(100 + 5)\%$ от 12, или 12 умножить на 1,05:

$12 \times 1,05 = 12,6$



Задача 3. Магазин объявил о 60% скидке на Рождество. По какой цене будет продаваться обувь, которая стоит до скидки 120 лари?

Решение. Скидка 60% означает снижение старой цены на 60%. Вычислим 60% от 120. $120 \times 0,60 = 72$, или цена была снижена на 72 лари. Поэтому, новая цена будет $120 - 72 = 48$ (лари).

Обратим внимание, что эта задача может быть решена путем следующих рассуждений: примем начальную цену 120 лари за 100%. Тогда после 60% скидки мы получаем 40%. 40%

от 120 равно: $120 \times 0,40 = 48$.

Ответ: Обувь будет продаваться за 48 лари.

Чтобы вычислить число, полученное путем уменьшения числа a на $p\%$, необходимо:

I. Вычислить $p\%$ от числа a , или $\frac{ap}{100}$.

II. Вычесть из числа a его $p\%$, или $a - \frac{ap}{100}$.

Пример 3. Какое число мы получим, если уменьшим 80 на 25%?

I. 25% от 80 равно $80 \times 0,25 = 20$.

III. $80 - 20 = 60$.

Чтобы получить в этом примере тот же результат, достаточно вычислить $(100 - 25)\%$ от 80, или умножить 80 на 0,75: $80 \times 0,75 = 60$.

Уменьшение числа на 60% означает умножение этого числа на 0,4.

Ответь на вопросы:

1. Как вычислить число по его проценту?
2. Что значит увеличить число на заданный процент?
3. Что значит уменьшить число на заданный процент?
4. Какое число получается путем увеличения числа a на $p\%$?
5. Какое число получается путем уменьшения числа a на $p\%$?
6. Каким кратчайшим способом вычислить число, полученное при увеличении b на 40% ?
7. Каким кратчайшим способом вычислить число, полученное при уменьшении b на 40% ?
8. Будет ли получено то же число a , если мы увеличим a на 10% , а затем уменьшим полученное число на 10% ?
9. На сколько процентов в итоге увеличится число, которое мы увеличили сначала на 10% , а затем еще на 20% ?

Упражнения

- 1** Найди число:
а) 10% которого равно 5 ; б) 5% которого равно 10 ; в) 25% которого равно 25 ;
г) $33\frac{1}{3}\%$ которого равно 100 ; д) $0,1\%$ которого равно 1 ; е) 120% которого равно 12 .
 - 2** Какое число получится, если:
а) увеличить 10 на 10% ?
б) увеличить 36 на 50% ?
в) увеличить 30 на 200% ?
г) увеличить $0,48$ на 1% ?
д) уменьшить 10 на 10% ?
е) уменьшить 36 на 50% ?
ж) уменьшить 30 на 20% ?
з) уменьшить 200 на 13% ?
- Увеличение числа на $p\%$ — это то же самое, что умножение этого числа на $\frac{100 + p}{100}$, а уменьшение числа на $p\%$ — это то же самое, что умножение этого числа на $\frac{100 - p}{100}$.
- 3** 5% одноклассников Ваню - светловолосые. Сколько учеников в классе Ваню, если 8 из них - светловолосые?
 - 4** 20% одноклассников Нино - отличники. Сколько учеников в классе Нино, если 6 из них - отличники?
 - 5** По воскресеньям 40% своего свободного времени Медя посвятила компьютерным играм. Сколько часов свободного времени было у Медя в этот день, если она играла на компьютере 2 часа?

6 Одноклассники отложили 30% от собранной на экскурсию суммы на дорожные расходы, а на оставшиеся 140 лари они купили еду. Какую сумму одноклассники собрали на экскурсию?

7 Школьный портфель был продан с 40% скидкой за 18 лари. Сколько стоил портфель до скидки??

8 Цена на обувь с 50% рождественской скидкой составила 45 лари. Сколько стоила обувь до скидки?

9 Зарботная плата полицейского после 40% повышения составила 1260 лари. Какова была зарплата полицейского до ее повышения?

10 К внесенной в банк сумме каждый год прибавляется 9%. Сколько денег накопит Лаша за один год, если внесет в банк 500 лари?

11 Книжный магазин продает полученные от издательства книги с надбавкой 25% к цене издательства. Какую прибыль получит магазин после продажи 1000 книг, если цена одной книги, установленная издателем, составляет 8 лари?

12 При жарке кофе теряет 12% своего веса. Сколько граммов жареного кофе получится из 200 граммов сырого кофе?

13 Из пшеницы получается 75% муки от ее веса. Сколько килограммов пшеницы нужно, чтобы получить 3 кг муки?

14 Тесто для хлеба теряет 20% своего веса при выпечке.
а) Сколько 400-граммовых буханок хлеба можно испечь из 10 кг теста?
б) Сколько килограммов теста нужно, чтобы испечь 5 кг хлеба?

15 В настоящее время в городе проживает 10000 жителей. Количество населения каждый год растет на 10%. Сколько жителей будет в этом городе:
а) через год? б) через два года?

16 Бизнесмен вложил 40% своих денег в производство вина, от которого он получил 60% прибыли, остальные деньги он вложил в производство консервов, от которого получил 50% прибыли. Сколько денег стало у бизнесмена, если его начальная сумма составляла 20 000 лари?



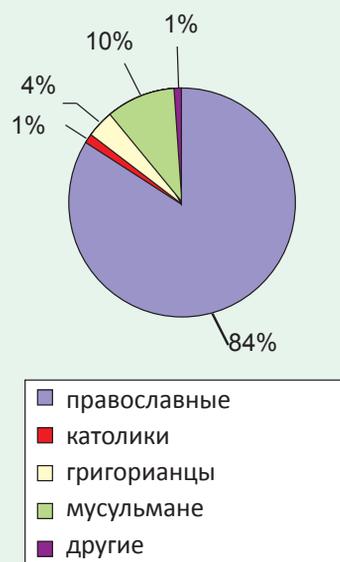
17 На сколько процентов увеличится площадь прямоугольного участка земли, если мы увеличим его длину на 10%, а ширину - на 20%?

18 Табачное изделие подорожало сначала на 20%, затем на 40%. На сколько процентов всего подорожало табачное изделие?

19 На круговой диаграмме показано население Грузии в процентах в зависимости от вероисповедания, по данным переписи 2002 года.

а) С помощью диаграммы вычисли количество населения с различным вероисповеданием (общая численность населения Грузии по переписи 2002 года составила 4356000 человек).

б) Согласно данной диаграмме, составь таблицу, которая показывает количество населения в соответствии с вероисповеданием как в процентах, так и численно.



20 Вычисли:

- а) какую часть 1 часа составляют 3 минуты;
- б) какую часть 1 м составляют 20 см;
- в) какую часть 1 кг составляют 300 г;
- г) какую часть 1 т составляют 250 кг;
- д) какую часть 1 м² составляют 25 дм²;
- е) какую часть 1 га составляют 4000 м²;
- ж) какую часть 1 дм³ составляют 10 см³;
- з) какую часть 1 м³ составляют 100 л;
- и) Какую часть 1 часа составляет 1 сек.

Ну-ка, попробуй!

Помоги поделить:

1. 7 кувшинов в погребе наполнены вином, 7 - наполовину полные, а остальные 7 - пустые. Три брата должны поделить вино и кувшины поровну, чтобы у каждого из них было одинаковое количество кувшинов и вина. При этом нельзя переливать вино из одного кувшина в другой. Как братьям поделить вино?
2. 8-литровая банка наполнена молоком. Как двум женщинам поделить молоко поровну, если у них только один 5-литровый и один 3-литровый бидоны?

3.4 Выражение соотношения двух величин в процентах



Цель

Уметь:

1. Записывать процентное соотношение двух величин;
2. Выражать данные в процентном соотношении.

При решении практических задач соотношение величин часто выражают в процентах.

Задача 1. Молоко считается жирным, если содержание жира в нем не менее 4,5%. Образец поступившего на завод молока весом 1,5 кг проверили на содержание в нем жира. Оказалось, что молоко содержало 63 г жира. Можно ли считать это молоко жирным?

Решение. Выразим массу молока и содержащийся в нем жир в одинаковых единицах:
 $1,5 \text{ кг} = 1500 \text{ г}$.

Узнаем, какую часть массы молока составляет масса жира, и выразим ее в процентах:

Вычисления
калькулятором

$$63 \div 1500 \times 100 = 4,2$$

$$\frac{\text{масса жира}}{\text{масса молока}} = \frac{63 \text{ г}}{1500 \text{ г}} = 0,042 = 4,2\%$$

Вывод: Содержание жира в этом молоке составляет 4,2%. Следовательно, молоко не жирное.

Задача 2. Во время матча один баскетболист осуществил 20 бросков, 15 из которых были результативными, а другой – 40 бросков, 28 из которых забил в корзину. Какой баскетболист бросает точнее?

Решение. Чтобы узнать, насколько точно бросают баскетболисты, вычислим, сколько процентов брошенных ими мячей попало в корзину. Вычисления проведем в два этапа:



I этап: выясним, какую часть брошенных каждым баскетболистом мячей составляют забитые мячи.

$$\text{Первый баскетболист: } 15 : 20 = 0,75$$

$$\text{Второй баскетболист: } 28 : 40 = 0,7$$

II этап: запишем полученные числа в виде процентов:

$$\text{Первый баскетболист: } 0,75 = (0,75 \times 100) \% = 75\%$$

$$\text{Второй баскетболист: } 0,7 = (0,7 \times 100) \% = 70\%$$

Вывод: Точность первого баскетболиста составляет 75%, а второго – 70%. Поэтому первый баскетболист забивает мячи точнее.

Часть какого-либо вещества в той или иной смеси (растворе, соединении), записанная в виде процента, называется **концентрацией**. Например, концентрация жира в молоке, рассмотренная в задаче 1, была равна 4,2%.

Задача 3. К 3 литрам спиртового раствора с концентрацией 90% добавили 2 литра чистой воды. Какой концентрации раствор был получен?

Решение. 3 литра раствора содержали 90% спирта, или $3 \times 0,9 = 2,7$ литров спирта. После добавления воды объем раствора стал 5 литров, а количество спирта не изменилось. Следовательно, концентрация полученного раствора будет

$$\frac{2,7}{5} \times 100 = 54\%.$$

Ответ: Концентрация полученного раствора составляет 54%.

Помните!

Только соотношения величин, измеренных в одинаковых единицах, могут быть выражены в процентах.

Для того, чтобы определить, какой процент величины b составляет величина a , необходимо:

1. Перевести их в одинаковые единицы, если эти значения даны в разных единицах измерения.

1. Разделить величину a на величину b и представить частное в виде процента, т.е. $\frac{a}{b}$ умножим на 100: $p\% = \frac{a}{b} \times 100$

Ответь на вопросы:

1. В каком случае мы можем представить соотношение двух величин в процентах?
2. Как выразить одну величину в процентах от другой величины?
3. Изменится ли ответ первой задачи, если мы выразим массу жира и молока другими единицами массы (например, килограммами)?
4. Что называется концентрацией смеси?
5. Уменьшится или увеличится концентрация спиртового раствора и во сколько раз, если мы смешаем раствор с таким же объемом воды?

Упражнения

- 1 Вычисли, какой процент составляет число a от числа b , если:
а) $a=9, b=36$; б) $a=15, b=75$;
в) $a=2,4, b=4,8$; г) $a=10, b=5$.
- 2 Вычисли, какой процент составляет величина a от величины b , если:
а) $a=12$ мин, $b=60$ мин; б) $a=1,5$ кг, $b=30$ кг;
в) $a=5$ дм, $b=2$ м; г) $a=0,3$ лари, $b=40$ тетри.
- 3 Какое из следующих соотношений величин может быть выражено в процентах? Если возможно, вычисли:
а) 3,5 кг и 4 лари; б) 16 минут и 1,2 часа;
г) 2м^2 и 3,2 м; д) 7 см и 2 дм.

4

В таблице приведены результаты опроса 25 учащихся VII класса, чтобы узнать, кто каким видом спорта занимается.

	Вид спорта	Количество учеников	Процент от общего количества учеников
	Футбол	8	
	Баскетбол	3	
	Борьба	2	
	Шахматы	4	
	Плавание	1	
	Никакой	7	

- а) Начерти таблицу и заполни ее последний столбец;
 б) Построй столбчатую диаграмму в соответствии с данными;
 в) Составь аналогичную таблицу для своего класса.

5

Вычисли процентное соотношение чисел а и b, если:

- а) Число а является $\frac{2}{5}$ частью числа b;
 б) число а является $\frac{3}{10}$ частью числа b;
 в) число а является $\frac{13}{14}$ частью числа b;
 г) число а является 0,9 частью числа b;
 д) число а является четвертью числа b;
 е) Число а вдвое больше числа b.

6

В классе 10 мальчиков и 15 девочек. Какой процент учеников класса составляют девочки?

7

На заправке было 3 тонны запаса бензина. 0,54 тонны бензина было продано. Вычисли, какой процент всего запаса бензина осталось продать.

8

Таблица показывает площадь континентов Земли в квадратных километрах.

Континент	Площадь континента	Процент площади континента от общей площади суши
Евразия	55119000	
Северная Америка	24230000	
Южная Америка	17814000	
Африка	30218000	
Австралия	8503000	
Антарктида	14245000	
Общая площадь		



Вычисли общую площадь суши, начерти и заполни таблицу.

- 9** Вычисли, какой процент от $(a + b)$ составляет $(a - b)$, если $a = 1,9$, $b = 0,6$.
- 10** Сплав состоит из 60 г серебра, 40 г золота и 100 г меди. Вычисли концентрацию каждого металла в этом сплаве.
- 11** Какова концентрация раствора получится, если мы растворим 100 г соли в 300 г воды?
- 12** 200 г морской воды, содержащей 3% соли, смешали с 400 г чистой воды. Какой концентрации раствор был получен?
- 13** Сколько граммов воды нужно добавить к 30 г соли, чтобы получить раствор 25%-ной концентрации?
- 14** Какой процент от площади фигуры составляет площадь закрашенной части?

Запомни!

$$\frac{1}{100} = 1\%$$

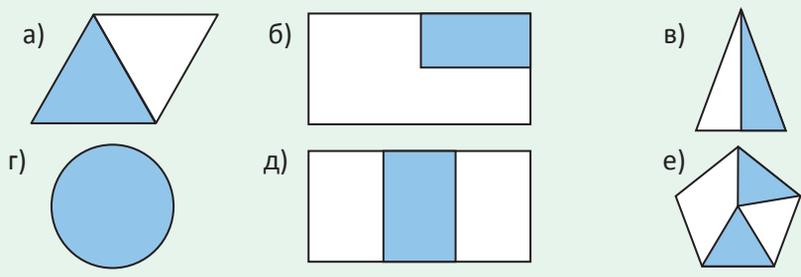
$$\frac{1}{10} = 10\%$$

$$\frac{1}{5} = 20\%$$

$$\frac{1}{4} = 25\%$$

$$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$$

$$\frac{1}{2} = 50\%$$

$$1 = 100\%$$


- 15** На сколько процентов подорожала электроэнергия (т.е. сколько процентов составляет увеличение начальной цены), если раньше 1 киловатт стоил 12 тетри, а сейчас цена за 1 киловатт составляет 18 тетри?
- 16** Сколько процентов составляет скидка в магазине, если плащ стоимостью 200 лари продали за 120 лари?
- 17** В таблице показано население Грузии, согласно описи 1913, 1970 и 2002 годов.

Годы	Количество населения	Изменение в процентах
1913	2 601 000	
1970	4 686 000	увеличилось
2002	4 356 000	уменьшилось

Вычисли в процентах изменение количества населения согласно следующей описи по сравнению с предыдущей описью.

18 Александр вырос за год на 4 сантиметра и его рост составил 164 сантиметра. На сколько процентов увеличился рост Александра за один год?

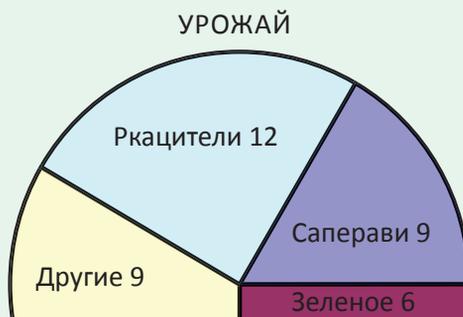
19 На круговой диаграмме показано количество собранного фермером урожая различных сортов винограда в тоннах.

Вычисли:

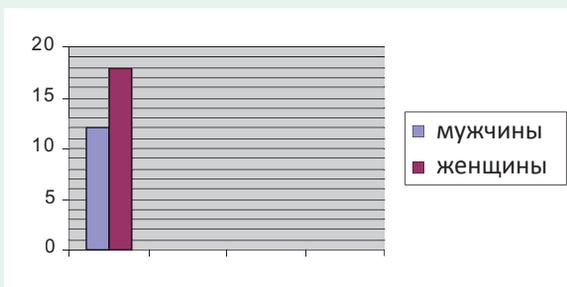
а) Какой процент от всего урожая составляет урожай винограда Саперави;

б) Какова градусная мера сектора, соответствующего количеству винограда сорта Ркацители.

Основываясь на данных круговой диаграммы, построй соответствующую столбчатую диаграмму.



20 Столбчатая диаграмма показывает количество женщин и мужчин, работающих в фирме.



Ответ на вопросы согласно диаграмме:

а) Сколько всего сотрудников в компании?

б) Какой процент сотрудников составляют женщины?

в) Какова градусная мера сектора, соответствующего количеству мужчин на круговой диаграмме?

Построй круговую диаграмму, соответствующую данной диаграмме, и укажи на ней количество женщин и мужчин, работающих в фирме.

21 Проведи прямую и отметь на ней точки А и В, расстояние между которыми составляет 8 см. На этой же прямой отметь точку С так, чтобы длина отрезка ВС составляла 40% от длины отрезка АВ. Сколько таких точек существует? Какова длина отрезка АС?

22 На сколько процентов увеличится число, если мы увеличим его в три раза?

23 На сколько процентов уменьшится число, если мы уменьшим его в десять раз?

24 Сколько граммов воды нужно добавить к 200 г раствора соли с концентрацией 30%, чтобы получить раствор с концентрацией 20%?

- 25 Смешали 500 г спиртового раствора 80%-ной концентрации и 300 г раствора 70%-ной концентрации. Какой концентрации раствор был получен?
- 26 После того, как в сплав золота и серебра добавили 50 г золота, концентрация золота в сплаве увеличилась с 30% до 80%. Сколько граммов сплава было до добавления в него золота?
- 27 Назовите самое большое трехзначное число, которое делится на 3 и 5.
- 28 Чему равна сумма числителей таких дробей, знаменатель которых равен 12, а значения которых находятся между $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{6}$?
- 29 Вычисли среднее арифметическое 2, 2 и 3.
- 30 Найди x , если среднее арифметическое x и 4,2 равно 5.
- 31 Каждый член последовательности чисел 1, x , 5, y , z ..., начиная со второго члена, равен среднему арифметическому его соседних чисел. Найди x , y и z .
- 32 В акции «Отходы в нашу пользу» ученики 7¹-го класса собрали 400 кг макулатуры, а ученики 7²-го класса - на 20% меньше, чем учащиеся 7¹-го класса. Известно, что из 1 тонны макулатуры производится столько же бумаги, сколько из 15 взрослых деревьев. Вычисли, сколько приблизительно деревьев спасли ученики 7-ых классов, собрав макулатуру.
- 33 Ученики летнего лагеря за 6 дней убрали 75% леса, прилегающего к лагерю. Через сколько дней ученики закончат уборку леса, если продолжат работать в том же темпе?



Работа в парах

Каждый из вас должен выбрать два ненулевых числа. Вычислите, сколько процентов от второго числа составляет первое число. Затем вычислите, сколько процентов от первого числа составляет второе число. Умножьте два полученных числа, округлите ответ до целого числа и запишите его. Сравните полученные результаты, какую закономерность вы заметили? Объясните эту закономерность.

При вычислении вы можете пользоваться калькулятором.

3.5 Числовые характеристики данных



Цель

Определение числовых характеристик данных, представленных по-разному: частота, диапазон, среднее, мода.

Определение числовых характеристик данных, представленных по-разному: частота, диапазон, среднее, мода.

На вопрос мамы, как он учится, Ника ответил: «На девять», потому что 9 баллов - это мой самый высокий балл.

Мама выписала из дневника оценки, полученные Никой в течение семестра по различным предметам:

7, 8, 9, 6, 9, 7, 9, 6, 7, 6, 9, 6, 8, 9, 7, 9, 6, 9, 10, 8.

Затем полученные оценки она записала в порядке возрастания и составила таблицу частот:

Оценка	6	7	8	9	10
Частота	5	4	3	7	1

Чтобы вычислить средний балл, мама сложила произведение баллов на их частоту и поделила результат на сумму частот:

$$\text{Среднее} = \frac{6 \times 5 + 7 \times 4 + 8 \times 3 + 9 \times 7 + 10 \times 1}{5 + 4 + 3 + 7 + 1} = 7,75$$

Несмотря на то, что частота 9 баллов в оценках Ники превышает частоту всех остальных баллов, средний балл, полученный Никой за семестр, составил менее 8 баллов. Данное с самой высокой частотой называется мода. Мода рассмотренных данных - 9.

Самый высокий из полученных Никой баллов - 10, а самый низкий - 6. Их разница 4 показывает, насколько распределены данные. В общем, разность между наибольшим и наименьшим значением данных называется диапазоном распределения числовых данных.

Задача 1. Тинико записывала температуру воздуха каждые 3 часа с 9:00 до 21:00 в течение трех дней и на основании полученных данных начертила линейную диаграмму. Согласно диаграмме, вычислим числовые характеристики данных.

Решение.

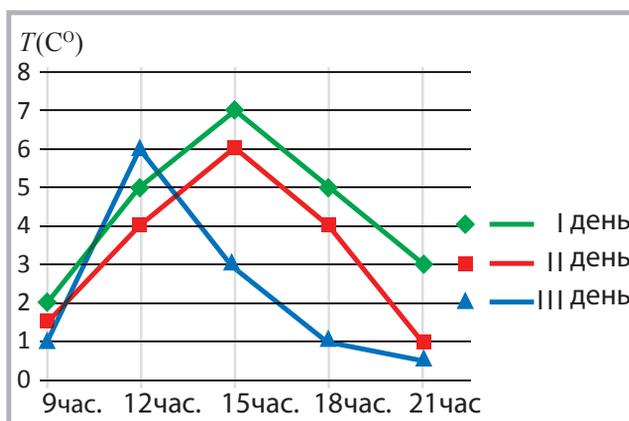
В I день самая низкая температура - + 2° была в 9:00 утра, самая высокая - + 7° в 15:00. Диапазон распределения в этот день равен 5°. Мода данных составляет 5°, а средняя температура в течение дня

$$(2^\circ + 5^\circ + 7^\circ + 5^\circ + 3^\circ) : 5 = 4,4^\circ.$$

Во II день самая минимальная температура была + 1,5 в 9 часов утра, а максимальная - + 6° в 15:00. Диапазон распределения в этот день равен 4,5°. Мода данных составляет 4°, а средняя температура в течение дня

$$(1,5^\circ + 4^\circ + 6^\circ + 4^\circ + 1^\circ) : 5 = 3,3^\circ.$$

Вычисли числовые характеристики третьего дня самостоятельно.



Вычисли диапазон распределения для всех трех дней: в этом случае минимальные данные составляют $0,5^\circ$ в третий день, а максимальные данные составляют 7° в первый день. Поэтому диапазон распределения будет $6,5^\circ$.

Как мы видим, диапазон распределения за все три дня превышает диапазоны распределения отдельных дней. Обратите внимание, что в общем случае диапазон распределения множества чисел всегда больше, чем диапазон распределения любого из его подмножеств (объясните почему?).

Давайте ознакомимся еще с одной характеристикой числовых данных - медианой. **Медиана** — это данная, которая размещается в середине ряда при упорядочении данных в порядке возрастания или убывания. Например, если мы упорядочим данные первого дня задачи 1 в порядке возрастания, получим: $2^\circ, 3^\circ, 5^\circ, 5^\circ, 7^\circ$, медиана этих данных будет 5° , потому что эта данная является третьей и от начала, и от конца.

В том случае, когда число данных является четным, за медиану берется среднее значение двух срединных данных. Например, для данных $-1, 0, 1, 2$ медиана равна $(0 + 1) : 2 = 0,5$.

Ответ на вопросы:

1. Какую данную называют модой?
2. Как вычислить среднее данных?
3. Как вычислить диапазон распределения данных?
4. Согласны ли вы с мнением Ники о том, что он учится «на девятки»?
5. Может ли диапазон распределения числовых данных быть меньше, чем диапазон распределения части этих данных?
6. Как найти медиану нечетного числа данных?
7. Как найти медиану четного числа данных?
8. Чему равна медиана оценок Ники, приведенных в параграфе?

Упражнения

1 Согласно диаграмме, приведенной в параграфе, найди моду данных за все три дня.

2 Согласно диаграмме, приведенной в параграфе, узнай, какое предложение является правильным:

- а) В течение всех трех дней максимальная температура была в 15 часов;
- б) В течение всех трех дней минимальная температура была в 9 часов;
- в) В течение всех трех дней температура снижалась с 15 до 21 часов;
- г) В течение всех трех дней температура поднималась с 9 до 15 часов.

3 В соответствии с данной таблицей частот найди среднее, моду и диапазон данных.

Данные	-1,4	+2,3	-4	+1,4	+6	-4,4	+3,3	4
Частота	1	3	2	5	2	3	4	1

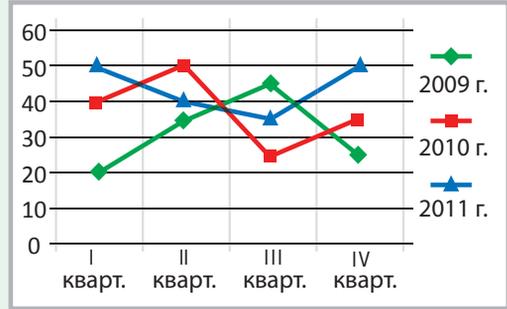
- 4** Чему равно x , если мода числовых данных $x, 5, 3, 8, 4, 5, 3, 10$ равна 3?
- 5** Чему равно a , если диапазон распределения числовых данных $a, 5, 6,5, 8,4, 11$, расположенных в порядке возрастания, равен 7,4?
- 6** Чему равно b , если диапазон распределения числовых данных $b, 5,1, 4,7, 3,4, -1$, расположенных в порядке убывания, равен 8?
- 7** Чему равно x , если среднее числовых данных $2,5, -3,7, x, -4,2, -5, 3, 1,7$ равно 1,25?
- 8** Дан ряд чисел: 16; 6; 8; 8; 6; 1; -1; 6; -3. Вычисли:
а) среднее; б) моду; в) медиану; г) диапазон.
- 9** Дан ряд чисел: 4; 6; 8; -12; -6; 11; 5; 0; -3; 6. Вычисли:
а) среднее; б) моду; в) медиану; г) диапазон.
- 10** В ряду натуральных чисел 3; 5; 12; 27; ...; 21 одно число пропущено. Найди это число, если диапазон этого ряда равен 35.
- 11** В ряду натуральных чисел 2; 8; 11; 22; ...; 19 одно число пропущено. Найди это число, если диапазон этого ряда равен 32.
- 12** Найди пропущенное число в данном ряду чисел, если известно, что среднее арифметическое ряда равно медиане ряда. 10; 15; 3; ...; 24; 16; 4.
- 13** Диапазон распределения температуры воздуха в Западной Грузии в январе составил 8 градусов, а в Восточной Грузии - 12 градусов. Может ли быть указанный показатель одинаковым во всей Грузии: а) 7 градусов? б) 11 градусов? в) 13 градусов?
- 14** В таблице даны результаты шести одноклассников в беге на 100 м.
- | | |
|--------|-----------|
| Саломе | 16,2 сек. |
| Гига | 14,7 сек. |
| Натия | 15,9 сек. |
| Лука | 15,3 сек. |
| Каха | 17,4 сек. |
| Лела | 19,2 сек. |
- а) Расположи эти данные по убыванию;
б) Вычисли среднее, медиану и диапазон распределения данных;
в) Какой ученик имеет наилучший результат?
г) Результат какого ученика ближе всего к среднему?
- 15** Придумай три числа, среднее арифметическое которых:
а) равно медиане;
б) больше медианы;
в) меньше медианы.

16

Линейная диаграмма показывает количество пшеницы (в тоннах), обработанной мелькомбинатом за три года поквартально.

Согласно диаграмме, определите числовые характеристики данных за каждый год и в общей сложности за три года:

- наибольшие и наименьшие данные;
- среднее данных;
- моду;
- диапазон распределения;
- медиану.



17

Дана таблица баллов, полученных учениками одного класса по контрольной по математике, расположенных в порядке возрастания.

Балл	a	4	5	6	7	8	b
Частота	1	2	3	5	8	5	1

Вычисли значения баллов a и b, если известно, что средний балл равен 6,4, а диапазон распределения равен 7.

18

Найди все целые значения числа x, для которых медиана данных x, -2, 5 равна x.

19

Бронзовый слиток объемом 16 см^3 весит 162 грамма. Сколько будет весить бронзовый слиток, объем которого 24 см^3 ?

20

Расстояние между двумя городами составляет 55 км, а расстояние между этими городами на карте равно 2,2 см. Каков масштаб этой карты?

21

В треугольнике ABC $\angle A = 68^\circ$, $\angle B = 42^\circ$. Какое из следующих неравенств верно?

- $AC < AB < BC$;
- $AB < AC < BC$;
- $BC < AB < AC$;
- $AC < BC < AB$.

22

Вычисли:

$$\text{а) } \frac{\left(1 + 1 : 1 \frac{1}{5}\right) + 1 \frac{1}{12} - \frac{11}{12}}{\frac{333}{500} : 0,37 - 1,4}; \quad \text{б) } \frac{5 \frac{4}{5} \times \frac{5}{36} + 0,375 - \frac{5}{9}}{1 \frac{49}{200} + 1,323 : 2,1}.$$

Возможно ли это?

Данные расположены в порядке возрастания: x; 3; 5; 6; 8; y.

Может ли диапазон распределения этих данных быть: а) 4? б) 7?

Обзор Главы 3

Что мы изучили в этой главе?

1. Способы получения количественных и качественных данных;
2. Запись числа в виде процентов и запись выраженного в процентах числа в виде дроби;
3. Нахождение процента от числа и нахождение числа по его проценту или части;
4. Запись соотношения в виде процента и ее использование;
5. Процентное увеличение — уменьшение величины и простая смета;
6. Упорядочение и представление данных в виде таблицы и диаграммы;
7. Вычисление числовых характеристик данных (среднее, мода, диапазон распределения).

Ответь на вопросы:

- Какие виды данных ты знаешь?
- Какие способы получения данных существуют?
- Как записать число в процентах?
- Как записать число, выраженное в процентах, в виде дроби?
- Какова связь между процентом и частью числа?
- Как найти процент p числа a ?
- Как найти число, процент p которого равен числу a ?
- Как найти число, которое больше (меньше) числа a на процент p ?
- Как определить, сколько процентов составляет число a от числа b ?
- Что такое мода данных?
- Что такое таблица частот данных?
- Как вычислить частоту данных?
- Как вычислить среднее числовых данных? Медиану?
- Что такое диапазон распределения данных?
- Какого вида диаграммы ты знаешь?
- Как построить линейную (столбчатую) диаграмму?

Выберите слово в правом столбце для предложения в левом столбце:

1. Разница между наибольшим и наименьшим числом данных называется ----- распределения.	модой
2. Данная с самой большой частотой называется -----.	частотой
3. Часть числа называется р ----- от этого числа.	диапазоном
4. Количество повторов данного называется ----- этого данного.	среднее
5. Частное суммы числовых данных и количества этих данных называется ----- данных.	процентом
6. Один процент от числа - это его ----- часть.	одна сотая

Упражнения

1

Вычисли устно:

- | | |
|---|--|
| а) какая часть от 5 равна 2,5; | б) какая часть от 27 равна 3; |
| в) $\frac{2}{11}$ частей от 55; | г) 0,7 часть от 20; |
| д) число, $\frac{3}{7}$ от которого равно 6; | е) число, $\frac{4}{9}$ от которого равно 8; |
| ж) 10% от 50; | з) число, 50% от которого равно 60; |
| и) какой процент от 1 кг составляет 300 г; | к) какой процент 1 см равен 6 мм; |
| л) какой процент от 1 часа составляет 12 минут; | м) какой процент от 1 т составляет 200 кг. |

2

Вычисли:

- а) На сколько процентов 50 больше 40;
 б) На сколько процентов 40 меньше 50.

3

Увеличь на 20%:

- а) 3 лари; б) 5 тонн; в) 1,2 метра; г) 25 кг; д) 3,6.

4

Уменьши на 40%:

- а) 5 лари; б) 3 тонны; в) 1,5 метра; г) 2,5 кг; д) 36 см

5

В классе Татии 25 учеников. 60% составляют девочки. 0,2 процента девочек - отличницы. а) Сколько отличниц в классе Татии? б) Какого размера (в градусах) сектор соответствует числу мальчиков на круговой диаграмме, показывающей количество девочек и мальчиков в классе? Построй эту диаграмму.

6

Орнитолог (ученый, изучающий птиц) наблюдает, сколько раз в день скворец покидает гнездо, чтобы принести еду своим птенцам. Для облегчения учета, в дневнике наблюдений он отмечает линией каждый вылет скворца из гнезда (см. ниже).





06 ⁰⁰ -12 ⁰⁰	
12 ⁰⁰ -18 ⁰⁰	

Ответь на вопросы согласно этим данным:

- Какой метод поиска данных использует орнитолог?
- Сколько раз скворец покинул гнездо в первой половине дня?
- В какое время суток скворец более активен?
- Сколько примерно раз в час скворец покидает гнездо в течение дня?

7 На сколько процентов снизилась цена шубы, стартовая цена которой составляла 500 лари, а после скидки она была продана за 350 лари?

8 На сколько процентов повысилась цена муки, если раньше 1 килограмм стоил 80 тетри, а теперь - 1 лари и 20 тетри?

9 Длина основания равнобедренного треугольника составляет 30% от его периметра. Какой процент периметра составляет длина боковой стороны?

10 Одна часть жителей города говорит только на грузинском, вторая часть - только на русском, остальные - на грузинском и русском. 80% жителей города говорят по-грузински, 60% говорят по-русски. Какой процент жителей города говорит на обоих языках?

11 Таблица показывает частоту очков, выпадающих на игральных костях.

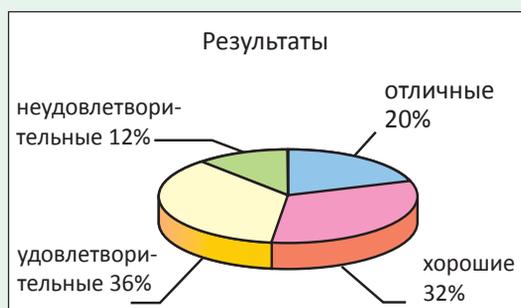
Очко	1	2	3	4	5	6
Частота	4	3	5	6	4	3

Согласно таблице ответь на вопросы:

- Сколько всего раз бросали кости?
- Чему равен диапазон данных?
- Чему равна мода данных?
- Чему равно среднее данных?
- Чему равна медиана данных?

12 На круговой диаграмме показаны результаты успеваемости 25 учеников одного класса за первый семестр в процентах. Согласно диаграмме определи:

- Сколько отличников в классе?
- Результаты скольких учеников хорошие или удовлетворительные?
- Какой сектор (в градусах) соответствует ученикам с неудовлетворительными результатами?
- Учеников с какими результатами больше всего в классе?



13

На вопрос, сколько солдат было в его отряде, лейтенант ответил, что $\frac{2}{7}$ части отряда находится в карауле, $\frac{1}{7}$ часть - в госпитале, а оставшиеся 28 солдат - в казарме. Сколько всего солдат в отряде?



14

В классе Левана 40% учеников составляют девочки, 25% из которых - отличницы. Сколько минимум учеников в классе Левана?

15

Мама отправила Тамрико за лекарством. Расстояние от дома до аптеки - 1,5 км. 55% этой дистанции Тамрико прошла за 10 минут. На каком расстоянии от аптеки Тамрико будет через 20 минут после выхода из дома, если она будет идти с той же скоростью?

16

Расстояние между двумя военными лагерями А и В, составляет 20 километров. Командир группы А передал солдату пакет, приказал доставить ее командиру группы В и немедленно вернуться назад. Солдат преодолел 60% дистанции между лагерями за 2 часа. На каком расстоянии от лагеря А солдат будет через 4 часа после выхода, если он будет двигаться с той же скоростью?



17

Из пшеницы получают 80% муки, а хлеб «Шоти» на 20% тяжелее муки, необходимой для его выпечки. Сколько граммов пшеницы необходимо, чтобы испечь один 480-граммовый хлеб «Шоти»?

18

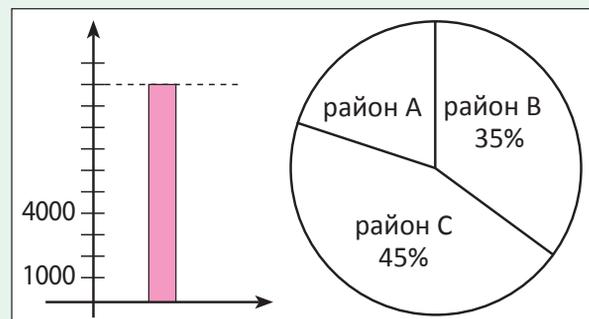
После того, как один игрок покинул команду, количество нападающих в команде уменьшилось с 25% до 20%. Сколько игроков было в команде до ухода нападающего?

19

После выпаривания 2 кг воды из раствора, концентрация раствора увеличилась с 80 до 90%. Сколько килограммов раствора было до испарения воды?

20

Город состоит из трех районов — А, В и С. Круговая диаграмма показывает долю населения в районах в процентах, а столбчатая диаграмма - количество населения в районе А. Вычисли количество населения в районах В и С.



Ну-ка, попробуй!

Найди натуральное число, в результате деления которого на 32% от этого числа, в качестве неполного частного получится 12% того же числа.

Тест № 3

В таблице приведены данные стран, которые были включены в первую десятку в 2004 году минимум по одному показателю: площади, населению, валовому внутреннему продукту.

Страна	Столица	Площадь (тыс. км ²)	Население (млн)	Валовый внутренний продукт (млн. \$)
Австралия	Канберра	7687	20,1	692,4
Аргентина	Буэнос Айрес	2767	39,5	172,1
США	Вашингтон	9629	295,7	12438,9
Бангладеш	Дакка	144	144,3	61,9
Бразилия	Бразилия	8513	186,1	732,1
Германия	Берлин	357	82,4	2906,7
Великобритания	Лондон	244	60,4	2295,1
Испания	Мадрид	504	40,3	1120,3
Япония	Токио	377	127,4	4799,1
Индия	Дели	3288	1080,3	749,4
Индонезия	Джакарта	1919	241,9	284,1
Италия	Рим	301	58,1	1836,4
Канада	Оттава	9984	32,8	1098,4
Нигерия	Абуджа	923	128,8	91,6
Пакистан	Исламабад	803	162,4	90,3
Россия	Москва	17075	143,4	755,4
Франция	Париж	547	60,7	2216,3
Судан	Хартум	2506	40,2	25,4
Казахстан	Астана	2717	15,2	51,9
Китай	Пекин	9597	1306,3	1843,1

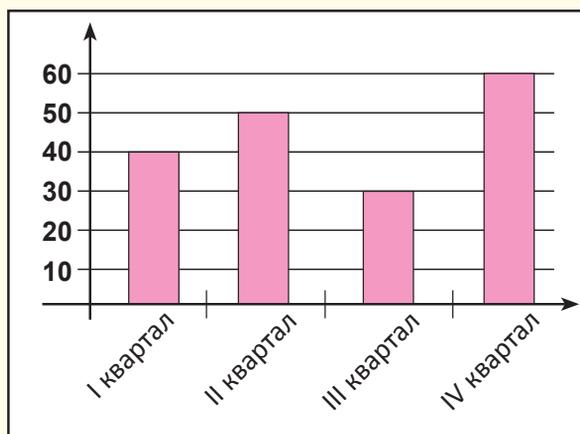
Согласно таблице, ответьте на вопросы 1-5:

- 1** Какая страна мира имеет наибольшее население?
а) Россия; б) Китай; в) Япония; г) Индия.
- 2** Какая страна имеет наибольшую территорию?
а) Россия; б) Китай; в) Япония; г) Соединенные Штаты;
- 3** Валовой внутренний продукт какой страны является наибольшим?
а) США; б) Китая; в) Японии; г) Германии.
- 4** Насколько меньше население Франции, чем Нигерии?
а) на 58 млн.; б) на 59,7 млн.; в) на 68,1 млн.; г) на 45 млн..

- 5 Насколько больше валового внутреннего продукта производится в Германии по сравнению с Россией?
а) на 1258,3 млрд. \$; б) на 2151,3 млрд. \$;
в) на 1580,4 млрд. \$; г) на 980,8 млрд. \$.
- 6 Если 7 - мода числовых данных: $x, 1, 7, 5, 4, 5, 3, 7$, то $x =$
а) 1; б) 7; в) 5; г) 3.
- 7 Если диапазон распределения числовых данных: $a, 3, 5, 8, 10$, расположенных в порядке возрастания, равен 8, то $a =$
а) 2; б) 5; в) 3; г) 8.
- 8 Чему равен x , если среднее числовых данных: $-3, 5, x, -5, 3, 7$ равно 1?
а) -5; б) 5; в) -1; г) 1.
- 9 Диапазон распределения роста девочек VII класса равен 13 см, а мальчиков - 10 см. Сколько сантиметров может быть диапазон распределения роста в этом классе?
а) 14 см; б) 11 см; в) 10 см; г) 9 см
- 10 Медиана данных: $-3; 0; -7; 9; 3$, равна:
а) -7; б) -3; в) 1; г) 0
- 11 20% от одного часа это:
а) $\frac{1}{20}$ часа; б) $\frac{1}{5}$ мин; в) 12 мин; г) 20 мин.
- 12 Число, составляющее 5% от 6, равно:
а) 120; б) 56; в) 360; г) 30
- 13 20 от 80 составляет:
а) 4%; б) 25%; в) 30%; г) 5%.
- 14 10% какого числа составляет 0,375 часть от 24?
а) 160; б) 120; в) 72; г) 90
- 15 На сколько процентов увеличится число, если мы увеличим его в 5 раз?
а) на 10%; б) на 900%; в) на 400%; г) на 90%.
- 16 На сколько процентов уменьшится число, если мы уменьшим его в 5 раз?
а) на 5%; б) на 80%; в) на 500%; г) на 50%.
- 17 После подорожания на 10% цена 1-ого литра бензина составила 2,2 лари. Сколько стоил литр бензина до подорожания?
а) 2 лари; б) 1 лари и 99 тетри;
в) 1 лари и 10 тетри; г) 1 лари и 90 тетри.

- 18** Цена хлеба увеличилась с 80 тетри до 1 лари. На сколько процентов подорожал хлеб?
 а) на 35%; б) на 10%; в) на 25%; г) на 50%;
- 19** 10 г соли растворили в 40 г чистой воды. Какой концентрации раствор был получен?
 а) 10%; б) 20%; в) 40%; г) 50%.
- 20** 100 мл 90% спирта развели в 200 мл чистой воды. Какой концентрации раствор был получен?
 а) 30%; б) 20%; в) 45%; г) 60%
- 21** Каким было население города год назад, если сейчас в городе проживает 220 000 человек, а ежегодный прирост составляет 10%?
 а) 198000; б) 210000; в) 120000; г) 200000
- 22** Ширина прямоугольника составляет 20% от периметра. Какой процент периметра составляет длина этого прямоугольника?
 а) 15%; б) 25%; в) 30%; г) 40%.

Диаграмма показывает количество компьютеров, проданных в одном из магазинов по кварталам. Согласно диаграмме, ответ на вопросы № 23, № 24, № 25:



- 23** Сколько компьютеров было продано в этом магазине в течение года?
 а) 160; б) 165; в) 170; г) 180
- 24** На сколько процентов меньше было продано компьютеров в первом квартале, чем во втором?
 а) на 20%; б) на 25%; в) на 10%; г) на 40%.
- 25** Чему равна медиана данных?
 а) 50; б) 40; в) 60; г) 45.

В этой главе ты изучишь:

- ❖ Выражения с переменной;
- ❖ Свойства равных выражений;
- ❖ Свойства натуральной степени;
- ❖ Одночлен и многочлен;
- ❖ Действия над одночленами и многочленами;
- ❖ Формулы сокращенного умножения;
- ❖ Линейные уравнения;
- ❖ Алгебраический метод решения задачи;
- ❖ Последовательность чисел, имеющих закономерность.

После изучения главы ты сможешь:

- ❖ Определять допустимое значение переменной;
- ❖ Использовать свойства равных выражений для решения линейных уравнений;
- ❖ Выполнять алгебраические операции над одночленами и многочленами;
- ❖ Использовать формулы сокращенного умножения для упрощения и вычисления выражений;
- ❖ Решать текстовые задачи алгебраическим методом;
- ❖ Распознавать закономерность и дополнять последовательность чисел. Решать интересные задачи с использованием положительных и отрицательных чисел.



Фибоначчи
(Леонардо Пизанский)
Итальянский математик
1170-1240 гг.

Проект

«Числа Фибоначчи»

- 1) Найди:
 - Историю составления чисел Фибоначчи;
 - Связь чисел Фибоначчи с золотым сечением;
 - Нахождение чисел Фибоначчи в природе и искусстве;
- 2) Приложи к проекту соответствующие фотографии;
- 3) Подготовь свой проект к презентации.

Ну-ка, попробуй!

Найди такое натуральное число n , чтобы числа: $n + 17$ и $n - 6$ были полными квадратами.

4.1 Выражение с переменной



Цель

Уметь:

1. Вычислять числовое значение выражения с переменной;
2. Определять допустимое значение переменной.

Задача 1. В магазине было продано несколько мобильных телефонов двух моделей. Телефон первой модели стоит 135 лари, а второй - 245 лари. Напишем выражение для вычисления общей стоимости проданных телефонов.

Решение. Обозначим количество проданных телефонов первой модели m , а количество телефонов второй модели - n . Тогда общая стоимость проданных телефонов первой модели составляет $135 \times m$ лари, а общая стоимость телефонов второй модели - $245 \times n$ лари. Если мы обозначим S общую стоимость проданных телефонов в лари, то получим:

$$S = 135 \times m + 245 \times n$$

Посмотрим на выражение в правой части формулы. В отличие от числового выражения, оно также содержит переменные m и n . Значение такого выражения зависит от значения переменных в нем. Например, когда $m = 3$ и $n = 2$, тогда выражение принимает значение $135 \times 3 + 245 \times 2 = 895$, если $m = 2$ и $n = 3$, тогда значение этого выражения будет $135 \times 2 + 245 \times 3 = 1005$.

Выражение, которое содержит переменную, называется **выражением с переменной**. Если вместо переменных в выражении с переменной вставить какое-либо из их допустимых значений, выражение с переменной будет преобразовано в числовое выражение, при вычислении значения которого полученное число называется **значением выражения с переменной**. В рассмотренном нами примере, вставив значение $m = 3$ и $n = 2$, выражение $135 \times m + 245 \times n$ было преобразовано в числовое выражение $135 \times 3 + 245 \times 2$ и получило значение: 895.

Выражение с переменной может содержать любое количество переменных и знаков действий над ними. Знак умножения может не быть записан, если он располагается между переменными или между переменной и числом. Например, $4 \times a \times b$ можно записать как $4ab$.

Рассмотрим выражение $\frac{1}{x-y}$. Зададим вопрос: будет ли это выражение всегда превращаться в числовое выражение, если мы вместо переменных x и y вставим в него их значения? Вставив в это выражение $x=2$, $y=2$, мы получим $\frac{1}{2-2}$, что не является числовым выражением (почему?). В общем, если значения x и y совпадают, то выражение $\frac{1}{x-y}$ не имеет числового значения. В этом случае говорят: «Выражение не имеет смысла». Такие значения переменных, конечно, должны быть исключены из их допустимых значений.

Рассмотрим выражение $\frac{s}{t}$, Рассмотрим выражение , которое встречается в формуле

$$v = \frac{s}{t}$$

Выражение в правой части этой формулы не имеет смысла, когда $t = 0$.

вычисления скорости. Это выражение получает числовое значение для каждого значения переменной S и для каждого ненулевого значения переменной t . Когда $t = 0$, тогда выражение не имеет смысла.

Ответь на вопросы

1. Чем отличается выражение с переменной от числового выражения?
2. Как вычислить значение выражения с переменной?
3. Можем ли мы вставить любое значение переменной в выражение с переменной?
4. Что означает фраза «Выражение не имеет смысла»? Приведи соответствующий пример.

Упражнения

- 1** Начерти и заполни таблицу.

x	-2,5	-1,2	0,3	1/2
y	4	3	-2,1	2
$2x-y$				

- 2** Начерти и заполни таблицу.

u	2	-3	4	1/2
v	2	3	10	2/3
$(u+v)(u-v)$				

- 3** Выбери значения t так, чтобы выражение $t + 2$ имело значение, указанное в таблице.

t				
$t+2$	-2	1,5	0	$2\frac{1}{2}$

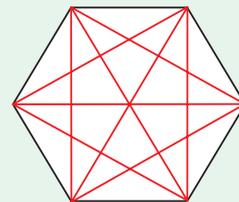
- 4** Выбери значения a и b так, чтобы y выражения $a + b$ было значение, указанное в таблице.

a				
b				
$a+b$	4	0	2/3	-2

- 5** Одна плитка шоколада стоит 2 лари и 20 тетри. Сколько стоит n плиток шоколада?

- 6** 1 кг яблок стоит a лари, 1 кг груш - b лари. Нино купила 3 кг яблок и 2 кг груш. Сколько лари Нино заплатила за фрукты?
- 7** С зарплаты Нана купила n кг сахара, 1 кг которого стоит 1,9 лари, и m кг муки, 1 кг которой стоит 1,5 лари. За покупки она заплатила 20% своей зарплаты. Какая зарплата у Наны?
- 8** Туристу, который шел со скоростью V км/ч в течение t часов, осталось пройти 7 км до турбазы. Сколько всего километров должен пройти турист??
- 9** Для какого значения переменной выражение не имеет смысла?
 а) $\frac{3x}{x-2}$; б) $\frac{v+u}{6-3v}$; в) $\frac{a}{2a+3}$; г) $\frac{a}{3,5a+14}$; д) $\frac{b}{1-a^2}$.
- 10** Турист планировал преодолеть S километров за t часов, но прибыл в пункт назначения на 2 часа раньше. Напиши выражение для вычисления скорости туриста.
- 11** a килограммов муки планировалось расфасовать в пакеты по n килограммов, но вместимость упаковок была увеличена на 500 грамм. Напиши выражение, чтобы рассчитать, сколько пакетов было использовано.
- 12** Напиши в виде выражения с переменной.
 а) удвоенное произведение чисел a и b ;
 б) полсуммы чисел a и b ;
 в) соотношение утроенного произведения чисел a и b к разности этих же чисел;
 г) произведение трех последовательных натуральных чисел;
 д) частное разности чисел a и b и их произведения;
 е) двузначное число, цифра разряда десятков которого a , а цифра единиц - b ;
 ж) процентное соотношение чисел a и b .
- 13** Два туриста одновременно вышли навстречу друг другу из турбаз А и В. Один турист двигался со скоростью V_1 , а другой – со скоростью V_2 . Каково расстояние между турбазами, если: а) туристы встретились через t часов? б) через 3 часа расстояние между туристами было 12 км?
- 14** Обувь, которая стоила m лари, в декабре подорожала на $p\%$, а в феврале подешевела на $q\%$. Сколько стоила обувь в феврале?
- 15** У Гии было n лари. За половину этой суммы он купил рюкзак, а за 20% от оставшейся суммы он купил мяч. Сколько денег осталось у Гии?
- 16** Выбери две пары значений переменных p и q так, чтобы значение выражения $3p(p-q)$ было равно нулю.
- 17** Докажи, что значение выражения $2(m+1) - 2m$ не зависит от значения переменной.

- 18 Число диагоналей L выпуклого многоугольника с вершинами n (n -угольника) вычисляется по формуле: $L = \frac{n(n-3)}{2}$. Вычисли значение L , когда $n = 3, 4, 5$ и проверь, построив чертеж соответствующего многоугольника.



$n=6; L=9$

- 19 Найди пару значений переменных a и b , для которых выражение $\frac{a-b}{a+b}$ не имеет смысла.

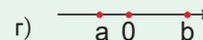
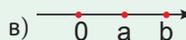
- 20 Обоснуй, что для каждого значения y мы найдем такое значение x , при котором выражение $\frac{1}{x-y}$ не имеет смысла.

- 21 Найди такое значение x , при котором выражение $\frac{1}{(2x+3)(1+y)}$ не имеет смысла ни при каком значении y .

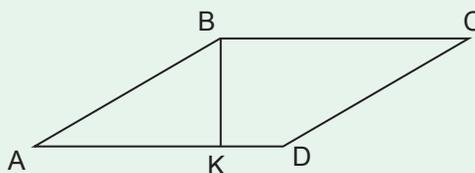
- 22 Обоснуй, что выражение $\frac{1}{x^2+1}$ имеет смысл при любом значении x .

- 23 Докажи, что для любого натурального значения n значение выражения $n(n+1)(n+2)$ кратно 6.

- 24 Сравни модули a и b в соответствии с числовой прямой.



- 25 Из вершины B четырехугольника $ABCD$ опущенный к стороне AD перпендикуляр BK образует угол 60° со стороной AB . Найди длину стороны AB , если $BK = 7,5$ см.



- 26 Нарисуй четырехугольник, у которого:
- все углы равны, а стороны попарно - разные;
 - все стороны равны, а углы попарно - разные;
 - все углы и все стороны равны.

- 27 Величина внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника:
- равен 136° ;
 - равен 70° .
- Вычисли углы треугольника.

- 28 Величина внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника равен 120° . Вычисли периметр треугольника, если длина основания составляет $3\frac{1}{3}$ дм.

4.2 Равные выражения



Цель

Уметь использовать свойства равных выражений и основных тождеств алгебры.

Рассмотрим два выражения: $x^2 + x$ и $3x - 2x^2$. Вычислим их значения для нескольких значений переменной x и заполним таблицу:

x	-1	0	1	$\frac{2}{3}$
$x^2 + x$	0	0	2	$\frac{10}{9}$
$3x - 2x^2$	-5	0	1	$\frac{10}{9}$

Как видим, для некоторых значений переменной x , а именно 0 и $\frac{2}{3}$, значения этих выражений совпадают. В таком случае говорят, что выражения $x^2 + x$ и $3x - 2x^2$ равны, когда $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$, или они равны на $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ множестве.

Некоторые выражения равны друг другу при всех значениях переменных. Такие выражения называются **тождественно равными выражениями**, а равенство, связывающее два тождественно равных выражения, называется **тождеством**. Тождество является истинным равенством при всех значениях переменной.

Примерами тождественно равных выражений являются $5(x+y)$ и $5x+5y$: оба выражения принимают одинаковые значения для любого значения переменных x и y . Действительно, после ввода значений переменных x и y выражения $5(x+y)$ и $5x+5y$ будут преобразованы в числовые выражения, где вместо x и y вставлены определенные числа. Согласно распределительному правилу умножения

$$5(x+y) = 5x + 5y.$$

Таким образом, эти выражения будут иметь равные значения.

Если мы запишем известные свойства операций над числами с помощью переменных, мы получим **основные тождества алгебры**:

$$a + b = b + a \text{ (переместительное свойство слагаемых);}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ (сочетательное свойство слагаемых);}$$

$$ab = ba \text{ (переместительное свойство множителей);}$$

$$(ab)c = a(bc) \text{ (сочетательное свойство множителей);}$$

$$(a + b)c = ac + bc \text{ (распределительное свойство).}$$

В этих равенствах a , b и c могут быть любыми числами, переменными или выражениями с переменными.

Вышеуказанные тождества позволяют доказать тождественные равенства выражений с переменными.

Докажем, например, тождество:

$$a(a+1) = a^2 + a.$$

Используя распределительное свойство, получим:

$$a(a + 1) = a \times a + a \times 1 = a^2 + a.$$

При решении математических задач часто целесообразно использовать следующие свойства равенства выражений:

Если числа A , B и C являются переменными или выражениями с переменными, и $A = B$, то:

1. $A + C = B + C$; $A - C = B - C$

(Если к обеим сторонам равенства мы прибавим или вычтем из них одно и то же число или выражение, то равенство останется верным).

2. $AC = BC$

(Если мы умножим обе части равенства на одно и то же число или выражение, то равенство останется верным).

3. Если $C \neq 0$, $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$

(Если мы разделим обе части равенства на одно и то же ненулевое число или выражение, равенство останется верным).

Используем свойства равных выражений, чтобы доказать следующее утверждение:

Если $2x + y^2 = y^2 - 6$, то $x = -3$.

Доказательство. После вычитания из обеих частей равенства y^2 , получим: $2x = -6$

Разделим обе части уравнения на 2 ($2 \neq 0$). Получим: $x = -3$.

Свойства равных выражений используются для решения уравнений.

Ответ на вопросы:

1. В каких случаях выражения равны на определенном множестве чисел?
2. Какие выражения тождественно равны?
3. Что такое тождество?
4. Какие свойства действий над числами выражают основные тождества алгебры? Назови их.
5. Какие свойства равенства ты знаешь?

Упражнения

1

Устно формулируй тождество:

а) $a + (b + c) = (a + b) + c$; б) $a + 0 = a$; в) $a + (-a) = 0$; г) $a \times 0 = 0$;

д) $a \times b = b \times a$; е) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$; ж) $a \times 1 = a$; з) $a \times 1 = a$; и) $a \times \frac{1}{a} = 1$, если $a \neq 0$

к) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ л) $\frac{m}{n} - \frac{k}{n} = \frac{m-k}{n}$ м) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ н) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

2

Устно формулируй равенство:

а) $P = 2(a + b)$, где a и b - длина сторон прямоугольника, а P - периметр;

б) $S = ab$, где a и b - длины сторон прямоугольника, а S - площадь.

- 3** Устно составь равенство: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, где $\alpha + \beta + \gamma$ - величины углов треугольника.
- 4** Покажи, что выражения $2x + y$ и $x + 2y$ равны, когда $x = 3$ и $y = 3$. Для каких других значений x и y эти выражения равны друг другу? Для каких значений они различаются?
- 5** Найди значение переменной x , при котором выражения $x + 1$ и $2x$ равны друг другу. Для каких значений переменной эти выражения различаются?
- 6** Покажи, что выражения $z^2 + 1$ и $z + 1$ равны на множестве $\{0,1\}$.
- 7** Выбери значение a , чтобы выражения $a + 1$ и $3a - 1$ были равны друг другу.
- 8** Напиши два выражения с переменной x , которые равны друг другу, когда $x = 3$, и различаются, когда $x = 5$.
- 9** Напиши два выражения с переменной t , которые равны друг другу при $t = -2$ и различаются при $t = 0$.
- 10** Напиши два выражения с переменными u и v , которые равны, когда $u = v$, и не равны, когда $u = 1$, $v = 2$.
- 11** Докажи, что следующие выражения тождественно равны:
 а) $2x + 3y$ и $3y + 2x$; б) $7a^2$ и $4a^2 + 3a^2$; в) $1,5m + 3z + 2,5m$ и $3z + 4m$;
 г) $xz + 2z$ и $(2 + x)z$; д) $3p - 2q - p + q$ и $2p - q$.
- 12** Докажи, что следующие выражения тождественно равны.
 а) $x(x-a)$ и $x^2 - ax$; б) $5(7 + p)$ и $5p + 35$; в) $(3 - 2u)u$ и $3u - 2u^2$;
 г) $-a(2b - a)$ и $a^2 - 2ab$; д) $2a(0,5a + 1)$ и $a^2 + 2a$.
- 13** Докажи тождества:
 а) $3,2p - 2,2p = 1,5p - 0,5p$; б) $2a^2 + 3p - a^2 = 3p + a^2$; в) $ab^2 + 2a = a(b^2 + 2)$;
 г) $\frac{2}{3}mn - \frac{1}{6}mn = \frac{1}{2}mn$; д) $2(x+1) + (x+1) = 3(x+1)$.
- 14** Используй свойства равенства выражений и докажи, что:
 а) если $x^2 + 3 = 2y^2$, то $y^2 + x^2 + 3 = 3y^2$;
 б) если $m + 2n = 2m$, то $m = 2n$;
 в) если $\frac{3}{2}p^2 = \frac{1}{2}$, то $6p^2 = 2$;
 г) если $4a = 2b$, то $b = 2a$.

15

Напиши в виде равенства:

- а) число a на 5 больше числа b ;
- б) число b в 5 раз больше числа a ;
- в) число b составляет 0,2 части от числа a ;
- г) число a составляет 30 процентов от числа b ;
- д) число a на 40 процентов больше числа b ;
- е) число b на 40 процентов меньше числа a ;
- ж) среднее арифметическое чисел a , b , c и d равно m .

16

Предположим, что один карандаш стоит n тетри, а один ластик – m тетри. Напиши предложение в виде равенства:

- а) Карандаш на 20 тетри дороже ластика;
- б) Два карандаша дороже трех ластика на 30 тетри;
- в) Ластик на 40% дешевле карандаша;
- г) k штук карандашей дешевле q штук ластика на p тетри.

17

1 кг айвы стоит a лари, а 1 кг яблок – b лари. Напиши предложение в виде равенства:

- а) 2 кг айвы на 1,5 лари дороже 3 кг яблок;
- б) 3 кг айвы в 2 раза дороже 2 кг яблок;
- в) m кг айвы на 40% дешевле n кг яблок.

18

У Лаши есть m лари, у Ники – n лари. Напиши предложение в виде равенства:

- а) Если Лаша отдаст Нике 3 лари, то у Ники будет в 2 раза больше денег, чем у Лаши;
- б) Если Ника отдаст Лаше 5 лари, у Лаши будет на 25% больше денег, чем у Ники.

19

Найди все натуральные значения n , для которых дробь $\frac{2n+9}{n}$ является целым числом.

20

Предположим, что a , b и c – длины сторон треугольника. Какое из следующих неравенств невозможно?

- а) $a + b > c$; б) $a < c + b$; в) $a > b - c$; г) $b > c + a$.

21

Дано $A \cap \{1; 3; 4; 6; 9\} = \{1; 4; 6\}$. Какому из следующего множеств может быть равно множество A ?

- а) $\{1; 4; 5; 6; 7; 9\}$; б) $\{1; 4; 6; 7; 12\}$; в) $\{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$; г) $\{1; 4; 5; 8; 10\}$.

22

До скидки пальто стоило 220 лари, а после скидки – 165 лари. На сколько процентов подешевело пальто?

23

Вычисли периметр прямоугольника, если его:

- а) длина $2\frac{1}{2}$ см, ширина – $1\frac{1}{3}$ см;
- б) длина $3\frac{4}{5}$ дм, ширина – $11\frac{1}{2}$ см.

24 В ветрозащитной полосе было посажено 40 саженцев абрикосов. Только два из них засохли. Сколько саженцев принялось? Какой процент саженцев не принялся?

25 Представь данную дробь в виде суммы трех таких дробей, числитель каждой из которых равен 1.

а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{7}{12}$; в) $\frac{13}{27}$.

26 В таблице приведены данные о пассажирских потоках в международных аэропортах Грузии за первые два месяца 2017 и 2018 годов.



Наименование аэропорта	Пассажирский поток в 2017 году январь-февраль	Пассажирский поток в 2018 году январь-февраль
Международный аэропорт Тбилиси	314 964	433 202
Международный аэропорт Кутаиси	45 826	48 890
Международный аэропорт Батуми	10 852	18 129

По данным таблицы вычисли:

- а) На сколько процентов увеличился пассажирский поток в январе-феврале 2018 года по сравнению с январем-февралем 2017 года в каждом аэропорту?
- б) На сколько процентов увеличился пассажирский поток в январе-феврале 2018 года по сравнению с январем-февралем 2017 года во всех трех аэропортах?



Международный аэропорт Кутаиси

4.3 Степень с натуральным показателем



Цель

Уметь вычислять значение выражения со степенью, писать большие числа с использованием степени.

В математике существует специальное обозначение, с помощью которого можно коротко записать произведение равных множителей. Например

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

Выражение 2^5 называют **степенью** и читают так: «Два в пятой степени».

В этом выражении число 2 — это **основание степени**, число 5 — это **показатель степени**.

Следовательно, основание степени — это тот множитель, который повторяется несколько раз, а показатель степени — это число, которое показывает, сколько таких множителей содержит произведение.

В общем, в произведении:

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ раз}} = a^n$$

число a умножается само на себя n раз. Следовательно, основание степени a^n равно a , а показатель степени — n .

Вторая степень числа иначе называется **квадратом** этого числа. Например, запись 9^2 читают так: «девять во второй степени» или «девять в квадрате».

$$9^2 = 9 \times 9 = 81$$

Произведение $5 \times 5 \times 5$ кратко записывают: 5^3 и читают: «5 в третьей степени» или «5 в кубе»

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Нахождение значения степени называется **возведением в степень**. Основание степени может быть любым числом.

Рассмотрим примеры:

$$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$$

$$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$$

$$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{3^3}{2^3} = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}$$

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000000$$

$$(0,1)^4 = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,0001$$

Из приведенных примеров видно:

- При возведении в степень положительного числа получается положительное число.
- Четная степень отрицательного числа является положительным числом.
- Нечетная степень отрицательного числа является отрицательным числом.
- Чтобы возвести в степень смешанное число, сначала нужно записать это число как неправильную дробь, а затем возвести ее в степень.

Пример 1. Вычислим: а) $3 + 2^3$; б) $100 - (-5)^3$.

Решение.

а) I этап. Вычислим значение степени: $2^3 = 8$;

II этап. Выполним сложение: $3 + 8 = 11$.

б) I этап. Вычислим значение степени: $(-5)^3 = -125$;

II этап. Выполним сложение: $100 - (-125) = 100 + 125 = 225$.

Ответ: а) 11; б) 225.

Пример 2. Вычислим значения выражений $125 + 15^2$ и $(125 + 15)^2$.

Решение.

$125 + 15^2 = 125 + 225 = 350$ Сначала возведем в степень, а затем вычислим сумму.

$(125 + 15)^2 = 140^2 = 19600$ Сначала вычислим сумму, а затем - ее квадрат.

При вычислении значения числового выражения со степенью без скобок, сначала нужно выполнить возведение в степень.

Пример 3. Вычислим:

а) 200×10^2 ; б) $200 : 10^3$.

Решение.

а) $200 \times 10^2 = 200 \times 100 = 20000$;

б) $200 : 10^3 = 200 : 1000 = 0,2$.

При написании больших чисел часто используется 10 в степени. Например, скорость света составляет 300 000 км/с. Используя 10 в степени, мы можем написать это число более кратко. В частности,

$$300\,000 = 3 \times 10^5.$$

Расстояние от Земли до Солнца - 150 000 000 километров - мы можем также представить таким образом:

$$150\,000\,000 \text{ км} = 15 \times 10^7 \text{ км} = 1,5 \times 10^8 \text{ км}.$$

Степень любого числа с показателем 1 равна самому этому числу.

$$a^1 = a$$

При возведении нуля в любую натуральную степень получается

$$\text{ноль. } 0^n = 0$$

Ответ на вопросы:

1. Краткой записью какого действия является степень?
2. Какой показатель имеет выражение a^n ? Что является основанием степени?
3. Положительна или отрицательна:
 - а) Нечетная степень положительного числа?
 - б) Четная степень отрицательного числа?
 - в) Нечетная степень отрицательного числа?
4. Сколько делителей имеет квадрат простого числа? Куб?

Упражнения

1 Запиши в виде степени данное произведение:

- а) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$; б) $16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$;
 в) $(-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10)$; г) $0,7 \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7$;
 д) $\left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right)$; е) $(-21) \times (-21)$;
 ж) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$; з) $(-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7)$;
 и) $\left(-\frac{11}{25}\right) \times \left(-\frac{11}{25}\right) \times \left(-\frac{11}{25}\right)$ к) $\frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11}$
 л) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$; м) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$.

2 Запиши степень в виде произведения равных множителей:

- а) 103^2 ; б) $(-65)^3$; в) $(1,4)^6$; г) $\left(7\frac{6}{7}\right)^4$; д) $\left(-3\frac{3}{4}\right)^4$; е) $(-5,6)^8$.

3 Запиши в виде степени: а) 2×4 ; б) 3×9 ; в) $5 \times 5 \times 25$; г) $2 \times 4 \times 16$.

4 Какое из следующих утверждений неверно?

- а) Квадрат любого четного числа является четным числом;
 б) Куб любого нечетного числа является нечетным числом;
 в) Квадрат любого нечетного числа является нечетным числом;
 г) Квадрат любого числа является положительным числом.

5 Вычисли устно: 1^2 , $(-1)^1$, 2^2 , $(-3)^2$, 4^3 , $(-1)^3$, 2^3 , 3^3 , 5^1 .

6 Вычисли:

- а) $27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ б) $13^2 - 12^2$ в) $10 \times 5^2 + 150$
 $2^3 - 3^3 \times 10^2$ $15 + 4^3 - 6^2$ $25 - (-5)^2$
 $|-14| - (-14)^2$ $25^2 - |-25|$ $100 - 10^2$
 3×10^2 5×2^2 2×5^3
 $(3 \times 10)^2$ $(5 \times 2)^2$ $(2 \times 5)^3$

7 Начерти таблицу и заполни поля.

a	-2	-3	4	5	6	-7	8	-9	10
a ²	4								
a ³	-8								

8 Сравни значения данных выражений:

- а) 2^3 и 3^2 ; б) 1^5 и 5^1 ; в) $(-2)^4$ и $(-4)^2$; г) $(-12)^2$ и 12^2 ; д) $(-1)^2$ и 1^{100} .

- 9** Найди число, квадрат которого:
а) 25; б) 100; в) 16; г) 81; д) 144; е) 400; ж) 10000; з) 4900.
- 10** Найди число, куб которого:
а) 125; б) 1000; в) 64; г) 27; д) 1000000; е) 8000.
- 11** Напиши следующие числа, используя 10 в степени:
100; 1000; 10000; 100000; 1000000; 10000000; 100000000.
- 12** Представь число в виде произведения однозначного числа на 10 в степени:
а) 30000; б) 500; в) 7000; г) 6000000.
- 13** Запиши следующие числа, используя 10 в степени:
400; 6000; 80000; 900000; 2000000; 30000000; 500000000.
- 14** Используя 10 в степени, представь:
а) один метр в сантиметрах; б) один метр в миллиметрах;
в) один километр в метрах; г) один километр в дециметрах;
д) один километр в сантиметрах; е) один километр в миллиметрах.
- 15** Используя степень 10, число 2459 можно представить в виде суммы разрядных слагаемых следующим образом:
$$2459 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9.$$

Представь число в виде суммы разрядных слагаемых:
а) 2587; б) 358; в) 96540; г) 5012; д) 609; е) 9962.
- 16** Какое число представлено в виде суммы разрядных слагаемых?
а) $5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 1 \times 10 + 3$; б) $6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 8$;
в) $2 \times 10^2 + 9 \times 10 + 4$; г) $3 \times 10^4 + 8 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5$.
- 17** Запиши данное произведение без 10 в степени:
а) 5×10^4 ; б) 3×10^3 ; в) 5×10^4 ; г) 2×10^6 ; д) 5×10^4 .
- 18** На какую цифру заканчивается число:
а) 121^{104} ? б) 122^2 ? в) 455^{251} ? г) 256^{211} ? д) 450^3 ?
- 19** Запиши выражение, используя степень
а) $3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$; б) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times 6 \times 6 \times 6$;
в) $15 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$; г) $62 \times 62 + 15 \times 15$; д) $(2+3) \times (2+3) \times (2+3)$;
- 20** Сравни:
а) 28^2 и 1000; б) 68^2 и 4969; в) 85^2 и 8202;
г) 47^2 и 3000; д) 62^2 и 3521; е) 41^2 и 1500.

- 21** Что больше и во сколько раз:
- а) Квадрат или куб числа 4?
 - б) Четвертая степень или вторая степень числа 2?
 - в) Куб или квадрат числа 0,1?
 - г) Четвертая степень или пятая степень числа 1?
 - д) Квадрат числа 0,1 или куб числа 0,2?

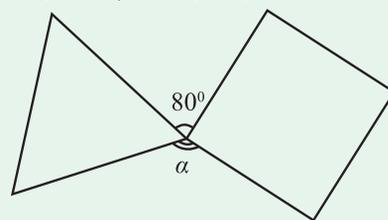
- 22** Из скважины добывают 1 000 000 кубометров газа в сутки. Вычисли, сколько кубометров газа добывают за 100 дней. Запиши полученное число с использованием 10 в степени.



- 23** Вместо «*» напиши такие цифры, чтобы получить верное равенство. Рассмотрите все возможные случаи.
- а) $(2^*)^2 = **1$; б) $(2^*)^2 = **9$; в) $(3^*)^2 = ***6$; г) $(*7)^2 = 2**$.

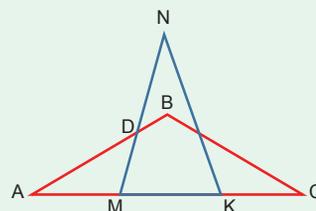
- 24** Узнай, по какому правилу составлена данная последовательность чисел. Назови следующее число.
- а) 2, 4, 6, ...; б) 3, 6, 9, ...; в) 1, 4, 9, 16, ...; г) 1, 8, 27, ...

- 25** Угол, образованный сторонами квадрата и равнобедренного треугольника, имеющими общую вершину, равен 80° . Вычисли величину угла α .



- 26** Из прямоугольного листа жести длиной 8 см и шириной 5 см вырезали квадратный кусок со стороной 4 см. На сколько процентов уменьшилась площадь листа?

- 27** Согласно рисунку, вычисли величину угла $\angle MDB$, если $AB = BC$, $MN = NK$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle MNK = 40^\circ$.



Ну-ка, попробуй!

Найди все целые значения переменных x и y , для которых выполняется равенство:

а) $x^2 + y^2 = 8$;

б) $x^3 + y^3 = 8$.

4.4 Свойства степени



Цель

Уметь использовать свойства степени числа с натуральным показателем для упрощения и вычисления выражений.

Для того, чтобы совершать действия над степенями, мы должны использовать следующие качества степени:

I свойство: При возведении в степень произведения мы можем возвести в степень каждый множитель отдельно и умножить результаты:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Например, $(2 \times 7)^2 = 2^2 \times 7^2 = 4 \times 49 = 196$.

II свойство: При возведении в степень дроби мы можем отдельно возвести в степень числитель и знаменатель::

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Например, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

III свойство: При возведении в степень степени показатели степени можно умножить:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Например, $(2^2)^5 = 2^{10} = 1024$.

IV свойство: При умножении чисел с одинаковым основанием показатели степени складываются:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}.$$

Например, $3^2 \times 3^4 = 3^6 = 729$.

V свойство: При делении чисел с одинаковым основанием из показателя степени делимого вычитается показатель степени делителя:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Например, $5^7 : 5^4 = 5^3 = 125$.

Пример 1. Вычислим значение выражения $\frac{(3a^3)^5 \times a^4}{(3a^6)^3}$, если $a = 0,9$.

Решение. Сначала упростим данное выражение, используя свойства степени, а затем вычислим его числовое значение:

$$\frac{(3a^3)^5 \times a^4}{(3a^6)^3} = \frac{3^5 \times (a^3)^5 \times a^4}{3^3 \times (a^6)^3} = \frac{3^5 \times a^{15} \times a^4}{3^3 \times a^{18}} = \frac{3^5 \times a^{19}}{3^3 \times a^{18}} = 3^2 a = 9 \times 0,9 = 8,1.$$

Пример 2. Что больше: а) 25^{10} или 125^7 ? б) 5^8 или 19^4 ?

Решение. а) Запишем обе степени с основанием 5:

$$25^{10} = (5^2)^{10} = 5^{20}, \quad 125^7 = (5^3)^7 = 5^{21}. \quad 5^{20} < 5^{21}, \quad \text{поэтому заключаем, что } 25^{10} < 125^7;$$

б) В этом случае сравниваемые значения запишем с равными показателями степени:
 $5^8 = (5^2)^4 = 25^4 > 19^4$.

Иногда полезно прочитать приведенные выше уравнения слева направо. Рассмотрим пример:

Пример 3. Вычислим а) $0,25^5 \times 8^5$; б) $\frac{45^4}{15^4}$.

а) Возведение в степень каждого множителя довольно трудоемко, но если равенство $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ запишем наоборот, получим $a^n \times b^n = (a \times b)^n$. Это равенство означает, что если показатели степени равны, можно сначала умножить основания, а затем возвести произведение в степень. Поэтому:

$$0,25^5 \times 8^5 = (0,25 \times 8)^5 = 2^5 = 32.$$

б) В этом случае используем равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ и напишем:

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, следовательно, если показатели степени числителя и знаменателя равны, можно сначала разделить числитель на знаменатель, а затем возвести его в степень. Поэтому:

$$\frac{45^4}{15^4} = \left(\frac{45}{15}\right)^4 = 3^4 = 81.$$

Ответ на вопросы:

1. Можно ли при возведении в степень произведения возвести в степень отдельно каждый множитель?
2. Можно ли при возведении в степень дроби возвести в степень отдельно числитель и знаменатель?
3. Можно ли при возведении в степень суммы сначала возвести в степень каждое слагаемое, а затем сложить полученные результаты?
4. Можно ли при возведении в степень степени поменять местами показатели степени?

Упражнения

1 Запиши в виде произведения степеней:

а) $(a \times b)^3$; б) $(2 \times b)^3$; в) $(2,3x)^5$; г) $(4,5 \times 13)^8$; д) $(3,1 \times ab)^4$.

2 Запиши в виде соотношения степеней:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; б) $\left(\frac{7}{a}\right)^4$; в) $\left(\frac{13a}{2b}\right)^4$; г) $\left(\frac{2}{15x}\right)^2$; д) $\left(\frac{3x}{5y}\right)^2$.

3 Запиши в виде степени с основанием а:

а) $(a^5)^3$; б) $(a^4)^7$; в) $(a^9)^8$; г) $((-a)^2)^3$; д) $((-a)^3)^5$;
е) $a^2 \times a^4$; ж) $a^5 \times a^9$; з) $a^{15} \times a^3 \times a^4$; и) $a \times a^{13} \times a^{14}$; к) $(a^2)^3 \times a^3$;
л) $a^4 : a^2$; м) $a^{10} : a^9$; н) $(a^3)^4 : a^{11}$; о) $(a^2)^8 : (a^3)^2$; п) $(a^3)^4 : (a^4)^2$.

4 Запиши в виде степени:

а) $2^2 \times 2^6$; б) $3^3 \times 3^4 \times 3^5$; в) $(-3)^3 \times (-3)^4 \times (-3)^5$; г) $(a+b)^2 \times (a+b)^3$;
д) $27 \cdot 2^6$; е) $5^3 \times 5^4 \times 5^5$; ж) $(6)^8 \cdot (6)^4 \cdot (6)^3$; з) $(a+b)^2(a+b)^3$;
и) $(2^7)^2 \cdot 2^8$; к) $5^{13} \times (5^4)^3 \cdot 5^{15}$; л) $(2a)^3 \times (2a)^4 \cdot (2a)^2$; м) $((a^5)^2 a)^3 \cdot (a^2)^5$;
н) $\frac{(a^4)^2 \times a^5}{(a^3)^4}$; о) $\frac{(7^3)^3 \times 7^2}{(7^2)^5}$; п) $\frac{(0,2^5)^2 \times 0,2^2}{(0,2^3)^3}$; р) $\frac{(2a^3)^3 \times a^2}{8a^{10}}$.

5 Вычисли:

а) $2^5 \times 5^5$; б) $0,5^5 \times 2^5$; в) $0,125^3 \times 4^3$; г) $\left(\frac{5}{8}\right)^4 \times \left(\frac{16}{15}\right)^4$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3$;
е) $8^5 \cdot 4^5$; ж) $15^3 \cdot 5^3$; з) $1,2^4 \cdot 0,6^4$; и) $\frac{30^6}{60^6} \times 2^7$; к) $\frac{12^3}{15^3} \times \frac{10^2}{16^2}$;
л) $-4 \times 2^3 + 3 \times 5^2$; м) $-2 \times 3^2 + 4 \times 5^3$; н) $(-1)^5 - (-2)^3 + 5^2 - 7^2$; о) $(-2)^3 - (-1)^4 + 4^2 - 6$.

6 Возведи в степень:

а) $(2a)^3$; б) $(7b)^2$; в) $(3ab)^3$; г) $(5a^2)^3$; д) $(1,5ab^2)^2$;
е) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$; ж) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2$; з) $\left(\frac{5a^4}{2b^3}\right)^3$; и) $\left(\frac{3xy^2z}{4a^3b^4}\right)^3$; к) $\left(-\frac{x^5y^2}{3a^4b^3}\right)^2$.

7 Вычисли:

а) $\frac{6^5}{2^4 \times 3^4}$; б) $\frac{2^7 \times 3^7}{6^4}$; в) $\frac{10^5}{2^4 \times 5^5}$; г) $\frac{5^6 \times 3^5}{15^5}$; д) $\frac{(7^6)^2 \times 3^{13}}{(21^2)^5}$.

8 Вычисли значение выражения:

а) $\frac{(9x^2)^3}{(3x)^5}$, или $x = \frac{2}{3}$; б) $\frac{(4x^2)^4}{(2x)^7}$, или $x = 2,5$;

9 Устно сформулируй следующие равенства:

а) $a^n \times a^m = a^{n+m}$; б) $a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$; в) $(a^n)^m = a^{nm}$;
г) $(ab)^n = a^n b^n$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

10 Масса солнца равна 2×10^{30} кг, а масса Земли - 6×10^{24} кг. Во сколько раз масса Солнца больше массы Земли?

11 Запиши в виде степени:

а) 2×2^3 ; б) $2^2 \times 2^n$; в) 8×2^k ; г) $4^2 \times 2^m$; д) $2^n \times 2^m$; е) $4^2 \times 8^k$; ж) $16^m \cdot 8^k$.

12 Найди n, если:

а) $2^n = 8$; б) $2^n = 32$; в) $2^n = 64$; г) $2^n = 16 \times 8$;
д) $2^n = 2 \times 2^m$; е) $2^n = 8 \times 2^{m-1}$; ж) $2^n = 4^3 \times 8^k$; з) $2^{n-1} = 4^k \times 8^2$.

13 Что больше:

а) 8^3 или 16^2 ? б) 9^3 или 27^2 ? в) 11^{10} или 121^6 ?
г) 2^{12} или 3^6 ? д) 3^8 или 5^4 ? е) 11^8 или 3^{24} ?

14

Вычисли:

а) $\frac{3 \times 2^{11} + 2^{10}}{14 \times 4^5}$; б) $\frac{5 \times 3^{20} + 4 \times 3^{18}}{7^2 \times 9^9}$; в) $\frac{4 \times 5^{24} - 5^{22}}{99 \times 25^{11}}$; г) $\frac{3 \times 7^9 - 7^8}{49^4 \times 10^2}$;

д) $\frac{2^8 \times 2^4 \times 2^5}{2^7 \times 2^9}$; е) $\frac{3^{11} \times 5^{12}}{15^{20}}$; ж) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{8}}{4^4}$; з) $\frac{5^2 \times 7^2}{35}$;

и) $\frac{77^2}{11 \times 7^2}$; к) $\frac{(5^7)^2 \times 5^9}{5^{25}}$; л) $\frac{3^6 \times 27}{(3^4)^2}$.

15

Из Гори в Батуми выехал автобус, который двигался со скоростью 70 км/ч. В то же время из Тбилиси в Батуми выехал автомобиль, который двигался со скоростью 90 км/ч, и который через 3 часа и 30 минут догнал автобус, ехавший из Гори. Каково расстояние от Тбилиси до Гори?



16

Из Поти и Тбилиси навстречу друг другу выехали две машины. Обе машины ехали с постоянной скоростью, одна - со скоростью 70 км/ч, а другая - 80 км/ч. Через 1 час 20 минут расстояние между машинами было 150 км. Каково расстояние от Тбилиси до Поти?

17

Данный на рисунке прямоугольник разделен на три квадрата. Определи, во сколько раз больше:

- а) площадь прямоугольника, чем площадь маленького квадрата;
- б) периметр прямоугольника, чем периметр большого квадрата.



Ну-ка, попробуй!

Астрономы вычисляют расстояние между планетами по световым годам. Один световой год — это расстояние, которое световой луч проходит за год (365 дней). Известно, что световой луч света проходит 3×10^5 км в секунду. Вычисли, сколько примерно километров составляет световой год.

4.5 Одночлен и многочлен



Цель

Уметь распознавать одночлен и многочлен, представлять одночлен и многочлен в стандартном виде, выполнять действия над одночленами.

Разделим следующие выражения на две группы:

$$3ab, 15 \times \frac{a}{2}, a + 2b, m, x^2, \frac{5}{17}, \frac{1}{5}m^2n^3c, 2x + 3y, 0,45, \frac{a^2}{b}, 4ab \times (-9xy^2)$$

В одной группе объединим выражения, которые содержат произведения числа на степень переменной с натуральным показателем, произведения букв, возведенных в определенную степень, отдельные буквы, цифры. Из перечисленных такими выражениями являются:

$$3ab, 15 \times \frac{a}{2}, \frac{5}{17}, \frac{1}{5}m^2n^3c, 0,45, 4ab \times (-9xy^2), m, x^2, \frac{5}{17}.$$

Такие выражения называются **одночленами**.

Выражения другого вида объединим во вторую группу. Они не являются одночленами.

Таковыми выражениями являются: $a + 2b, 2x + 3y, \frac{a^2}{b}$.

Одночлен - это алгебраическое выражение, которое содержит только операции умножения и возведения в степень.

Давайте выясним, является ли выражение $\frac{xy}{5}$ одночленом. По форме оно похоже на $\frac{a^2}{b}$. Выражение $\frac{xy}{5}$ является одночленом, поскольку его можно представить следующим образом: $\frac{xy}{5} = \frac{1}{5} \times xy$.

Из выражений $\frac{a}{7}$ и $\frac{7}{a}$ одночленом является $\frac{a}{7}$, поскольку его можно записать как $\frac{1}{7} \times a$. Выражение $\frac{7}{a}$ не является одночленом, поскольку знаменатель содержит переменную.

Рассмотрим одночлен: $4ax \times (-9xy^2)$. Мы знаем, что при перестановке множителей произведение не меняется. Следовательно, мы можем записать данный одночлен следующим образом:

$$4ax \times (-9xy^2) = -36ax^2y^2,$$

где первым множителем записано число, а во всех остальных множителях степени с одинаковым основанием в качестве множителей не встречаются. Такой вид одночлена называется одночленом **стандартного** вида.

Для краткости и большей упорядоченности одночлен принято писать в виде одночлена стандартного вида.

Для того, чтобы записать одночлен в виде одночлена стандартного вида, необходимо:

1. Умножить все числовые множители и записать полученное произведение на первом месте;
2. Умножить все степени с одинаковым основанием (напомним, что для этого нужно сложить показатели степени);
3. Записать произведение чисел и степеней.

Числовой множитель одночлена стандартного вида называется **коэффициентом** одночлена.

Любой одночлен может быть записан в виде одночлена стандартного вида.

Пример 1. Запишем одночлены стандартного вида и назовем их коэффициенты:

а) $5x^2y^3 \times 3x^2y^3k$; б) $3\frac{2}{3}ab^2 \times \frac{3}{22}a^3b$; в) $-ab \times \frac{5}{7}a^2b^2$; г) $\frac{7xy^2}{10}$.

Решение.

а) $5x^2y^3 \times 3x^2y^3k = (5 \times 3) \times (x^2x^2) \times (y^3y^3) \times (k^3k) = 15x^4y^4k^4$, коэффициент равен 15;

б) $3\frac{2}{3}ab^2 \times \frac{3}{22}a^3b = \left(3\frac{2}{3} \times \frac{3}{22}\right)(aa^3)(b^2b) = \left(\frac{11}{3} \times \frac{3}{22}\right)a^4b^3 = 0,5a^4b^3$;

коэффициент равен 0,5;

в) $-ab \times \frac{5}{7}a^2b^2 = -\frac{5}{7}a^{2+1}b^{2+1} = -\frac{5}{7}a^3b^3$; коэффициент равен $-\frac{5}{7}$.

Степенью одночлена называется сумма степеней его переменных.

Например, степень 25 это 0 ; $2x$; 1 ; $-5a^2 - 2$; $2a^2b^5 - 7$.

Подобные одночлены - это такие одночлены, которые состоят из одних и тех же переменных с равными показателями степени.

Примерами подобных членов являются: $2x$ и $9x$, $3a^2b$ и $11a^2b$, m^3 и $8m^3$.

Подобные члены отличаются друг от друга только коэффициентами.

При сложении подобных членов нужно сложить их коэффициенты.

Например, $3x^2y^3 + 5x^2y^3 - 12x^2y^3 = -4x^2y^3$. В этом случае говорим, что мы «сложили (привели) подобные члены».

Пример 2. Представим одночлен $24mn^2t^3$:

а) в виде суммы одночленов;

б) в виде произведения одночленов.

Решение.

а) Мы можем представить 24 в виде суммы двух или более слагаемых несколькими способами. Например, $24 = 20 + 4$ или $24 = 2 + 7 + 15$. Соответственно пишем:

$$24mn^2t^3 = 20mn^2t^3 + 4mn^2t^3 \text{ или } 24mn^2t^3 = 2mn^2t^3 + 7mn^2t^3 + 15mn^2t^3$$

б) $24mn^2t^3$ можно представить в виде двух или более множителей несколькими способами. Например, $24mn^2t^3 = 3mnt \times 8nt^2$, $24mn^2t^3 = 6mn^2t^2 \times 4t$

Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется **многочленом**.

Например, многочленами являются: $2xy^2 + 5x - 12y^2$; $a + b$, $15 - 3xy$. $\frac{a}{a+b}$ не является многочленом.

Многочлен, все составляющие одночлены которого записаны в виде одночленов стандартного вида, и его подобные члены приведены, называется **многочленом стандартного вида**.

Например, многочлены, $2ab^2 + 3b - 4$, $5x^2y^3z + 5z^2 - 12xy$ являются многочленами, записанными в стандартном виде, а $21xy + 3y - 11xy + 4y$, $2a^2 - (4a)^2$ не в стандартном виде.

Установим алгоритм записи многочлена стандартного вида:

1. Запишем каждый одночлен в стандартном виде;
2. Отметим подобные члены. Если многочлен не содержит подобных членов, то действие не продолжаем;
3. Приведем подобные члены.

Пример 3. Упростим выражение:

а) $1,2ab^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 a \times \frac{27}{16}b^2 + 5ab \times 3b$; б) $(-3x^3yz^2)^2 + x^2y \times x^4z^3 \times 2yz$

Решение. а) Поскольку мы имеем дело со сложением и вычитанием одночленов, мы должны действовать в соответствии с алгоритмом.

Первый одночлен имеет стандартный вид. А второй и третий - приведем к стандартному виду:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 a \times \frac{27}{16} b^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{27}{16} ab^2 = \frac{4}{9} \times \frac{27}{16} ab^2 = \frac{3}{4} ab^2, \quad 5ab \times 3b = 15ab^2.$$

Имеем три подобных члена: $1,2ab^2$, $\frac{3}{4}ab^2$ и $15ab^2$.

Выполним действия над коэффициентами: $1,2 - \frac{3}{4} + 15 = 16,2 - 0,75 = 15,45$

Запишем ответ: $15,45ab^2$.

$$б) (-3x^3yz^2)^2 + x^2y \times x^4z^3 \times 2yz = (-3)^2 \times (x^3)^2 \times y^2 \times (z^2)^2 + 2x^{2+4}y^{1+1}z^{3+1} = 9x^6y^2z^4 + 2x^6y^2z^4 = 11x^6y^2z^4.$$

Пример 4. Напишем многочлен в стандартном виде:

$$5x^2 - 7xy + 5xy^2 - 3x + 2xx - 6xy.$$

Решение.

$$\text{I этап: } 5x^2 - 7xy + 5xy^2 - 3x + 2xx - 6xy = 5x^2 - 7xy + 5xy^2 - 3x + 2x^2 - 6xy^2;$$

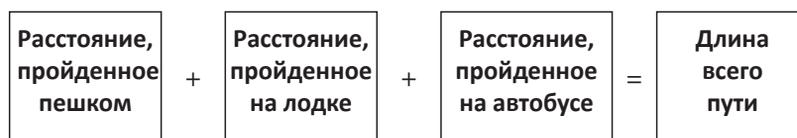
$$\text{II этап: } 5x^2 - 7xy + 5xy^2 - 3x + 2x^2 - 6xy^2;$$

$$\text{III этап: } 5x^2 - 7xy + 5xy^2 - 3x + 2x^2 - 6xy^2 = 7x^2 - 7xy - xy^2 - 3x.$$

Рассмотрим задачу, для решения которой используем сложение одночленов.

Задача 1. Из пункта А в пункт В турист дошел пешком за 2 часа. Чтобы добраться из пункта В в пункт N на катере, скорость которого в 4 раза больше, чем пешего туриста, потребовалось 1,5 часа. Поездка из пункта N в пункт М на автобусе заняла 2 часа, что было в 2 раза быстрее, чем катером. Определим скорость движения автобуса, если известно, что длина всего пути от А до М составляет 120 километров.

Решение. I этап. Составление словесной модели:



II этап. Введение неизвестной и связь с данными:

Допустим, турист шел со скоростью x км/ч. За два часа он прошел $2x$ км.

Согласно условию задачи, скорость катера составляет $4x$ км/ч. За 1,5 часа турист проехал $1,5 \times 4x$, или $6x$ км.

Исходя из условий задачи, скорость автобуса составляет $2 \times 4x$ км/ч или $8x$ км/ч. Через 2 часа он проехал $16x$ км на автобусе.

III этап. Составление математической модели:

Весь путь от пункта А до пункта М будет составлять: $2x$ км + $6x$ км + $16x$ км, который по условию задачи равен 120 км.

Поэтому мы можем написать уравнение: $2x + 6x + 16x = 120$.

IV этап. Работа над составленной моделью (решение уравнения). В результате суммы одночленов, мы получаем, что $24x=120$, откуда $x=5$.

V этап. Ответ на вопрос задачи.

Мы обозначили скорость пешего туриста x , которая равна 5 км/ч. Соответственно скорость катера равна 20 км/ч, а скорость автобуса равна 40 км/ч.

Ответ: Скорость автобуса 40 км/ч.

Степенью многочлена называется наибольшая из степеней одночленов, входящего в него.

Например, степень $2ab^2+3b-4$ равна 3, $5x^2y^3z+5z^2-12xy$ - равна 6.

Ответ на вопросы:

1. Что такое одночлен?
2. Какой одночлен называется одночленом стандартного вида?
3. Что такое коэффициент одночлена?
4. Какие одночлены называются подобными?
5. Что значит «сложение (приведение) подобных членов»?
6. Какие одночлены можно складывать и вычитать?
7. Как умножить одночлен на одночлен?
8. Как возвести одночлен в какую-либо степень?
9. Как нужно вычислить степень одночлена?
10. Что называется многочленом?
11. Чему равна степень многочлена?
12. Какой многочлен называется многочленом стандартного вида?
13. Как привести многочлен к стандартному виду?

Упражнения

1

Какое из следующих выражений является одночленом?

а) a , -4 , $2+m$, mc^2 , $5e^2t$, $2a^2b \times abc$, $4n-8n+m$, $3mn+2m-4n$;

б) $1+m$, $a-2b$, $a^4bc \div \frac{4}{5}a$, $-8x$, $ab \times cd$, $a^2-2ab+b^2$.

2

Напиши одночлен в стандартном виде:

а) $6xux$, $5ant \times 3t$, $\frac{2}{15}ab \times \left(\frac{9}{16}\right)ab$, $(2a) \times (3b) \times (2a) \times (3b)$, $6abca^2b^2cb^2ac^3$;

б) $a^2b \times (-2ab)$, $mn \times mn \times ab \times mn \times ab \times ab \times mn$, $p^2q \times p^2q^3 \times \frac{1}{2^2} \times (pq)^2 \times \left(\frac{1}{2^2}pq\right)^2$;

в) $\left(\frac{1}{2}a \times \frac{1}{4}a^2 \times \frac{1}{8}a^3\right)^2 \times (2b^2 \times 4b^4 \times 8b^8)$;

г) $\left(-2\frac{3}{4}a\right) \times \left(-1\frac{4}{11}ca\right) \times \left(3\frac{1}{5}a^2c^2\right)$.

3

Выполни умножение:

а) $11a \times 2m$, $2^3 \times mnk \times \frac{1}{4}m^3nk^2$, $\frac{1}{7}ht \times \frac{ht^2}{4}$, $mnc \times (mnc)^2 \times (mnc)^3$, $\left(\frac{1}{2}a\right)^3 \times 12b$;

б) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}x^3y^2\right)^2$, $(a^2b^3x)^2 \times (ab^2x^3) \times (axy)^2$, $\frac{2}{15}xy \times 30x^2y^7$, $(4ab^2c^4) \times \frac{3}{4}a^2b^2k$.

4

Умножь:

а) $\frac{2}{3}x^2y^4z$ и $\frac{3}{4}x^2yz^2$; б) $(-4a^2c) \times (3b^2c)$ и $(-2ac^2) \times (3ca^3)$;

в) $(-1,5xy^2) \times \left(\frac{1}{4}yz\right) \times (x^2y)$ и $(-2xy) \times (2xy) \times (-x)$.

5Возведи одночлен в степень m :

а) a^3nb^3t , если $m=3$; б) $xy^2 \times (x^2y)^3$, если $m=2$; в) $(xy \times y^2) \times xyz$, если $m=2$;

г) $\frac{1}{2}cbx^2$, если $m=2$; д) $-2cp^2q^2l^3$, если $m=3$;

е) $(x^2y^2)^2(xy)$, если $m=2$; ж) $(0,2ab^3c)^2 \times a^3$, если $m=3$.

6

Приведи подобные члены:

а) $18a^3b+2a^3b-4a^3b$; б) $0,5a^2b^2+1,2a^2b^2-14a^2b^2-6,2a^2b^2$;

в) $3mnk + \frac{1}{4}abc - \frac{2}{7}mnk + 4abc - \frac{4}{7}mnk$; г) $mnt-2mnk-4mnt-mn$;

д) $3abx+2bx-12xab-3,5xb+2abx-3bx$;

е) $3ez^2+3,1ez^2-0,1ez^2+xy-2xy-2xy+4ez^2-2xy$;

ж) $\frac{11}{12}ab^2c + \frac{5}{6}ab^2c - \frac{3}{4}ab^2c^3 + 2ab^2c - \frac{11}{12}ab^2c^3 + 2\frac{1}{2}ab^2c^3 - \frac{3}{4}ab^2c + 3ab^2c$.

7

Запиши многочлен в стандартном виде и определи его степень:

а) $4ab \times \frac{1}{3}ac - 2aca - 9a^2 \times \frac{1}{2}b + 10a^2 \times \frac{1}{5}c + a^2b - a^2bc$;

б) $3ab - 2bc \times c + ab + \frac{1}{2}c^2b - 4cb^2 + 2cb \times b$;

в) $\frac{a}{3} + \frac{a}{6} + \frac{3a}{2} - \frac{4}{3}mn^2 + \frac{1}{5}mn^2 - 1\frac{1}{3}mn^2$;

г) $3ab \times \frac{2}{5}ac - 2a \times abc - \frac{1}{3}a^2bc + a - 5 - 3a + 14 + a - 6$;

д) $\left(\frac{2}{3}ac\right)^2 \times c^2 - \frac{2}{5}a(c \times c)^2 + \frac{2}{3}ac^2 \times c - \frac{1}{4}ac^4$.

8

Запиши многочлен в стандартном виде:

а) $2x^2+5x^4+3x^7-7x^4-x^2+6$; б) $-3a^3+11a^5+16a^5-17a^3-4a^5+9$;

в) $-6x^2+x^2+x^3+4x^4-x^2-1$; г) $4a^3-12a^4+16a^4-17a^3-4a^4$.

9

Представь в виде квадрата одночлена:

а) $16a^2b^2$; б) $4c^4d^2$; в) x^6y^8 ; г) $25a^2x^8$; д) $0,64z^{12}t^6$.

10

Представь в виде куба одночлена:

а) $8a^3b^3$; б) $27c^3d^6$; в) x^6y^9 ; г) $64a^3x^{12}$; д) $0,125z^{12}t^6$.

- 11 Вычисли периметр и площадь квадрата, если длина его стороны равна $1,2b$.
- 12 Вычисли периметр и площадь прямоугольника, если длины его сторон равны $3a$ и $5a$.
- 13 Вычисли объем прямоугольного параллелепипеда, если его размеры: $2a$, $7b$ и $0,5b$.
- 14 Из городов А и В, расстояние между которыми 120 км, навстречу друг другу одновременно выехало два автомобиля. Скорость автомобиля, выехавшего из А, в два раза больше скорости автомобиля, выехавшего из В. На каком расстоянии от города А встретятся автомобили?
- 15 Из двух деревень, расстояние между которыми 21 километр, навстречу друг другу одновременно вышли Натия и Лексо. При встрече выяснилось, что Лексо прошел расстояние в $1\frac{1}{3}$ раз больше, чем Натия. Через сколько часов после выхода они встретились и с какой скоростью двигалась Натия, если известно, что Лексо двигался со скоростью 6 км/ч?
- 16 Первое из трех положительных чисел в 2 раза меньше второго и в 2 раза больше третьего. Вычисли сумму этих трех чисел, если наименьшее из них - a .
- 17 Первое из трех положительных чисел меньше второго на 3 и в 3 раза больше третьего. Вычисли сумму этих трех чисел, если наибольшее из них - b .
- 18 Покажи, что для каждого натурального числа:
а) $(5n)^2 - (4n)^2$ делится на 9 без остатка; б) $3(2n)^3 + 2(3n)^3$ делится на 13 без остатка;
- 19 Покажи, что $9^4 + 3^9$ делится на 36 без остатка.
- 20 Цифра разряда единиц двухзначного числа в 2 раза больше цифры разряда десятков. Сумма этого числа, записанного этими же цифрами, но в обратном порядке, равна 132 . Найди это число.
- 21 Общая площадь трех участков квадратной формы составляет 350 кв. м. Длины сторон этих участков соотносятся друг к другу, как $1: 2: 3$. Вычисли длину стороны каждого участка.

22

Вычисли:

а) $\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \right) : \left(-\frac{2}{3} \right) \right] \times \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{10} \right) \right] + 7 : \left(-7\frac{1}{2} \right);$

б) $\left\{ \left[\frac{5}{8} + \frac{2}{3} \times \left(-1\frac{1}{9} \right) \right] : 1\frac{1}{24} - \left(-1\frac{1}{2} \right) \right\} : \left(-\frac{5}{6} \right).$

23 Вычисли сумму тех натуральных чисел n , для которых дробь $\frac{n+7}{18}$ является правильной, а дробь $\frac{n}{7}$ - неправильной.

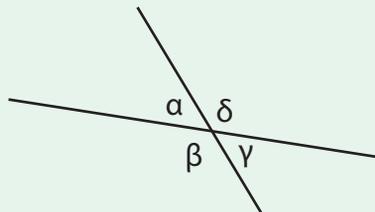
24 Чему равна разница числа, противоположного (-2) и числа, обратного $\frac{1}{7}$?

25 Выполни действия:

а) $3^2 \times 3^m \times 3^n$; б) $5^{x-1} \times 5^x \times 5^{x+1}$; в) $15^x \times 5^x \times 5^{x+1} \times 3^2 \times 3^m \times 3^n$.

26 Величины углов, полученных при пересечении двух прямых, равны: α , β , γ , δ . Определи, какое из следующих равенств является ложным:

а) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$; б) $\alpha - \beta + 2\delta = 180^\circ$;
в) $\beta + \delta = 180^\circ$; г) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.



27 a , b и c - координаты точек, заданных на прямой.



Определи, какое из следующих неравенств является ложным:

а) $ab > a$; б) $ac > c$; в) $ab < b$; г) $cb < c$; д) $ac < -1$.

Ну-ка, попробуй!

Квадрат разделен на два прямоугольника, соотношение площадей которых 4:3. Вычисли соотношение периметров этих прямоугольников.

Практическая работа

Измерь длину и ширину своей спальни, и нарисуй план этой комнаты в тетради в масштабе 1: 100.

Вычисли площадь спальни.

Вычисли соотношение площади плана спальни, изображенной на чертеже, к фактической площади.

Сделай вывод.

4.6 Раскрытие скобок



Цель

1. Научиться раскрывать скобки, записывать многочлен в стандартной форме.
2. Уметь складывать и вычитать многочлены и применять полученные знания на практике.

Задача 1. Во дворе гуляли 13 детей. Сначала пятеро детей пошли домой, потом двое. Сколько детей осталось во дворе?

Решение. Решить задачу можно двумя способами.

I способ. а) Узнаем, сколько детей осталось во дворе после того, как 5 из них ушли:

$$13 - 5 = 8.$$

б) Узнаем, сколько детей осталось во дворе после ухода еще двоих детей:

$$8 - 2 = 6.$$

II способ. а) Узнаем, сколько всего детей ушло:

$$5 + 2 = 7.$$

б) Узнаем, сколько детей осталось во дворе:

$$13 - 7 = 6.$$

Оба способа решения задачи являются правильными, т.е.:

$$13 - (5 + 2) = 13 - 5 - 2.$$

Поэтому, вычитая сумму из числа, мы можем отдельно вычесть каждое слагаемое из этого числа.

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

В этом случае говорим: «Мы раскрыли скобки».

В общем, если перед скобкой стоит знак «-», то при раскрытии скобок знак всех слагаемых в скобках меняется на противоположный, а если перед скобкой стоит знак «+», то при раскрытии скобок знак всех слагаемых не меняется.

Например,

$$12 - (5 - 8 - 2) = 12 - 5 + 8 + 2 = 17.$$

$$12 + (5 - 8 - 2) = 12 + 5 - 8 - 2 = 7.$$

Это правило также применяется к выражениям с переменной.

Пример. Запишем многочлен в стандартной форме.

$$x^2 + (y + x^2 - xy) - (2y - 3xy).$$

Решение.

I этап. Раскроем скобки:

$$x^2 + (y + x^2 - xy) - (2y - 3xy) = x^2 + y + x^2 - xy - 2y + 3xy$$

II этап. Объединим подобные члены:

$$\underline{x^2} + y + \underline{x^2} - \underline{xy} - 2y + 3\underline{xy} = 2x^2 + 2xy - y.$$

Ответ на вопросы:

1. Как раскрыть скобки, если перед скобкой стоит знак «-»?
2. Как раскрыть скобки, если перед скобкой стоит знак «+»?

Упражнения

1

Раскрой скобки:

- а) $a+(3x+4)$; б) $a+(3x-4)$; в) $a-(3x+4)$; г) $x-(2a-3b)$;
д) $x-(2a+3b)$; е) $x+(2a+3b)$; ж) $x-(2a-3b)$; з) $x+(2a-3b)$.
и) $-(-2m+3n-k+t)$; к) $a+(b-(c+d))$; л) $a+(b-(c-d))$;
м) $a-(b-(c-d))$; н) $a-(b+(c-d))$; о) $a-(b+(c+d))$;

2

Вставь в скобки многочлен, начиная с m :

- а) $x+y+m-3$; б) $x-m+n$; в) $a-b+m-3c$; г) $-b-m+a+3c$.

3

В выражении: $a-b+c-d$ вставь в скобки:

- а) три слагаемых с конца со знаком «-»;
б) все четыре слагаемых со знаком «-».

4

Выражение: $x-y+2m-3n$ представь:

- а) в виде суммы двух слагаемых, где первое слагаемое - x ;
б) в виде разности, где $x-y$ - уменьшаемое;
в) крайние слагаемые со знаком «+», а остальные со знаком «-».

5

Упрости выражение и вычисли его значение:

- а) $(7x-3)+(14x-8)$, когда $x=11$;
б) $(712a-233)-(452a-128)$, когда $a=-0,5$;
в) $25-((32+a)-(-12a))$, когда $a = \frac{1}{13}$.

6

Запиши в стандартном виде:

- а) $16x^2-8xy+19y-(25x^2-10xy+19y)$;
б) $15x^2+16x^2y+8xy^2+(5x^3-8x^2y)-(11x^2y+7xy^2)$;
в) $40z+10az+26a^2z-(16z+13az-4a^2z)$;
г) $9a^2+10b^2+9c^2-11d^2+5c^2+(14a^2-6b^2)-(6c^2-11d^2)$;
д) $12x^2+xy-15x^2y-(12x^2+xy)-(15x^2y-12x^2)+(xy-15x^2y)$;
е) $(a^2+2\frac{1}{21}ab-3\frac{1}{4}b^2)-(a^2+\frac{5}{21}ab-4\frac{1}{2}b^2)+(-2a^2-5\frac{1}{3}ab+3b^2)$;
ж) $(\frac{1}{2}a+\frac{b}{3})-(\frac{5}{2}a+\frac{2}{3}b)+a-(b-2a)$.

7

Представь в виде суммы двучлена и трехчлена:

$$4x^2+2y-3x-5y^2-3xy.$$

8

Представьте в виде разности двучлена и трехчлена:

$$3a^2+4b^2-2x-3xy^2-4xy.$$

9

Представь многочлен $ax+by-cz+x^2-bx-4$ в виде такой суммы двух многочленов, один из которых не содержит x .

10

Представь многочлен $12ab-3bc-4ac+2a-3b+c$ в виде разности двух таких многочленов, вычитаемое которого не содержит a .

- 11 Найди многочлен P в равенстве: $P - (a^2 - 3ac + 5) = -1$.
- 12 Обоснуй, что сумма любых трех последовательных натуральных чисел делится на 3.
- 13 Обоснуй, что сумма любых четырех последовательных натуральных чисел не делится на 4.
- 14 Сердце пропускает через себя около 0,1 литра крови в секунду. Сколько примерно литров крови сердце пропускает в течение дня?
- 15 В кружке юных натуралистов девочек в три раза больше, чем мальчиков. Какой процент мальчиков в кружке?
- 16 Эка и Каха купили одинаковые смартфоны. Эка заплатила за смартфон 30% своей зарплаты, а Каха - 60% своей зарплаты. У кого больше зарплата – у Эки или у Кахи? Во сколько раз она больше?



- 17 Виноградари собрали 7 тонн «Ркацители», 8 тонн «Саперави» и 5 тонн «Мцване». Вычисли, какой величине сектора на круговой диаграмме соответствует количеству каждого сорта винограда, полученного виноградарями. Построй эту диаграмму. Укажи на ней величины секторов в процентах.



Нико Пиросмани, «Сбор винограда»

4.7 Умножение одночлена на многочлен



Цель

Уметь умножать одночлен на многочлен и применять полученные знания на практике.

При умножении многочлена на одночлен мы используем распределительное свойство:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Задача. Вычисли, какую площадь занимает здание, длина основания прямоугольной формы которого равна 2 м, а ширина - 6 м.

Решение.

I этап. Ширина здания (2а - 6) м.

II этап. Площадь, занимаемая зданием, составляет $2а \times (2а-6) м^2$.

III этап. Используем закон распределения:

$$2а \times (2а-6) = 4а^2 - 12а$$

Ответ: Здание занимает $(4а^2-12а) м^2$.

Закон распределения позволяет нам сформулировать следующее правило умножения одночлена на многочлен:

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить одночлен на каждый член многочлена и сложить полученные произведения.

В результате умножения одночлена на многочлен снова получаем многочлен. Полученный многочлен нужно упростить.

Пример. Выполним умножение:

$$(-2x^2y+xy^2-x) \times (-2xy) = (-2x^2y) \times (-2xy) + (xy^2) \times (-2xy) + (-x) \times (-2xy) = 4x^3y^2 - 2x^2y^3 + 2x^2y.$$

Ответ на вопрос:

Как умножить одночлен на многочлен?

Упражнения

1

Выполни умножение:

- а) $5x(3+2a-4b)$; б) $12ab(3a+2b-6)$; в) $-3a(a^2+2ab-2b)$;
г) $xyz(xy-2zy+3xz)$; д) $11a^2(-3a+2b-x)$; е) $2a^2b(3a+3ab^2-2a^2c)$.

2

Упростите изображение:

- а) $\left(\frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{3}{4}ab^4\right) \times \frac{1}{3}a^3b$; б) $\left(\frac{2}{3}a^2b^4 + \frac{1}{2}a^3b\right) \times \frac{3}{2}ab^3$; в) $(an-a^2) \times a$;
г) $(b^n - b^{n-2}) \times b^2$; д) $\left(1\frac{4}{7}a^3x^2 - 2\frac{3}{4}a^2x^3 - 11ax^4\right) \times \left(-2\frac{6}{11}ax^6\right)$;
е) $\left(-2\frac{1}{22}b^4y^5\right) \times \left(-2\frac{4}{9}b^6y + 2\frac{1}{5}b^3y^2 - 11by^5\right)$;
ж) $\left(\frac{1}{6}p^m - \frac{3}{4}p^{11-m}q^4\right) \times \frac{1}{6}p^mq^{m-4}$; з) $\left(\frac{5}{6}a^7c^{10-n} - \frac{7}{12}c^n\right) \times 6a^{n-7}c^n$.

3 Реши уравнение:

а) $3(x+7)=12$; б) $(m-14)\times 3=-45$; в) $-4(y+25)=18$;

г) $5(0,8y-0,1)-0,7(4y+1)+8(0,7-0,4y)=1,9$; д) $7(3-2x)=21$.

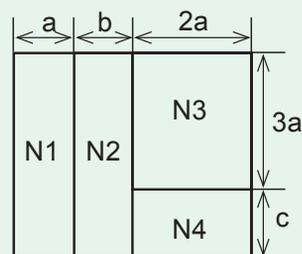
е) $3\times\left(\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{2}$; ж) $\frac{5}{4}\times\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\right)-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)=-1$.

4 Одна из фирм имеет 50 легковых и грузовых автомобилей. Легковой автомобиль потребляет в среднем 20 литров бензина в день, а грузовик - 40 литров. После работы в течение одного дня подсчитали и оказалось, что все машины вместе в этот день потратили 1400 л бензина. Сколько легковых и сколько грузовых машин имеет фирма?

5 Один тракторист за день вспахал площадь на 2,5 га больше, чем другой. Первый работал 8 дней и вспахал на 2 га больше, чем второй - за 10 дней. Сколько гектаров в день вспахивал каждый тракторист?

6 Из пунктов А и Б, находящихся на расстоянии 17 км, навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Скорость пешехода, вышедшего из пункта А, была на 0,5 км/ч выше скорости пассажира, вышедшего из пункта Б. Пассажиры встретились через 2 часа после выхода. Вычисли скорость каждого пассажира.

7 Земельный участок прямоугольной формы разделен на небольшие участки. Размеры указаны на чертеже. Вычисли площадь каждого участка.



8 В автобусе было n пассажиров. На первой остановке из автобуса вышло m пассажиров. То же количество вышло и на второй остановке. На третьей остановке никто не вышел, но несколько пассажиров вошли в автобус, после чего в автобусе стало k пассажиров. Сколько пассажиров вошли в автобус на третьей остановке?

9 Обоснуй, что сумма любых четырех последовательных нечетных чисел делится на 8.

10 Обоснуй, что собственная скорость лодки равна среднему арифметическому скорости по течению и скорости против течения.

11 Даны записанные по порядку 4 последовательные четные числа. Если от удвоенной суммы крайних чисел отнять утроенную положительную разность срединных чисел, то получим 22. Найди эти числа.

12 При сложении данного числа с 5 получается 8. Какой будет остаток при делении данного числа на 8?

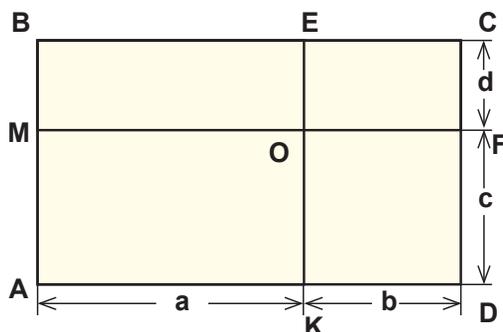
4.8 Умножение многочлена на многочлен



Цель

Выучить правила умножения многочлена на многочлен и уметь их использовать для упрощения выражения.

Задача 1. На рисунке показан прямоугольник ABCD, который разделен на четыре прямоугольника. Вычисли площадь прямоугольника ABCD согласно заданным размерам.



Решение. Площадь прямоугольника ABCD может быть рассчитана двумя различными способами:

I. Как видно из рисунка, $AD = a + b$ и $CD = c + d$, следовательно,

$$S_{ABCD} = (a+b)(c+d). \quad (1)$$

II. Вычислим площадь каждой части прямоугольника ABCD и сложим полученные результаты:

$$S_{AMOK} = ac, \quad S_{MBEO} = ad, \quad S_{OECF} = bd, \quad S_{KOFD} = bc.$$
$$S_{ABCD} = S_{AMOK} + S_{MBEO} + S_{KOFD} + S_{OECF} = ac + ad + bd + bc.$$

Или

$$S_{ABCD} = ac + ad + bd + bc. \quad (2)$$

Если мы сравним равенства (1) и (2), получим:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Следовательно, при умножении двучлена на двучлен также получаем многочлен, каждый член которого получается путем умножения данного двучлена на слагаемые.

В общем,

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и сложить полученные результаты.

При умножении многочлена на многочлен также получим многочлен. Полученный многочлен нужно записать в стандартном виде.

Умножение нескольких многочленов нужно выполнять путем постепенного умножения. Например,

$$(a+b)(a+2b)(a-3b) = (a^2 + 3ab + 2b^2)(a-3b) =$$
$$= a^3 - \underline{3a^2b} + \underline{3a^2b} - \underline{9ab^2} + \underline{2ab^2} - 6b^3 = a^3 - 7ab^2 - 6b^3.$$

Ответь на вопросы:

1. Как умножить многочлен на многочлен?
2. Какие законы мы используем при умножении многочлена на многочлен?
3. Чему равна степень многочлена, полученного при умножении многочленов?

Упражнения

1

Определи степень многочлена, полученного при умножении:

а) $(2x^2-1)(2x^5-5x^4+4x^2)$; б) $(y^2-10)(1y^5-3y^4+2y^2-8)$.

2

Выполни умножение::

$2,5a(3a+14b)$; $-4,2a(1,5-14b+2a)$; $4,2a(1,5-14b+2a)$;
 $(x-10)(2-3x)$; $(4x+1)(2x-3)$; $(3x-4)(2x+1)$;
 $(x+8)(4-x)$; $(b+2)(b-16)$; $(42a+3)(3-x)$;
 $(-3y+1)(4+y)$; $(b-6)(b+8)$; $(-m+n)(-m-n)$.

3

Представь в виде многочлена:

$(a+1)(a-b)$; $-(4x+1)(x-3)$; $-(x-y)(x^2+y^2)$;
 $-(a+1)(a-b)$; $-(4-y)(y-11)$; $-(2m^2-2n^2)(m^2+n^2)$.

4

Выполни умножение (№4-8):

$(a+6)(b-12)$; $(2a+b)(6b-12a)$; $(a-10)(-a-6)$;
 $(-4-6a)(-b+d)$; $-(2m^2-2n^2)(m^2+n^2)$; $(2a-b)(4a^2+2n^2)$.

5

$(a+b)(b^2+a^2)$; $(a^2+b^3)(b^2+a^2)$; $(2x+y)(4x^2+2y^3)$;
 $(4a^2-5b^2)(5b^2-4a^2)$; $(2a^2+2ab^2)(2a^2b^2+2a^2)$; $(a+b)(b^2+a^2)$;
 $(a+b)(b^2+a^2)$; $(a+b)(b^2+a^2)$; $(a+b)(b^2+a^2)$;
 $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{b}b\right)$; $\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{3}n\right)\left(\frac{1}{4}m - \frac{1}{2}n\right)$; $\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)$.

6

$(an+5)(an-5)$; $(an+bn)(an-bn)$; $(x^2-1)(x+1)$;
 $(m+n)(mn-n)$; $(a^n+b^n)(a^n-b^n)$; $(x^5-y^3)(x^3+y^4)$.

7

$(2m-n)(2m^2+2mn+n^2)$; $(3a-2b)(2a^2+ab+b^2)$; $(3x+4-n)(5c-2b+6)$;
 $(3a-2b)(a^2-ab-b^2)$; $(a^2-a+1)(a+1)$; $(x-2)(x^2+2x+4)$;
 $(3m+2n+5)(m+2n)$; $(6p-q)(p^2-3pq+q^2)$; $(x-2)(x^2+4x-x^3)$.

8

$3x(3-x)(x+3)$; $(a-b)(a+3)(b+3)$; $(a-b)(a+b)(b+3)$;
 $(3-b)(b+1)(2b-1)$; $(2+b)(2b-1)(3b+2)$; $b(b-a)(a^2-2ab+b^2)$;
 $-4a(3-a)(3a+1)$; $-y(3+y)(y^2-3y+9)$; $b(b+a)(a^2+2ab+b^2)$.

9

Упрости выражение (№10-11):

$$\begin{array}{ll} (3a+2)(2a-4)-6a^2; & 12a^2-(6a+2)(2a-6); \\ (3a-2)(2a+4)-8a; & 12m^2-(3m-1)(4m+1). \end{array}$$

10

$$\begin{array}{ll} -(1-5x)(2x+2)-10(x^2-4); & (1-4a)(3a+1)12a(a-2); \\ 11-3y^2+(3y+2)(4+y); & (a-b)(a^2+ab+b^2)+b^3; \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)-b^3; & (a+b)(a-b)+b^2. \end{array}$$

11

Упрости выражение и вычисли его значение:

а) $(a-1)(a-3)-(a-4)(a-2)$, когда $a = -1\frac{3}{4}$;

б) $(x-1)(x-5)-(x-3)(x+2)$, когда $x = -2\frac{3}{5}$;

в) $1,5y(5-6y)-3y(y-4)$, когда $y=1$;

г) $2,5z(4z-6)-5z(2z-8)$, когда $z=-6$;

д) $5x^2-(5x-1)(x+4)$, когда $z=0,1$;

е) $1+a^2-(a+1)(a+6)$, когда $z=0,2$.

12

Упрости выражение $(a-b)(a+3)-(a+b)(a-3)+2ab$.

13

Обоснуй, что для любого значения a выполняется равенство:

а) $3a(a-8)+2(a^2+12a)-5a^2+6=6$; б) $4b(b+9)-3(b^2+12b)-b^2+7=7$.

14

Длина прямоугольника в 3,5 раза больше его ширины. Если увеличить длину на 6 см и уменьшить ширину на 2 см, то площадь уменьшится на 16 кв. см. Найди площадь прямоугольника.

15

Длина прямоугольника в 2,5 раза больше ширины. Если уменьшить длину на 6 см и увеличить ширину на 5 см, то площадь увеличится на 35 кв. см. Найди площадь прямоугольника.

16

Докажи, что для любого целого значения m :а) значение выражения $(m+4)(m+5)-(m-2)(m-3)$ делится на 7 без остатка;б) значение выражения $(m+4)(m+5)(m-1)$ делится на 10 без остатка.

17

Вычисли значение числового выражения, вынося общий множитель за скобки:

а) $14 \times 13 - 7 \times 6$; б) $4,5 \times 16 + 2,75 \times 32$; в) $11 \times 7,2 - 22 \times 0,1$;

г) $\frac{13 \times 1,3 - 26 \times 0,15}{52}$; д) $\frac{4,2 \times 0,9 + 1,4 \times 7,3}{140}$; е) $\frac{1,8 \times 0,7 - 0,9 \times 0,4}{9 \times 0,5 - 27}$.

18 Сколько всего автомобилей в Грузии, если в Тбилиси зарегистрировано 384 000 автомобилей, что составляет 40% автомобильного парка страны?



19 Исследование, проведенное экологами в Тбилиси, показало, что доля озона в воздухе превысила норму на 150%. На сколько процентов необходимо уменьшить содержание озона в воздухе, чтобы его доля пришла в норму?

20 По подсчетам экологов, в атмосфере Тбилиси ежегодно обнаруживается около 276 500 тонн вредных веществ, из которых 83% приходится на автомобили. На сколько тонн уменьшится содержание вредных веществ в атмосфере в течение года, если в Тбилиси один день в неделю движение автотранспорта будет запрещено?



Возможно ли это?

Чтобы у пирамиды было 15 ребер? У призмы?

Ну-ка, попробуй!

Квадрат, длина стороны которого равна a см, разделен тремя горизонтальными и четырьмя вертикальными прямыми на равные прямоугольники. Вычисли сумму периметров этих прямоугольников.

4.9 Квадрат и куб двучлена



Цель

Уметь использовать формулы для вычисления квадрата и куба двучлена для упрощения и вычисления выражения.

При умножении многочлена на многочлен, полученные в произведении слагаемые иногда складываются или самоуничтожаются, и произведение принимает простую форму. Запись и запоминание некоторых таких случаев в виде отдельных равенств облегчит выполнение умножения многочленов друг на друга. Исходя из содержания, эти тождества называются **формулами сокращенного умножения**. Этот и следующий параграф посвящены изучению таких формул.

$$(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Получили тождество:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1)$$

Полученное алгебраическое равенство имеет наглядное геометрическое содержание: данный на рисунке 1 квадрат со сторонами длиной $a + b$, разделен на два квадрата и два прямоугольника.

Площадь большого квадрата, с одной стороны, равна $(a + b)^2$, а с другой стороны, сумме площадей его частей $a^2 + ab + ab + b^2$ или $a^2 + 2ab + b^2$.

Аналогично сумме, можем получить формулу для вычисления квадрата разности (попробуйте самостоятельно!):

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \quad (2)$$

Устно формула (1) может быть сформулирована следующим образом:

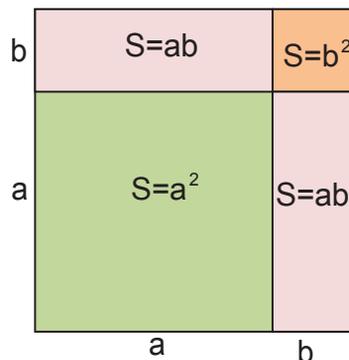


Рис. 1

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, к которому прибавлено удвоенное произведение первого числа на второе число и квадрат второго числа.

Пример 1. Упростим выражение::

а) $(a+b)^2-4ab$; б) $(3a-2b)^2+12ab$.

Решение. а) Используем сначала формулу (1), затем (2):

$$(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

б) В скобках представлена разность выражений $3a$ и $2b$. Следовательно, согласно формуле (2) будет:

$$(3a-2b)^2+12ab=(3a)^2-2(3a)\times(2b)+(2b)^2+12ab=9a^2-12ab+4b^2+12ab=9a^2+4b^2.$$

Тождества (1) и (2) также могут быть использованы для упрощения расчетов.

Пример 2. Вычислим: а) 41^2 ; б) $\frac{114}{76^2 - 38 \times 76 + 19^2}$.

Решение. а) Используем формулу суммы квадратов:

$$41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 80 + 1 = 1600 + 81 = 1681;$$

В знаменателе используем формулу разности квадратов. Следовательно,

$$76^2 - 38 \times 76 + 19^2 = 76^2 - 2 \times 19 \times 76 + 19^2 = (76 - 19)^2,$$

записываем:

$$\frac{114}{76^2 - 38 \times 76 + 19^2} = \frac{114}{(76 - 19)^2} = \frac{114}{57^2} = \frac{2}{57}.$$

Для вычисления $(a + b)^3$ используем формулу (1) и правило умножения многочленов:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Мы получили тождество для вычисления куба суммы двух чисел:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (3)$$

Аналогично можем получить формулу для вычисления куба разности (попробуй самостоятельно!):

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \quad (4)$$

Пример 3. Упростим и вычислим значение выражения $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$ когда $a = 1,5$.

Решение. Обратите внимание, что это выражение будет получено из правой части четвертого уравнения, если мы заменим в нем b на 2 . Следовательно,

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a-2)^3 = (-0,5)^3 = -0,125.$$

Ответ: $-0,125$.

Ответ на вопросы:

1. Почему тождества, указанные в параграфе, называются формулами сокращенного умножения?
2. Для чего нужны формулы сокращенного умножения?
3. Чему равна сумма квадрата суммы двух чисел и квадрата разности? Разность?
4. Как ты устно сформулируешь формулу куба суммы (разности) двух выражений?

Упражнения

Представь квадрат двучленов в виде многочлена (№1 - №4):

1 а) $(x-2)^2$; б) $(c+x)^2$; в) $(y-b)^2$; г) $(b+1)^2$.

2 а) $(x-2y)^2$; б) $(3c+x)^2$; в) $(2y-3b)^2$; г) $\left(3b + \frac{1}{2}\right)^2$.

3 а) $(0,3x-y)^2$; б) $(0,5c+1,2x)^2$; в) $(2,5y-2b)^2$; г) $(b+0,5)^2$.

4 а) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)^2$; б) $(y^2-x)^2$; в) $(y^2-b^2)^2$; г) $(b^3+1)^2$.

5 Упрости:
а) $(a+b)^2+(a-b)^2$; б) $(a+b)^2-(a-b)^2$.

6 Дополни до квадрата суммы или разности:
а) $a^2+2ab+*$; б) $n^2-4mn+*$; в) $x^2-^*+4y^2$; г) $a^2+^*+9b^2$;
д) a^2+ab+* ; е) $a^2-3ab+*$; ж) $^*+2a+a^2$; з) $^*-12xy+4y^2$.

7 Замени «*» одночленом так, чтобы получить квадрат суммы или разности:
а) x^2-4x+* ; б) $4a^2+4ab+*$; в) $x^2+^*+9y^2$; г) $\frac{1}{4}a^2 + 2ab + ^*$.

8 На какой одночлен нужно заменить x , чтобы получить квадрат суммы или разности?
а) $z^2 + \frac{1}{2}z + x$; б) $\frac{1}{4}a^2 + ab + x$; в) $x + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$; г) $4a^2-x+0,25b^2$.

9 Выполни действия, используя формулу квадрата двучлена:
а) $(70-1)^2$; б) $(50+1)^2$; в) 41^2 ; г) 59^2 ; д) 101^2 ; е) 1001^2 ; ж) 92^2 .

10 Вычисли, используя формулу квадрата двучлена:
а) 998^2 ; б) 999^2 ; в) 98^2 ; г) 62^2 ; д) 81^2 ; е) 24^2 ; ж) 109^2 .

11 Представь многочлен в виде степени двучлена:
а) x^2-6x+9 ; б) $9a^2+6a+1$; в) $25x^2+10xy+y^2$; г) $x^2-10xy+25y^2$.

12 Представь многочлен в виде произведения:
а) $16x^2-24x+9$; б) $9a^2+60a+100$; в) $81+18y^2+y^4$; г) $9x^4-30x^2y+25y^2$.

13 Вычисли значение выражения простым способом:
а) $x^2-2xy+y^2$, когда $x=165$, $y=65$;
б) $9a^2+60a+100$, когда $a=30$;
в) $81+18y^2+y^4$, когда $y=9$;
г) $9x^4-30x^2y+25y^2$, когда $x=5$, $y=15$.

14 Упрости выражение:
а) $(a-b)^2+4ab$; б) $(a+2b)^2-(a-2b)^2$; в) $(a+2b)^2-(a-2b)^2$;
г) $(3a+2b)^2+(3a-2b)^2$; д) $(0,5a+b^2)-(0,5a-b)^2$; е) $36x^2-(1+6x)^2$.

15 Вычисли значение выражения, используя формулу квадрата двучлена:
а) $121^2-202 \times 121+101^2$; б) $68^2+64 \times 68+32^2$;
в) $440^2-880 \times 330+330^2$; г) $385^2+30 \times 385+225$.

16 Вычисли значение выражения:
а) $\frac{110^2}{185^2 + 70 \times 185 + 35^2}$; б) $\frac{17 \times 25}{367^2 - 367 \times 564 + 282^2}$.

17

Выполни действия, используя формулу куба двучлена:

- а) $(a+1)^3$; б) $(a-2)^3$; в) $(3+b)^3$; г) $(1-2a)^3$;
 д) $(2a+3b)^3$; е) $(3a-2b)^3$; ж) $\left(\frac{1}{3}a+3\right)^3$; з) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^3$.

18

Вычисли значение выражения простым способом:

- а) $a^3+6a^2+12a+8$, когда $a=-7$;
 б) $x^3-9x^2+27x-27$, когда $x=23$.

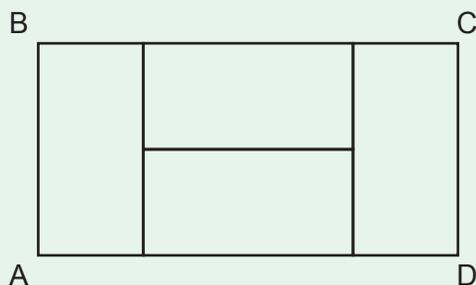
19

Упрости выражение:

- а) $\frac{1-6a+12a^2-8a^3}{1-4a+4a^2}$; б) $\frac{a^6+15a^4+75a^2+125}{a^4+10a^2+25}$.

20

Прямоугольник ABCD, периметр которого равен 48 см, разделен на четыре равных прямоугольника. Вычисли площадь прямоугольника ABCD.



Это интересно!

Квадрат суммы нескольких слагаемых

Квадрат суммы нескольких слагаемых вычисляется по формуле:

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2+2a_1a_2+\dots+2a_{n-1}a_n.$$

Для трех слагаемых:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Геометрическая иллюстрация этого равенства выглядит следующим образом:

c	ac	bc	c ²
b	ab	b ²	bc
a	a ²	ab	ac
	a	b	c

4.10 Формулы для разности квадратов, сумм и разностей кубов



Цель

Уметь использовать формулы сокращенного умножения для упрощения и вычисления выражений.

В этом параграфе мы продолжаем изучать формулы сокращенного умножения. Начнем с самой простой, но важной формулы. Предположим, что сумма двух чисел a и b умножена на разность тех же чисел: $(a + b)(a - b)$. Если мы используем правило умножения многочлена на многочлен, получим: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$. Серединные члены полученного четырехчлена взаимно уничтожаются, и мы получаем уравнение:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \quad (1)$$

Устно мы можем сформулировать эту формулу следующим образом:

Произведение суммы двух чисел на разность этих же чисел равно разности квадратов этих чисел.

Иногда это равенство, как и все другие равенства сокращенного умножения, используется записанным в обратном порядке:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b). \quad (2)$$

Это равенство называется формулой для вычисления **разности квадратов**.

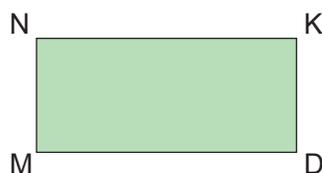
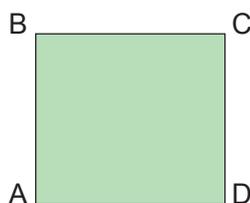
Приведем примеры использования формул (1-2):

Пример 1. Вычислим: а) 81×79 ; б) $61^2 - 59^2$.

Решение. а) $81 \times 79 = (80 + 1)(80 - 1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399$. Мы использовали формулу (1); б) $61^2 - 59^2 = (61 + 59)(61 - 59) = 120 \times 2 = 240$. Мы использовали формулу (2).

Докажем, что из прямоугольников с равными периметрами наибольшую площадь имеет квадрат.

Доказательство.



Дано: квадрат $ABCD$ и прямоугольник $MNKL$, $P_{ABCD} = P_{MNKL}$.

Н.д.: $S_{ABCD} > S_{MNKL}$

Предположим, что длина стороны AB квадрата равна a , а длина стороны NK прямоугольника - $a + b$, где $0 < b < a$. Тогда, исходя из равенства периметров, ширина прямоугольника будет $MN = a - b$. Из этих обозначений получаем, что $S_{ABCD} = a^2$, и $S_{MNKL} = (a - b)(a + b)$. Согласно формуле (1) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. То есть $S_{MNKL} = a^2 - b^2$. Очевидно, что $a^2 > a^2 - b^2$, из чего мы заключаем, что $S_{ABCD} > S_{MNKL}$, что и хотели доказать.

Приведем еще две формулы сокращения умножения, которые вы можете доказать самостоятельно, используя правило умножения многочленов:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3. \quad (3)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \quad (4)$$

Если мы поменяем местами левое и правое выражения этих равенств, мы получим формулы для вычисления суммы кубов двух чисел и разности кубов двух чисел.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \quad (5)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \quad (6)$$

Ответь на вопросы:

1. Как разложить на множители разность квадратов двух чисел?
2. Чему равно произведение суммы двух чисел и их разность?
3. Какое практическое применение может иметь утверждение, данное в задаче 1?

Упражнения

1. Вычисли $x^2 - y^2$, если: а) $x=2,6$ и $y=1,4$; б) $x=1,7$ и $y=2,3$.
2. Вычисли:
а) 71×69 ; б) 98×102 ; в) 199×201 ; г) 205×195 ;
д) $397,5 \times 402,5$; е) $76^2 - 24^2$; ж) $313^2 - 312^2$; з) $5,8^2 - 4,2^2$;
и) $\left(6\frac{3}{4}\right)^2 - \left(3\frac{1}{4}\right)^2$; к) $1001^2 - 999^2$; л) $7,3^2 - 6,7^2$; м) 401×399 .
3. Вычисли: а) 72×68 ; б) 49×51 ; в) 33×27 ; г) 28×32 ; д) 29×31 ;
е) 89×91 ; ж) 59×41 ; з) $43^2 - 33^2$; и) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$.
4. Вычисли:
а) $x^2 - 0,49$, если $x=1,7$; б) $x^2 - 2xy + y^2$, если $x=4,5$, $y=1,5$.
5. Укажи, какое равенство ложно:
а) $59 \times 61 = (60-1)(60+1) = 3599$; б) $58 \times 62 = (60-2)(60+2) = 3596$;
в) $79 \times 81 = (80-1)(80+1) = 6399$; г) $57 \times 63 = (60-3)(60+3) = 3591$;
д) $59 \times 61 = (60-2)(60+2) = 3596$; е) $37 \times 43 = (40-3)(40+3) = 1591$.
6. Какое из следующих равенств является верным?
а) $(3p+2q)(2q-3p) = 9p^2 - 4q^2$; б) $(3p+2q)(2q-3p) = 4q^2 - 9p^2$;
в) $(3p^2+2q)(2q-3p^2) = 3p^4 - 4q^2$; г) $(3p^2+2q)(2q-3p^2) = 4q^2 - 9p^4$.
7. Вместо «*» вставьте такое выражение, для которого будет получено верное равенство:
а) $(3p+*)(3p-*) = 9p^2 - 4a^2$; б) $(0,3p+*)(0,3p-*) = 0,09p^2 - 0,01b^2$;
в) $(3p^2+*)(*-3p^2) = 16p^2 - 9p^4$; г) $(0,04p^2+*)(*-0,04p^2) = 9a^4 - 0,0016p^4$.
8. Запиши в виде произведения:
а) $4a^2 - 25b^2$; б) $4a^2x^2 - 25b^2$; в) $0,0001 - \frac{1}{25}a^2$; г) $0,04a^2 - \frac{49}{9}b^2$.
9. Найди значение выражения $3x-5y$ если известно, что $3x+5y=9$ и $9x^2-25y^2=45$.
10. Найди значение выражения $2x+5y$ если известно, что $5y-2x=7$ и $25y^2-4x^2=35$.

11 Как изменится произведение двух равных чисел, если один множитель увеличим на 5, а другой – на столько же уменьшим?

12 Как изменится площадь квадратного участка, если мы увеличим его две противоположные стороны на 15 метров и уменьшим остальные стороны на 15 метров?

13 Сравни:
а) 61^2-60^2 и 51^2-50^2 ; б) $x^2-0,04$ и $(x-0,2)(x+0,2)$; в) $(x-3)^2$ и x^2-6x+8 ;
г) x^2+4x+3 и $(x+2)^2$; д) $(x-2)(x+2)$ и $(x+1)(x-1)$.

Выполни следующие действия, используя сокращенные формулы умножения: (№ 14-16)

14 а) $(0,5a^2b+2b)(0,5a^2b-2b)+(0,5a^2b+2b)^2$; б) $(2a+1)^3-(2a-1)^3$.

15 а) $(1+2x)(2x-1)-\frac{1}{4}(4x-8)^2$; б) $(8-n^3)(8+n^3)$; в) $(2^x+1)^2$; г) $(2^x+2^y)^2$.

16 а) $\left(\frac{1}{2}x^2-2y^2\right)\times\left(2y^2+\frac{1}{2}x^2\right)\times\left(\frac{1}{4}x^4+4y^4\right)$; б) $(5m+3)(25m^2-15m+9)$;

в) $(3a+2)^3-(3a-5)\times(9a^2+15a+25)$; г) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\times\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)$;

д) $(3^n+1)^3$; е) $(3^n-3^m)^3$; ж) $(3^n-3^m)(3^n+3^m)$; з) $(4^x+4^y)(4^{2x}-4^{x+y}+4^{2y})$.

17 На сколько процентов уменьшится площадь прямоугольного участка, если мы увеличим две его противоположные стороны на 20% и уменьшим остальные стороны на тот же процент?

18 На сколько процентов уменьшится площадь прямоугольного участка, если мы увеличим две его противоположные стороны на 50% и уменьшим остальные стороны на тот же процент?

19 Докажи, что модуль разности квадратов двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом.

20 Разность квадратов двузначных чисел, записанных одинаковыми цифрами, но в разном порядке, составляет 693. Найди эти числа.

21 Упрости и вычисли значение выражения:

а) $12,5m-[(2m^2-m^3+5)\times 2,5m+2,5m^4]$, когда $m=-0,2$;

б) $2a^4-(a+2)\times(2a^3-1)$, когда $a=-1,25$;

в) $4a^2b-\{a^2b-[-(5a^2b+1)-(1-3a^2b)]\}$, когда $a=-\frac{5}{12}$, $b=-18$.

4.11 Вынос общего множителя за скобки



Цель

Уметь разложить многочлен на множители, вынося общий множитель за скобки, и использовать это для упрощения и вычисления выражения.

Если в записи закона распределения $a(b + c) = ab + ac$ мы поменяем местами левое и правое выражения, мы получим простейший случай вынесения общего множителя за скобки:

$$ab+ac=a(b+c) \quad (1)$$

(1) С левой стороны равенства мы имеем **сумму** двух одночленов с общим множителем, а с правой стороны – **произведение** общего множителя и двучлена. Следовательно, мы можем считать это равенство простейшим случаем **разложения многочлена на множители** путем вынесения общего множителя за скобки.

Подведем итог: для вынесения общего множителя за скобки каждый входящий в многочлен одночлен должен содержать один и тот же (общий) множитель. Для разложения такого многочлена на множители, необходимо:

- I. Определить общий множитель;
- II. Разделить каждый член многочлена на общий множитель;
- III. Записать общий множитель за скобками, а полученный в результате деления многочлен – в скобках.

Пример 1. Разложим многочлен на множители:

а) $6a^2-8ab+4a$; б) $6(a+b)^2+c(a+b)$; в) $3a^{n+2}-a^n$.

Решение.

а) I. Каждый член трехчлена $6a^2-8ab+4a$ содержит общий множитель $2a$.

II. Разделим каждый член на общий множитель:

$$(6a^2):(2a)=3a, \quad (8ab):(2a)=4b, \quad (4a):(2a)=2.$$

III. Запишем общий множитель за скобками, а полученный в результате деления многочлен – в скобках:

$$6a^2-8ab+4a=2a(3a-4b+2).$$

б) I. В этом случае общий множитель $(a+b)$ является двучленом.

II. Разделим каждый член на общий множитель:

$$6(a+b)^2:(a+b)=6(a+b)=6a+6b, \quad c(a+b):(a+b)=c.$$

III. Запишем общий множитель за скобками, а полученный в результате деления многочлен – в скобках:

$$6(a+b)^2+c(a+b)=(a+b)(6a+6b+c).$$

в) I. Общий множитель выражения $3a^{n+2}-a^n$ это $-a^n$, потому что $3a^{n+2}=3a^2 a^n$.

II. Разделим каждый член на общий множитель:

$$(3a^2a^n):a^n=3a^2, \quad a^n:a^n=1.$$

III. Запишем общий множитель за скобками, а полученный в результате деления многочлен – в скобках:

$$3a^{n+2}-a^n=a^n(3a^2-1).$$

Пример 2. Докажем, что значение выражения 16^5-8^6 кратно 3.

Доказательство. $16^5-8^6=(2^4)^5-(2^3)^6=2^{20}-2^{18}=2^{18}(2^2-1)=3 \times 2^{18}$.

Разложение многочлена на множители является обратным действием умножения одночленов. Таким образом, чтобы проверить, правильно ли мы разложили многочлен

на множители, достаточно умножить полученные множители. Если разложение выполнено правильно, выражение, полученное в результате умножения, будет совпадать с заданным вначале многочленом. Так, например, если в примере 1а мы раскроем скобки в полученном произведении, то получим:

$$2a(3a-4b+2)=2a \times 3a-2a \times 4b+2a \times 2=6a^2-8ab+4a.$$

В результате мы получили многочлен, заданный вначале, т.е., разложение на множители выполнено правильно.

Ответ на вопросы:

1. Какое правило умножения мы используем при вынесении общего множителя за скобки?
2. Как разложить многочлен на множители, вынося общий множитель за скобки?
3. Как проверить правильность разложения многочлена на множители?

Упражнения

Представь в виде произведения (№ 1-7)

1

- | | |
|--|--------------------------------------|
| а) $35 \times 14 + 35 \times 11 - 35 \times 9$; | б) $13 \times 512 + 13 \times 488$; |
| в) $375 \times 125 + 375 \times 275$; | г) $25 \times 734 - 25 \times 726$; |
| д) $13k + 52t - 39f$; | е) $3a^2 - 6b + 15c$. |

2

- | | | | |
|--------------------|------------------|------------------|-------------------|
| а) $12bc + 20cd$; | б) $24a + 36b$; | в) $2m + 2n$; | г) $a^5 - 3a^4$; |
| д) $22ab - 12t$; | е) $15x - 10y$; | ж) $9mn + 9nk$; | з) $21xy - 49x$. |

3

- | | | | |
|---------------------|-------------------------|-------------------|---------------------|
| а) $16x - 8x^2$; | б) $-10ab - 25a$; | в) $23bd - 23d$; | г) $121am + 77m$; |
| д) $40pt - 72t^2$; | е) $-54bd + 63b^2d^2$; | ж) $a^5 + 5a^3$ | з) $3m^4 + 24m^2$. |

4

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| а) $-24b^7 - 44b^4$; | б) $96b^8 - 72b^9$; | в) $8x + 12y - 16z$; |
| г) $18a - 27b - 63c$; | д) $108a + 72b - 36c$; | е) $84m - 91n - 49k$. |

5

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| а) $6y^5 + 12y^4 - 3y^3$; | б) $62y^3 - 93y^7 - 31y^6$; | в) $25a - 15ab + 45ac$; |
| г) $18a^2 - 54ab + 45a^2c$; | д) $7x - 27xy + 47x^2$; | е) $32bc + 16b^2c + 54bc^2$. |

6

- | | |
|--|---------------------------------------|
| а) $75a^8b^6c^4 + 125a^6b^7c^5 - 625a^5b^4c^5$; | б) $85m^5n^4 - 34m^3n^3 + 17m^2n^2$; |
| в) $28x^2y^3 + 42x^3y^2 - 14x^4y^3$; | г) $3a^4b^2 + 36a^2b + 6ab^4$. |

7

- | | | | |
|--------------------------------|------------------------|------------------------------|---------------------------|
| а) $2x^2y^2 + 2x^2y + 6x^2a$; | б) $c^9 - c^7 - c^5$; | в) $7a^2y + 14aby + 7b^2y$; | г) $k^{14} + k^8 + k^9$. |
|--------------------------------|------------------------|------------------------------|---------------------------|

8

Вынеси общий множитель за скобки:

- | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| а) $21a^2b + 28ab^2$; | б) $a^5 + a^3 - a^2$; | в) $-6m^3n^2 - 12m^2n - 24mn^2$; |
| г) $x^8 - x^5$; | д) $33ab^2 - 55a^2b$; | е) $-5m^2n^3 - 15mn^2 - 25m^2n^2$. |

9

Представь в виде произведения:

а) $3^{n+2}+3^n$; б) $7^{k+1}-7^k$; в) $4^{m+3}-4^m$; г) $2^{2n+2}+2^{2n+3}$.

10

Докажи, что:

а) сумма 8^6+2^{15} кратна 9; б) разность 14^4-7^4 кратна 5;

в) разность 16^6-2^{20} кратна 1; г) сумма 16^5+8^6 кратна 5;

11

Известно, что $a + b = 4$ и $b + 2c = -2$. Найди значение выражения $b(a + b) + 8c$.

12

Известно, что $a + b = 3$. Вычисли значение выражения $a^2b + ab^2 - 3ab - 5$.

13

Обоснуй, что сумма двух последовательных натуральных степеней 3, кратна 12.

14

Обоснуй, что разность двух последовательных натуральных степеней 5, делится на 20 без остатка.

15

Разложи многочлен на множители:

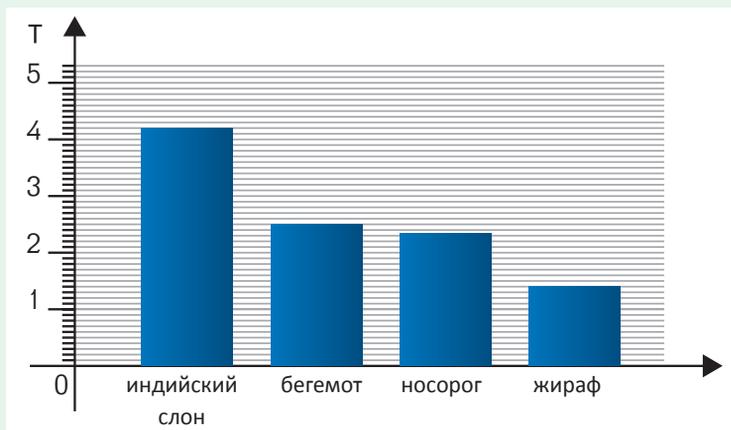
а) $a^{m+1}+a$; б) $a^{m+n}+a^n$; в) $6b^{n+2}+9b^{n+1}$;

г) $4b^{n+2}-12b^n$; д) $x^{n+3}+x^2$.

16

На столбчатой диаграмме представлена средняя масса нескольких животных.

Ответ на вопросы согласно данной диаграмме:



а) Какое животное весит больше всех? Меньше всех?

б) Средний вес какого животного больше и на сколько килограммов - бегемота или носорога?

Найди данные о длине животных на диаграмме и в соответствии с ними построй столбчатую диаграмму.

4.12. Разложение многочлена на множители методом группировки



Цель:

1. Научиться раскладывать многочлен на множители методом группировки.
2. Уметь использовать разложение многочлена на множители методом группировки в тождественных преобразованиях и вычислениях выражения.

Если у всех членов многочлена нет общего множителя, то мы используем метод группировки.

Пример 1. Разделим на множители: а) $a(x+y)+x+y$; б) $a(x-y)-x+y$;

в) $m(3x-y)+3nx-ny$; г) $2ac+3b-bc-6a$; д) x^2+5x+6 .

Решение. а) Достаточно взять в скобки со знаком «+» два последних члена многочлена: $a(x+y)+x+y=a(x+y)+(x+y)=(x+y)(a+1)$;

б) Иногда до вынесения общего множителя за скобки, нужно изменить знак некоторых членов многочлена. В заданном многочлене $a(x-y)-x+y$ двучлены $x-y$ и $-x+y$ являются противоположными выражениями. Их значения отличаются только знаком: $-x+y = -(x-y)$, поэтому $a(x-y) - x + y = a(x-y) - (x-y) = (x-y)(a-1)$;

в) Достаточно взять в скобки два последних члена многочлена и вынести за скобки их общий множитель:

$$m(3x-y)+3nx-ny=m(3x-y)+(3nx-ny)=m(3x-y)+n(3x-y)=(3x-y)(m+n);$$

г) Сгруппируем те члены многочлена, которые имеют общий множитель:

$$2ac+3b-bc-6a=(2ac-6a)+(3b-bc)=2a(c-3)-b(c-3)=(c-3)(2a-b);$$

д) Представим $5x$ в виде удобной для нас суммы:

$$x^2+5x+6=x^2+3x+2x+6=x(x+3)+2(x+3)=(x+3)(x+2).$$

Для того, чтобы разложить многочлен на множители методом группировки, необходимо:

I. Сгруппировать те члены многочлена, которые имеют общий множитель.

II. Вынести за скобки общий множитель сгруппированных членов.

III. Вынести за скобки общий множитель полученных слагаемых.

Если слагаемые, которые мы хотим объединить в группу, не следуют друг за другом, мы должны использовать переместительное свойство сложения и, при необходимости, поменять слагаемые местами.

Пример 2. Представим многочлен в виде произведения:

$$7x^2+6xy+7x^3+6yx^2+7y+y^2$$

Решение.

$$\begin{aligned} 7x^2+6xy+7x^3+6yx^2+7y+y^2 &= (7x^2+7x^3+7x)+(6xy+6yx^2+6y)= \\ &= 7x(x+x^2+1)+6y(x+x^2+1)+6y(x+x^2+1)=(x^2+x+1)(7x+6y) \end{aligned}$$

В обсуждаемом примере мы сгруппировали слагаемые по коэффициентам.

Ответь на вопросы:

1. Какое преобразование называется разложением многочлена на множители?
2. Как мы выполняем разложение многочлена на множители методом группировки?

Упражнения

1

Разложи многочлен на множители:

- а) $3n(a+b)+a+b$; б) $3m(2x+3)+2x+3$; в) $11(m-n)+m-n$;
г) $24k(a-b)+a-b$; д) $4a(x+y)-2x-2y$; е) $2a(b-c)+2c-2b$;
ж) $7(a-b)-bc+ac$; з) $3x(3m+2n)-9m-6n$.

2

Разложи многочлен на множители методом группировки:

- а) $ab+ac-a-c$; б) $mn-mk-n+k$; в) $7+8bx+7x+8b$;
г) $2m-2n+kn-km$; д) $xy+yz+nz+nx$; е) $m^2-mn+kn-km$;
ж) $p^2+pq-5p-5q$; з) $a^2-ax-7a+7x$.

3

Представь многочлен в виде произведения:

- а) $(a+b)^2-a-b$; б) $2a-3b-(3b-2a)^2$; в) $(m-n)^2-5m+5n$; г) $(m-n)^2-tm+tn$.

Разложи на множители (№ 4-7)

4

- а) $a+b+c(a+b)$; б) $m-n+k(m-n)$;
в) $5x(a+b)+a+b$; г) $x^2-xy-y+x$;
д) $(x-y)^2+x-y$; е) $x+2a(x-y)-y$;
ж) $a+(a-b)^2-b$; з) $a-b+3k(a-b)$;
и) $2m(m-n)-n+m$; к) $4d(p-1)+1-p$;
л) $c(x-y)-x+y$; м) $6c(7a-9b)-7a+9b$.

5

- а) $ax+ay+5x+5y$ б) $ac+bc+a+b$;
в) $a^3+a^2b-a^2c-abc$ г) $56x^2-45y-40xy+63x$;
д) $15b^2c-48ab^2-10c^2+32ac$; е) $a^3+a^2b-ab-b^2$;
ж) $mx^2-nx^2-nx+mx-m+n$.

6

- а) $(x^2-x-1)(y+2)+(1+x-x^2)(z+12)$;
б) $(2m^2-3n)(y^2-y+2)+(-2+y-y^2)(3n-2m^2)$;
в) $(5y+7z)(12x^2+6x)+(7z-5y)(12x^2+6x)$;
г) $(x-y)a+(y-x)b-(-x+y)b^2$;
д) $(6x^2-5y)+7x(5y-6x^2)-(6x^2-5y) \times 4y$.

7

- а) $5x(3a^2-2b)-(2b-3a^2)+(3a^2-2b) \times 3y$;
б) $5a(4a-7b)+8b(7b-4a)-(4a-7b)$;
в) $5y^2(2x^2-y)-7y(y-2x^2)+2x(2x^2-y)$.

- 8** Разложи многочлен на множители методом группировки:
а) $6ab-8b^2-15ac+20bc$; б) $14cy+35bc-20by-8y^2$.
- 9** Узнай, есть ли общие множители у многочленов $15a+8ab-6a^2-20b$ и $14a+20x-35-8a$.
- 10** Представь многочлен в виде множителей:
а) $16a^2-2a-8a+1$; б) $y^8+y^6-6y^2-6$.
- 11** Вычисли значение выражения:
а) $2x^3y-5xy^3-10y^2+4x^2$, если $x = 1\frac{5}{7}$; $y = -1\frac{1}{6}$;
б) $3x^3y-4xy^3-3x^2+4y^2$ если $x=0,8$; $y=1,25$;
в) $3xy^3-4x^3y+3y^2-4x^2$, если $x=4,5$; $y = -\frac{2}{9}$.
- 12** Вычисли простым способом:
а) $12,7 \times 5,3 + 3,2 \times 7,3 + 0,8 \times 7,3 - 12,7 \times 1,3$;
б) $32,4 \times 6,7 + 17,6 \times 8,3 - 32,4 \times 1,7 - 3,3 \times 17,6$;
в) $18,2 \times 8,1 + 23,8 \times 5,1 - 18,2 \times 7,6 - 23,8 \times 4,6$.
- 13** Представь многочлен в виде множителей:
а) $xm+2m-x-2$; б) $m^3n-2m^3+mn-2m$; в) $6a^2b+14ab-9a^2c-21abc$.
- 14** Разложи многочлен на множители:
а) $a^2x^{n+1}-ax^n+ax-1$; б) $3x^{n+2}-x^n-3x^2+1$; в) $ax^{n-1}+2x^n-2x-a$.
- 15** Одну сторону прямоугольного земельного участка со сторонами длиной a и b увеличили на несколько метров, а другую сторону уменьшили на столько же метров, после чего площадь участка стала равной $ab-c^2-ac+bc$. Найди размеры полученного участка.
- 16** Разложи многочлен на множители:
а) x^2+4x+3 ; б) x^2-3x+2 ; в) x^4+5x^2+6 ;
г) n^3+3n^2+2n ; д) $y^2-14y+40$; е) a^2-6a+5 .
- 17** Вычисли, используя сокращенные формулы умножения:
а) 201×199 ; б) $385^2 - 315^2$;
в) $\frac{38^2 + 44 \times 38 + 22^2}{33^2 - 27^2}$; г) $\frac{73^2 - 46 \times 73 + 23^2}{29^2 - 21^2}$.

4.13 Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения



Цель

Уметь разложить многочлен на множители с помощью формул сокращенного умножения

Иногда для разложения многочлена на множители мы используем формулы сокращенного умножения.

Пример 1. Разложим на множители:

а) $9x^2+30xy+25y^2$; б) $25a^2-30ab-4c^2+9b^2$.

Решение. а) Используем формулу:

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, когда $a=3x$, $b=5y$. Получим:

$$9x^2+30xy+25y^2=(3x)^2+2 \times 3x5y+(5y)^2=(3x+5y)^2$$

б) I, II и IV члены в выражении $25a^2-30ab-4c^2+9b^2$ вместе дают $(5a-3b)^2$ поэтому пишем: $25a^2-30ab-4c^2+9b^2=(5a-3b)^2-4c^2=(5a-3b)^2-(2c)^2=(5a-3b-2c)(5a-3b+2c)$.

В последнем преобразовании мы использовали формулу разности квадратов.

Пример 2. Упростим выражение: а) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$; б) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$.

Решение. а) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$;

б) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3} = \frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{1}{a-b}$.

Ответь на вопросы:

1. Какие методы разложения многочлена на множители ты знаешь?
2. Где мы используем разложения многочлена на множители?

Упражнения

Разложи многочлен на множители (№1 - №15):

1

а) $4x^3-4x$;

б) a^3c^3-ac ;

в) a^2-4 ;

г) $1-c^2x^2$;

д) $16-x^2$;

е) n^2-2n+1 .

2

а) $x^2+2xy+y^2$;

б) $1-2x+x^2$;

в) $1-2x^2+x^4$;

г) ab^2-ax^2 ;

д) $3m^2-75$;

е) a^3-ap^2 ;

ж) $81a^3-a$;

з) $400a^4-a^2$;

и) $121x^2y-225x^2y^3$.

3

а) a^4-a^6 ;

б) a^3-an^2 ;

в) mn^2-ma^2 ;

г) x^6-81x^2 ;

д) x^4-256 ;

е) n^4-81 ;

ж) $125x^2-5$;

з) $3a^3-147a$;

и) $216a-6a^3$.

4 а) $x^2y - 2xy + y$; б) $ax^2 + 4ax + 4a$; в) $20x - 60x^2 + 45x^3$;
 г) $20a^3 - 20a^2 + 5a$; д) $-9x^2 + 6x - 1$; е) $-12a^2 + 24ma - 12m^2$;
 ж) $6a^2 - 24a^4 + 24a^6$; з) $7x^2 + 7y^4 - 14xy^2$; и) $k^{m+2} - k^m$.

5 а) $x^2 + 2x + 1 - a^2$; б) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$; в) $t^2 - 2t + 1 - p^2$;
 г) $ax^4 - x^4 + ax^3 - x^3$; д) $x^2 - y^2 - 6x + 9$; е) $p^2 - q^2 - 4p - 4q$.

6 а) $10 + 6xy - 50y - 1, 2x$; б) $a^2 - b^2 + a - b$; в) $c^2 - c - m^2 - m$;
 г) $a - b + a^2 - b^2$; д) $x + y + x^2 - y^2$; е) $a - b^2 + a^2 - b$;
 ж) $m^2 + m - n - n^2$; з) $x - y + x^3 - y^3$; и) $x^3 + y^3 + x + y$.

7 а) $1 - \frac{1}{16}a^4$; б) $1 - \frac{1}{16a^4}$;
 в) $\frac{9}{25}a^4b^2 - \frac{1}{16}$; г) $\frac{9}{25}a^4b^2 - \frac{1}{25}$;
 д) $1 + 64m^2$; е) $1 - 64m^2$;
 ж) $128x^2 - 32y^2$; з) $\frac{49}{144}x^2 - 81$.

8 а) $a^2 - 2ab + b^2 - 81$; б) $a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc$; в) $a^2 - 2ab + b^2 - 3a + 3b$;
 г) $m^2 - 6mn + 9n^2 - 3m - 3n$; д) $2a^3 + 8a^2b + 8ab^2$; е) $a^2 + 2ab + b^2 + c^2$.

9 а) $x^4 - 4x^2 + 2x^2y^2 + y^4$; б) $3z^5t^3 - 24z^3t^4 + 48zt^5$;
 в) $3x^4 - 3z^2 - 6x^2y + 3y^2$; г) $mn - kn - m^2 + 2mk - k^2$.

10 а) $25x^2 - 10x - x^2 - 25$; б) $x^2 + 2x - y^2 + 2y$;
 в) $2a + a^2 - b^2 + 2b$; г) $a^2 - 2b - a - 4b^2$.

11 а) $x^2 - x^2y - xy^2 - y^2$; б) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$;
 в) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$; г) $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x$.

12 а) $(a+3)^2 + (a-3)(a+3) + 6a$; б) $c^2 - 2c + 1 - a^2$;
 в) $x^4 - x^2y^2 + 2x^2y + y^2$; г) $m^3 + m^2n - 25m - 25n$.

13 а) $x - y - x^2 + y^2$; б) $m^2 - mn + m + mq - nq + q$;
 в) $ab^3 - 3b^3 + ab^2y - 3b^2y$; г) $y^3 - 3y^2 + 6y - 18$.

14 а) $4x^2y + y^3 + 4xy^2 + x^3$; б) $5pq^2 - q^3 - 5p^2q + p^3$;
 в) $xy^2 - x + 5 - 5y^2$; г) $x^3 - xy^2 + 3y^2 - 3x^2$.

15 а) $a^3 + a^2b - ab - b^2$; б) $x^2 - 2xy + y^2 - m^2$;
 в) $a^2 + 2ab + b^2 - d^2$; г) $2ab - a^2 - b^2 + c^2$.

16 Упрости:
 а) $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$; б) $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$; в) $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$; г) $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$.

17

Упрости:

$$\text{а) } \frac{a^3 + b^3}{a + b}; \quad \text{б) } \frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3}; \quad \text{в) } \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3}.$$

18

Длина прямоугольника $a + b$, а площадь — $a^2 + ab - ac - bc$. Найди ширину прямоугольника.

19

Вычисли кратчайшим способом:

$$\text{а) } 19,7^2 - 8,3^2 + 28 \times 8,6; \quad \text{б) } 50,7^2 - 50,6^2 - 0,1 \times 1,3.$$

20

Докажи, что:

- а) Сумма двух натуральных последовательных степеней 3 делится на 12;
 б) Разность двух натуральных последовательных степеней 5 делится на 20 без остатка.
 в) Разность куба числа и самого этого числа кратна 6.

21

Разложи многочлен в виде произведения как можно большего количества множителей;

$$\text{а) } x^5 - x^4 - x + 1; \quad \text{б) } 16 - x^4 + x^2(x^4 - 16).$$

22

Разложи многочлен на множители:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } (3+2a)^2 - (a-1)^2; & \text{б) } (3x+2y)^2 - (y+x)^2; & \text{в) } 4(x-y)^2 - (x+y)^2; \\ \text{г) } 9(p+q)^2 - (p-q)^2; & \text{д) } (8x+2)^2 - 4(8x+2)+4; & \text{е) } (m-3)^2 + 2(m-3)+1. \end{array}$$

23

Вычисли значение выражения:

$$\text{а) } 3^{50} \times 4^{50} - (12^{25} - 1)(12^{25} + 1); \quad \text{б) } 11^{30} \times 12^{30} + (1 - 132^{15})(132^{15} + 1).$$

24

Запиши в виде произведения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{1}{27} - x^6; & \text{б) } (2p-3)^3 + 1; \\ \text{в) } 8 - (3-k)^3; & \text{г) } (3a+5)^3 - 8; \\ \text{д) } 125x^6 + \frac{1}{8}y^6; & \text{е) } 64x^3 - 27y^3. \end{array}$$

25

Представь в виде произведения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } x^{2n} - 1; & \text{б) } a^{4n} - 9; & \text{в) } 16x^{2n+2} - 4y^{6n}; \\ \text{г) } 4a^{4m-16b} - 9^{2m-4}; & \text{д) } m^{2n} - 2m^{n+1}; & \text{е) } c^{2n+8} + 8c^{n+4} + 16. \end{array}$$

26

Докажи, что квадрат натурального числа и сумма самого этого числа кратны 2.

27

Площадь квадратного участка земли выражена многочленом: $25a^2 - 20ab + 4b^2$. Вычисли площадь квадрата и длину стороны, если $a = 1,2$ км и $b = \frac{1}{2}$ км.

28

Длина квадратного участка была увеличена на a метров, а ширина — уменьшена на a метров. Площадь полученного участка оказалась на 100 кв. м меньше первоначальной площади. Найди a .

29

Длина a и ширина b классной доски были увеличены на одинаковое количество метров, после чего площадь доски стала $(9c^2 + 3bc + ab + 3ac)$ м².

- а) Каким двучленом будет выражена длина и ширина новой доски?
 б) Можно ли определить размеры увеличенной части доски? В случае положительного ответа объясни, как.
 в) Определи площадь, длину и ширину новой доски, если $a=2,4$ м, $b=1,4$ м, $c=0,2$ м.

30

Длину стороны квадрата a изменили так, что получили прямоугольник, площадь которого выражена многочленом: $5ab + 3ac + 15bc + a^2$. Какие двучлены соответствуют сторонам прямоугольника?

31

Разложи на множители:

- а) $b^4 + 4b^2 - 5$; б) $n^2 + 3n + 2$; в) $x^2 - 15x + 56$.

32

Вычисли значение дроби:

- а) $8a^3 - b^3 + 4ab - 2b^2$; б) $a^3 - 3a^2 + 6a - 8$; в) $a^3 - 12ab^2 + 4a^2b - 27b^3$.

33

Вычисли значение дроби:

- а) $\frac{15^2 - 15 \times 7}{24 \times 11 - 24}$; б) $\frac{29,7^2 - 10,3^2}{22,5^2 - 17,5^2}$.

34

Докажи, что:

- а) значение выражения $(3n-4)^2$ кратно 8;
 б) значение выражения $274 - 95 - 39$ кратно 23;
 в) значение выражения $164 - 85 + 45$ кратно 33.

Возможно ли это?

Чтобы сумма величин каждого из двух углов треугольника была

- а) больше 120° ? б) меньше 120° ?

Ну-ка, попробуй!

Докажи, что $n^3 + 2n$, где n - любое натуральное число, делится на 3 без остатка.

4.14 Уравнение



Цель

Уметь решить уравнение, проверить его и выбрать решение.

Задача 1. На одной тарелке весов находятся семь килограммовых гирь, а на другой - одна двухкилограммовая гиря. Какого веса предмет нужно положить на вторую тарелку, чтобы уравновесить весы?

Решение. Допустим, на вторую тарелку нужно положить x -килограммовый предмет, тогда вес предмета и гири на этой тарелке будет $(2 + x)$ кг. Поскольку после этого весы будут уравновешены, можем написать уравнение:

$$2 + x = 7,$$

$$x = 7 - 2$$

откуда получаем, что:

$$x = 5$$

Ответ: на вторую тарелку нужно положить пятикилограммовый предмет.

Чтобы решить эту задачу, мы составили уравнение, которое содержит неизвестную величину.



Равенство, содержащее неизвестное, называется уравнением.

Следовательно, равенство $2 + x = 7$ является уравнением. Число 5 является решением этого уравнения, это означает, что если мы в уравнении вместо x подставим 5, уравнение становится правильным равенством.

Решением уравнения называется такое числовое значение неизвестного, при котором уравнение становится правильным равенством.

Задача 2. Какое из чисел 0, -3, 7 является решением уравнения $2x - 5 = 9$?

Решение. Каждое из указанных чисел подставим в уравнение вместо неизвестного. Решением уравнения будет число, при котором левая и правая части уравнения будут равны.

х	Подстановка	Вывод
0	$2 \times 0 - 5 = -5$	0 не является решением
-3	$2 \times (-3) - 5 = -11$	-3 не является решением
7	$2 \times 7 - 5 = 9$	7 является решением

Ответ: 7 - решение уравнения $2x - 5 = 9$.

Некоторые уравнения имеют более одного решения. Например, решениями уравнения $|x| = 5$ являются -5 и 5. Уравнения могут иметь много решений или вообще не иметь решений.

Решить уравнение - значит найти все его решения или показать, что решения не существует. В будущем ты узнаешь различные способы решения уравнения, хотя некоторые простые уравнения могут быть решены и устно. Например, чтобы решить уравнение $9-x=3$, достаточно ответить на вопрос: какое число нужно вычесть из 9, чтобы получить 3?

Задача 3. Решим уравнение $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Решение. Разложим левую часть данного уравнения на множители:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x = x^2(x-2) - x(x-2) = (x-2)(x^2-x) = x(x-2)(x-1)$$

Заменим данное уравнение равным уравнением:

$$(x-2)x(x-1)=0$$

Равное нулю произведение означает, что хотя бы один множитель должен быть равен нулю. Поэтому либо $x-2=0$, либо $x=0$, либо $x-1=0$.

Откуда мы делаем вывод, что $x=2$, или $x=0$, или $x=1$.

Ответ: Решения уравнения: 0, 1 и 2. (Проверьте самостоятельно).

Ответ на вопросы:

1. Какое равенство называется уравнением?
2. Какое число называется решением уравнения?
3. Как можно проверить, является ли число решением данного уравнения?
4. Сколько решений может иметь уравнение?
5. Приведи пример уравнения, которое имеет:
а) одно; б) два; в) много; г) ни одного решения.

Упражнения

1. Какое из чисел 2, -5, 4 является решением уравнения $2x-3=5$?
2. Какое из чисел 4, 0,5, 1,6 является решением уравнения $x+0,4=2$?
3. Является ли -8 решением уравнения $4x^2=256$?
4. Является ли 0 решением уравнения $x^2+5x=0$?
5. Является ли 7 решением уравнения $(x-8)(x-7)=0$?
6. Даны два уравнения: $x^2-7x+8=0$ и $x^2-7x-8=0$. Решением какого уравнения является -1?
7. Даны два уравнения: $|x|+3=8$ и $|x|-3=8$. Решением какого уравнения является -11?

8

Реши уравнения устно:

- а) $x+7=12$; б) $13-x=8$; в) $2x=18$; г) $4x=-16$;
 д) $|x|=0$; е) $\frac{x}{2} = 10$; ж) $x^2=25$; з) $x^3=8$;
 и) $1,2x=36$; к) $-x=-0,7$; л) $-2x = \frac{1}{5}$; м) $3x-6=6$.

9

Составь уравнение для задачи::

- а) Лаша задумал число. Из утроенного задуманного числа он вычел 14, и в результате получил 160. Какое число задумал Лаша?
 б) Ника задумал число. Из удвоенного задуманного числа он вычел 16, умножил результат на 5 и получил 100. Какое число задумал Ника?
 в) У Тамрико есть 18 лари. Она хочет купить 15 компакт-дисков, каждый стоимостью 1,4 лари. Сколько лари нужно добавить Тамрико?
 г) В одном кувшине (Квеври) вина в три раза больше, чем в другом. Сколько литров вина в каждом кувшине, если в обоих - 240 литров?



10

Является ли решением уравнения $\frac{x^2-9}{2x+6} = 0$:

- а) число 2? б) число 3? в) число -3?

11

Является ли решением уравнения $\frac{|x|-4}{x-4} = 0$:

- а) число 3? б) число -4? в) число 4?

12

Реши уравнение:

- а) $x^2 - 2x = 0$; б) $x^2 + 3x = 0$; в) $|x| = 7$.

13

Реши уравнение::

- а) $x^3-9x=0$; б) $4(x+3)^2-(x-6)^2=0$; в) $y+40+(y+3)^2=9+6y+y^2$; г) $7a(25-a^2)=0$.

14

Радиус окружности равен 5 см. Найди длину хорды, проведенной через конец диаметра, которая образует с диаметром угол 60 градусов.

15

Из двух концентрических (имеющих общий центр) окружностей радиус большей – R, а меньшей – r. Точка А взята на большой окружности, а точка В – на маленькой окружности. Вычисли произведение наибольшего возможного и наименьшего возможного значений длины отрезка АВ.

16

Вычисли

- а) $(5,74^2-4,26^2):0,2$; б) $5+5^2+5^3+5^4$.



Практическая работа

Семья, состоящая из пяти человек, отправляется из Тбилиси в Баку. Им нужно выяснить, каким транспортом дешевле путешествовать: на собственной машине, в пассажирском автобусе, в поезде или в самолете. Помогите семье принять решение.

Для этого:

- Найди необходимую информацию и вычисли примерные дорожные расходы для всей семьи в случае использования каждого вида транспорта в обоих направлениях;

- Выбери автобусные станции, авиакомпании и вычисли среднюю цену билета на все четыре вида транспорта для одного члена семьи, затем для всей семьи;

- Узнай расстояние от Тбилиси до Баку и учти стоимость топлива на собственном автомобиле (скажем, в среднем 8 литров на 100 км);

Определи:

а) Какое решение примет семья на основании найденной тобой информации;

б) Сколько времени будет потрачено на поездку в случае использования каждого вида транспорта в обоих направлениях.



Баку

Ну-ка, попробуй!

1. Предположим, что a - сумма трех последовательных натуральных чисел, а b - сумма следующих трех натуральных чисел. Докажи, что произведение ab кратно 18.

2. Дито начертил два равных квадрата. Один квадрат разделен прямыми на 24 равных прямоугольника, а другой - тем же количеством прямых - на 28 равных прямоугольников. Разница между периметрами полученных маленьких прямоугольников оказалась равной 11 мм. Квадраты какой площади нарисовал Дито?

4.15 Линейное уравнение



Цель

Уметь решить линейное уравнение

Уравнение, которое содержит неизвестное в первой степени, называется **линейным уравнением**. Например, $2x-5 = 11$ является линейным уравнением, а $x^2-4 = 0$ не является линейным уравнением.

При решении линейного уравнения мы опираемся на следующие свойства равенства:

1. Если $a = b$, то $a + c = b + c$.
2. Если $a = b$, то $a - c = b - c$.
3. Если $a = b$, то $ac = bc$.
4. Если $a = b$ и $c \neq 0$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Пример 1. Решим уравнения, используя вышеперечисленные свойства равенства.

1. Прибавим 5 к обеим частям уравнения $x-5 = 4$. $x = 9$
2. Вычтем 7,3 из обеих частей уравнения $x + 7,3 = 10$. $x = 2,7$.
3. Умножим обе части уравнения $\frac{x}{3} = 4$ на 3. $x = 12$
4. Разделите обе части уравнения $2,5x = 5$ на 2,5. $x = 2$.

Для решения рассматриваемых уравнений достаточно было выполнить одно действие. Для решения некоторых уравнений требуется выполнить два или более действий.

Пример 2. Решаем уравнение $\frac{x}{4} + 5 = -3$

Решение. I действие. Вычтем 5 из обеих частей уравнения:

$$\frac{x}{4} + 5 - 5 = -3 - 5,$$

$$\frac{x}{4} = -8.$$

II действие. Умножим обе части уравнения на 4:

$$4 \times \frac{x}{4} = 4 \times (-8), \quad x = -32.$$

Пример 3. Решим уравнение $7x + 5(x - 2) = 14$.

Решение. I действие. Раскроем скобки:

$$7x + 5x - 10 = 14.$$

II действие. Приведем подобные члены:

$$12x - 10 = 14.$$

III действие. Прибавим 10 к обеим частям уравнения:

$$12x = 24.$$

IV действие. Разделим обе части уравнения на 12:

$$x = 2.$$

Пример 4. Решим уравнение $15 + 2x = 5 - 3x$.

Решение. Разместим неизвестные члены в одной части уравнения, а известные – в другой. (Неизвестные члены лучше разместить в той части, которая имеет большой коэффициент. Тот член уравнения, который переносится на другую сторону знака равенства, изменит свой знак на противоположный).

$$2x + 3x = 5 - 15.$$

К обеим частям уравнения можно прибавить или вычесть одно и то же число.

Обе части уравнения могут быть умножены или разделены на одно и то же ненулевое число.

II действие. Приведем подобные члены: $5x = -10$.

III действие. Разделим обе части уравнения на 5: $x = -2$.

Пример 5. Решим уравнение $32 - 4(x - 5) = \frac{2}{3}(14 - 3x)$.

Решение. I действие. Раскроем скобки:

$$32 - 4x + 20 = \frac{28}{3} - 2x.$$

II действие. Расположим неизвестные члены в одной части уравнения, а известные - в другой части:

$$32 + 20 - 9\frac{1}{3} = -2x + 4x.$$

III действие. Приведем подобные члены: $42\frac{2}{3} = 2x$.

IV действие. Разделим обе части уравнения на 2: $x = 21\frac{1}{3}$.

Пример 6. Решим уравнение $\frac{x-4}{3} + \frac{x+1}{4} = 1$.

Решение. I действие. Умножим обе части уравнения на 12:

$$4(x-4)+3(x+1)=12.$$

II действие. Раскроем скобки: $4x-16+3x+3=12$.

III действие. Упорядочим: $4x+3x=12+16-3$.

IV действие. Приведем подобные члены: $7x=25$.

V действие. Разделим обе части уравнения на 7: $x = 3\frac{4}{7}$.

Из рассмотренных примеров заключаем, что для решения линейного уравнения необходимо:

1. Привести уравнение к уравнению с целыми коэффициентами.
2. Открыть скобки.
3. Расположить неизвестные члены в одной части уравнения, а известные - в другой.
4. Сложить подобные члены.
5. Если коэффициент неизвестной отличается от нуля, разделить обе части уравнения на этот коэффициент.
6. После завершения решения желательно проверить, является ли полученное число решением уравнения.

Ответ на вопросы:

1. Какие свойства равенства мы используем для решения уравнения?
2. Какие действия мы выполняем для решения уравнения?
3. Какие свойства действий мы используем для решения уравнения?
4. Какие действия мы выполняем, когда обе части уравнения содержат неизвестное?
5. В какой последовательности мы выполняем действия при решении уравнения?

Упражнения

1

Реши уравнение устно:

а) $62+x=3$; б) $x+1,2 = 2,9$; в) $x - 1 = \frac{1}{3}$; г) $x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$;
 д) $7x=21$; е) $-3x=18$; ж) $\frac{x}{5} = 0,1$; з) $\frac{2}{13}x = 8$.

2

Реши уравнение:

а) $2x+5=9$; б) $\frac{1}{2}x - 1 = -1$; в) $9 - \frac{2}{3}x = -1$; г) $-6x+4x=2$;
 д) $3x+11-x=13$; е) $3x-7+x=5$; ж) $-10 = \frac{1}{2}y + y$; з) $12(2-x)=6$.

3

Найди значение неизвестного:

а) $6 = \frac{3}{2}x + 2(x - 4)$; б) $7y = -35y - 6$; в) $25d + 10 = 0$; г) $7a - 8 = 10a$;
 д) $6n + 8 = 4n - 12$; е) $-9 + 13q = 11 - q$; ж) $20 + 8t = -4 + 5t$; з) $2(x - 5) = -x$;
 и) $4(-6a - 2) = -16$; к) $-4(3 - x) = 11$; л) $\frac{2}{3}(4 - 18x) = 2$; м) $\frac{2}{3}(24t - 9) = 8x$.

4

Реши уравнение:

а) $\frac{3x}{8} - \frac{x}{3} = 11$; б) $\frac{y}{4} - \frac{y}{12} = 2$; в) $\frac{5b}{42} - \frac{b}{15} = 4$;
 г) $\frac{x-2}{4} + \frac{3-x}{8} = -2$; д) $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{2-x}{6}$; е) $1 + \frac{3x-1}{8} = \frac{5x-10}{14}$;
 ж) $x - \frac{5x-4}{3} = 2$; з) $2 - \frac{2x+21}{6} = \frac{x}{2}$; и) $\frac{4x-11}{10} = \frac{17-x}{20}$.

5

Реши уравнение:

а) $x^2 - 7 = x(x - 14)$; б) $(x - 5)(x + 5) = (x - 6)(x + 9)$; в) $\frac{x-3}{1+x} = \frac{4-x}{3-x}$.

6

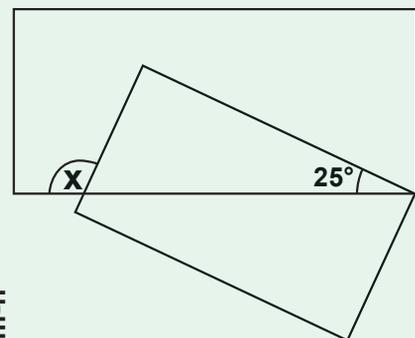
При каком численном значении k решение уравнения $x - 5k + 7,5 = 2,8$ будет равно $0,3$?

7

При каком численном значении m решение уравнения $2x + 3m - 2,9 = 11,8$ будет равно $1,35$?

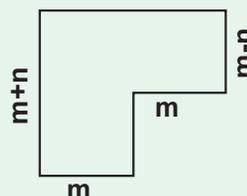
8

На чертеже показаны два прямоугольника с общей вершиной. Найди величину угла x в соответствии с заданным углом.



9

Вычисли площадь данной фигуры:



4.16. Алгебраический метод решения задачи



Уметь решать текстовые задачи алгебраическим методом

Алгебраический метод решения задачи включает в себя составление уравнения, соответствующего условиям задачи, и решение задачи на основе решения этого уравнения. Этот метод состоит из следующих этапов:

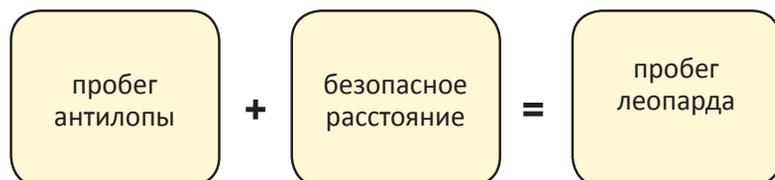
1. Составление словесной модели;
2. Введение неизвестного и связь с данными;
3. Составление алгебраической модели (уравнения);
4. Решение уравнения;
5. Ответ на вопрос задачи.

Решим несколько задач, используя алгебраический метод.

Задача 1. Антилопа может бежать со скоростью 20 метров в секунду. Леопард быстрее антилопы и может бежать 25 метров в секунду, но с этой скоростью он может бежать только в течение 20 секунд. На какое расстояние антилопа не должна подпустить леопарда, чтобы чувствовать себя в безопасности?

Решение.

1. Словесная модель



2. Введение неизвестного и связь с данными:

Допустим, безопасное расстояние между леопардом и антилопой - x метров. Через 20 секунд антилопа пробежит $20 \times 20 = 400$ метров, а леопард - $25 \times 20 = 500$ метров.

3. Составление уравнения:

$$400 + x = 500$$

4. Решение уравнения:

$$x = 100.$$

5. Ответ:

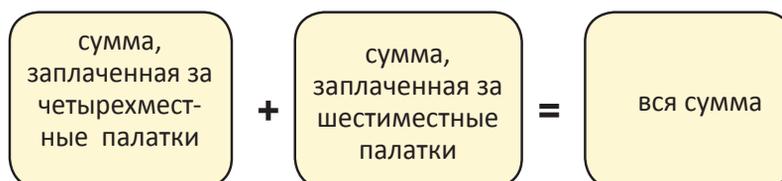
5. Ответ: Расстояние, на которое антилопа не должна подпустить леопарда, составляет 100 метров.



Задача 2. Летний ученический лагерь приобрел 16 четырехместных и шестиместных палаток стоимостью 1490 лари. Цена одной четырехместной палатки - 80 лари, а цена шестиместной палатки - 110 лари. Сколько четырехместных и шестиместных палаток приобрел лагерь?

Решение.

1. Словесная модель:



2. Введение неизвестного и связь с данными:

Допустим, купили x четырехместных палаток. Тогда шестиместных купили $(16-x)$. За четырехместные палатки заплатили $80x$ лари, а за шестиместные - $110(16-x)$ лари. За все палатки заплатили $(80x + 110(16-x))$ лари.

3. Составление уравнения:

$$80x + 110(16-x) = 1490.$$

Решение уравнения:

$$\begin{aligned} 80x + 1760 - 110x &= 1490, \\ -30x &= -270, \\ x &= 9. \end{aligned}$$

5. Ответ: Лагерь приобрел 9 четырехместных и 7 шестиместных палаток.

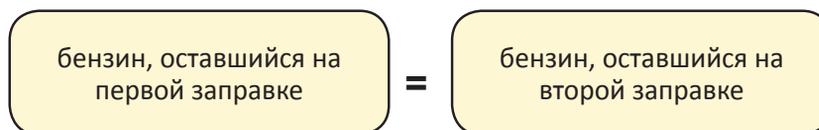
Составить уравнение при решении данной задачи будет легче, если составить таблицу..

	Количество палаток	Стоимость одной палатки	Стоимость всех палаток
Четырехместные палатки	x	80	$80x$
Шестиместные палатки	$16-x$	110	$110(16-x)$

Задача 3. На одной заправке было 2300 литров бензина, на другой - 2800 литров. В течение дня со второй станции было продано в пять раз больше бензина, чем с первой, после чего на обеих заправках стало одинаковое количество бензина. Сколько литров бензина было продано с каждой станции?

Решение.

1. Словесная модель



2. Введение неизвестного и связь с данными:

Допустим, с первой станции было продано x литров бензина, тогда со второй было продано - $5x$ литров. Количество бензина, оставшегося на первой заправке, составляет $(2300-x)$ литров, а на второй - $(2800-5x)$ литров.

Составление уравнения:

$$2300 - x = 2800 - 5x.$$

Решение уравнения:

$$\begin{aligned}4x &= 500, \\ x &= 125.\end{aligned}$$

Ответ: На первой заправке было продано 125 л бензина, а на второй - $125 \times 5 \text{ л} = 625 \text{ л}$.
В этой задаче уравнение также может быть составлено с использованием таблицы:

	Было	Продано	Осталось
I заправка	2300 л	x л	$(2300 - x) \text{ л}$
II заправка	2800 л	5x л	$(2800 - 5x) \text{ л}$

Мы можем успешно использовать алгебраический метод для решения геометрических задач.

Задача 4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Внешний угол, лежащий при вершине C, в 1,5 раза больше угла ADC. Найдем углы треугольника ABC.

Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$,
AD биссектриса,
 $\angle DCK=1,5\angle ADC$.

Н.д.: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение.

I. Словесная модель:

Согласно данным, $\angle DCK=1,5\angle ADC$.

II. Введение неизвестной и связь с данными:

Предположим, что $\angle ACD=x^\circ$. Тогда,

$$\angle BAC=x^\circ, \angle DAC = \frac{x^\circ}{2}, \angle ADC = 180^\circ - \left(x^\circ + \frac{x^\circ}{2}\right), \angle DCK=180^\circ-x^\circ$$

III. Составление уравнения:

$$180^\circ - x^\circ = 1,5\left(180^\circ - \left(x^\circ + \frac{x^\circ}{2}\right)\right)$$

IV. Решение уравнения:

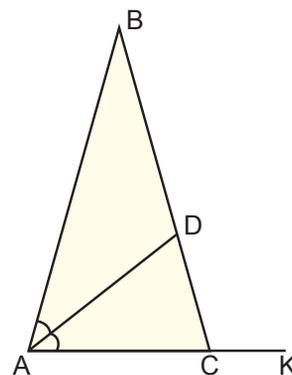
$$180^\circ - x^\circ = 270^\circ - \frac{9}{4}x^\circ,$$

$$\frac{9}{4}x^\circ - x^\circ = 270^\circ - 180^\circ,$$

$$\frac{5}{4}x^\circ = 90^\circ,$$

$$x^\circ = 72^\circ.$$

V. Ответ: $\angle A=\angle C=72^\circ$, $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)=36^\circ$.



Ответ на вопросы:

1. Какие этапы включает алгебраический метод решения задачи?
2. Какова связь между первым и третьим этапом решения задачи?
3. На каком основании мы составили словесную модель решения задачи 1?
4. (Согласно Задаче 1) Сможет ли леопард поймать антилопу, если расстояние между ними будет 95 метров? 120 метров?

Упражнения

- 1 Одно число в 3 раза меньше другого. Найди эти числа, если их разность равна 16.
- 2 Одно число в 4 раза больше другого. Найди эти числа, если их сумма 85.
- 3 Один смежный угол больше другого на 36° . Найди градусные меры этих углов.
- 4 Один смежный угол в 4 раза больше другого. Найди градусные меры этих углов.
- 5 В одном бидоне в два раза больше молока, чем в другом. Сколько литров молока в каждом бидоне, если в обоих вместе - 30 литров молока?
- 6 Один килограмм риса первого сорта стоит на 0,2 лари дешевле, чем 1 кг риса высшего сорта. Сколько стоит один килограмм риса каждого сорта, если Тинико купила по килограмму риса каждого сорта и заплатила за оба 3,6 лари?
- 7 В новогодние праздники в одном магазине было продано на две коробки салютов больше, чем в другом. Сколько коробок салютов было продано в каждом магазине, если в обоих магазинах вместе было продано 22 коробки?
- 8 В двух ящиках - 72 кг яблок. В одном из них яблок в 3 раза больше, чем в другом. Сколько килограммов яблок в каждом ящике?
- 9 С утра до перерыва в магазине было продано 64 кг сахара. После перерыва завезли еще 100 кг сахара и продали 38 кг. Вечером в магазине осталось 136 кг сахара. Сколько килограммов сахара было в магазине утром?
- 10 После того, как 10 пассажиров вошли в автобус, а 6 вышли, в автобусе стало 8 пассажиров. Сколько пассажиров было в автобусе сначала?
- 11 Периметр прямоугольников равен 48 сантиметров. Длина одной стороны в 5 раз больше другой. Вычисли длины сторон прямоугольника.
- 12 Длина жилого участка прямоугольной формы на 20 метров больше его ширины. Длина забора вокруг участка составляет 160 метров. Вычисли площадь участка.

- 13** Лодка двигалась по направлению течения три часа, а в противоположном направлении – 2 часа. Вычисли скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 8,5 км/ч, и лодка прошла 44,5 км в обоих направлениях.
- 14** Лодка прошла два километра по направлению течения, а в обратном направлении она за один час прошла 43 километра. Вычисли собственную скорость лодки, если скорость течения составляет 2,5 км/ч.
- 15** При приготовлении сухофруктов из яблок они теряют 85% своего веса.
а) Сколько килограммов свежих яблок необходимо, чтобы получить 20 килограммов сухофруктов?
б) Сколько килограммов сухофруктов получается из 200 килограммов свежих яблок?
- 16** При жарке кофе теряет 12% своего веса.
а) Сколько килограммов сырого кофе необходимо, чтобы получить 5 килограммов обжаренного кофе?
б) Сколько килограммов обжаренного кофе получается из 20 килограммов сырого кофе?
- 17** Ната на 15 лет старше Наны. Десять лет спустя Ната будет в два раза старше Наны. Сколько лет каждой девочке?
- 18** Папе 50 лет, сыну – 28 лет. Сколько лет назад сын был в 2 раза моложе отца?
- 19** Швейная фирма должна выполнить заказ в течение 10 дней. Фирма производила на 27 изделий в день больше, чем по договору с заказчиком, и выполнила заказ в течение 7 дней. Кроме того, 54 таких же изделия были выполнены для другого заказчика. Сколько изделий в день производила фирма?
- 20** За один день Гия прочитал $\frac{3}{5}$ части романа, на следующий день – половину от оставшейся части и последние 20 страниц. Сколько страниц романа прочитал Гия?
- 21** Из двух городов, находящихся на расстоянии 330 километров, навстречу друг другу одновременно выехали две машины. Скорость одной машины на 10 км/ч выше скорости другой машины. Через 2 часа расстояние между машинами составило 30 километров. С какой скоростью двигались машины?
- 22** Бревно толщиной 336 мм должны распилить на доски толщиной 30 мм. Сколько досок получится после распила, если при каждом распиливании в виде опилок расходуется материал толщиной 4 мм?
- 23** Возраст 16 игроков футбольной команды был 23 года. После того, как футболист-ветеран покинул команду, средний возраст стал 22 года. Сколько лет было футболисту-ветерану?

24 Докажи, что собственная скорость судна равна среднему арифметическому скорости по направлению течения и скорости в противоположном направлении.

25 Расстояние между кораблями А и В составляет 8 часов по направлению течения и 10 часов - в противоположном направлении. Сколько времени потребуется кораблю, чтобы пройти то же расстояние в стоячей воде?

26 Возраст бабушки Анны – это такое двузначное число, при удалении цифры единиц в котором, получится возраст Анны. Сколько лет бабушке, если известно, что Анна на 57 лет моложе своей бабушки?

27 Прямоугольник длиной 80 см и шириной 60 см разделен на 48 равных квадратов. Найди длину стороны каждого квадрата.

28 Объем одного из двух кубов в 27 раз превышает объем второго куба. Насколько больше площадь первого куба, чем площадь второго куба?



Ну-ка, попробуй!

Найди все трехзначные натуральные числа, при удалении цифры десятков в записи которых, получается в 9 раз меньшее число.

4.17 Последовательности



Цель

1. Уметь составлять последовательность в соответствии с заданными закономерностями;
2. Периодическая последовательность.

Для большинства событий характерна определенная последовательность: день сменяется ночью, ночь - днем; за весной следует лето, за летом - осень и зима; за первой страницей книги идет вторая, за второй - третья и т. д.

Понятие последовательности было введено для математического описания событий со свойствами последовательности.

Последовательности могут состоять из точек, символов, чисел или любого другого типа элементов. Они называются членами последовательности. Последовательность считается заданной, если известны все ее члены: первый, второй, третий и т. д. Рассмотрим, например, последовательность нечетных натуральных чисел:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

- Первым членом этой последовательности является число 1, вторым членом - число 3, пятым членом - число 9.
- В списке выше перечислены только первые восемь членов последовательности. Девятым членом последовательности является число 17, десятым - 19 и так далее.
- Число 23 является двенадцатым членом этой последовательности, его порядковый номер в последовательности равен 12.
- Предыдущий член двенадцатого члена последовательности является одиннадцатым членом, а следующий член - тринадцатым членом.
- Одиннадцатый и тринадцатый члены являются соседними членами двенадцатого члена последовательности.
- Соседними членами числа 9 в этой последовательности являются числа 7 и 11.
- Число 18 не является членом этой последовательности.
- Члены последовательности размещаются в порядке возрастания.
- Количество членов последовательности бесконечно.



Кинолента представляет собой последовательность неподвижных изображений (кадров).

Теперь рассмотрим следующую последовательность фигур:



Рис. 1

- Первый член этой последовательности - красный квадрат, второй - белый круг, а восьмой - синий круг.
- Соседние члены восьмого члена последовательности (синего круга) являются седьмым членом и девятым членом последовательности - белый квадрат и красный квадрат.
- Второй, шестой и десятый члены последовательности одинаковы - белые круги.

На рисунке 1 показаны первые двенадцать членов последовательности. Какие другие члены последовательности, мы можем только предполагать. Предположение основывается на закономерности, которая прослеживается в начальных членах последовательности: здесь группа фигур, состоящая из четырех членов последовательности, повторяется три раза подряд.



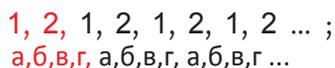
Последовательности, составленные в соответствии с такими закономерностями, называются периодическими последовательностями.

Период периодической последовательности - это группа последовательных начальных членов этой последовательности, которая затем постоянно повторяется.

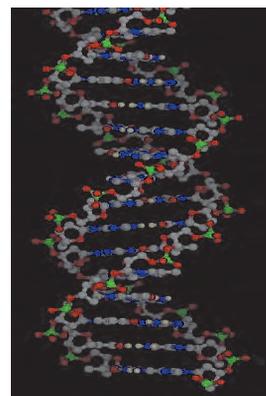
Простейшим примером периодической последовательности является постоянная последовательность, все члены которой одинаковы:



Другие примеры периодической последовательности (период обозначен красным цветом):



Генетический код каждого организма записывается в клетках этого организма посредством последовательности специальных веществ - молекул дезоксирибонуклеиновых кислот, которые показаны на рисунке справа.



Ответ на вопросы:

1. В каком случае последовательность считается заданной?
2. Каким по порядку является член последовательности, следующий за двадцатым??
Каким по порядку является его предыдущий член?
3. Какие члены являются соседними членами семнадцатого члена последовательности?
4. Какой член последовательности не имеет предыдущего члена?
5. Какие последовательности являются периодическими?
6. Что такое период последовательности?
7. Какая последовательность называется постоянной последовательностью?

Упражнения

- 1** Запиши первые шесть членов последовательности отрицательных целых чисел.
а) Чему равен восьмой член этой последовательности? Двадцать второй член?
б) Является ли число 42 членом этой последовательности? Число (-63)? Число (-32)?
в) Какой по порядку член последовательности -46?
г) Какой номер в этой последовательности имеет число (-22)?
д) Назови член, предыдущий двадцатому члену последовательности.
- 2** Запиши первые пять членов последовательности четных натуральных чисел.
а) Чему равен десятый член этой последовательности? Двадцать первый член?
б) Является ли число 62 членом этой последовательности? Число 63?
в) Каким по порядку членом этой последовательности является 46?
г) Чему равен номер числа 82 в этой последовательности?
д) Найди член последовательности, следующий за двадцатым членом.
- 3** Дана последовательность 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...
а) Чему равен седьмой член этой последовательности? Тринадцатый член? Двадцатый член?
б) Какой по порядку член последовательности равен 12?
в) Найди соседние члены двадцатого члена последовательности.
- 4** Дана последовательность 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, ...
а) Согласно какой закономерности составлена эта последовательность?
б) Чему равен девятый член этой последовательности? Пятнадцатый член? Двадцатый член?
в) Какой по порядку член этой последовательности равен 10?
г) Найди соседние члены двадцатого члена последовательности.
д) Найди номер первого двузначного члена последовательности.
е) Из скольких знаков состоит число, которое является сороковым членом этой последовательности? Сотым членом?
- 5** Напиши первые десять членов последовательности простых натуральных чисел.
а) Является ли число 1 членом этой последовательности? Число 13? Число 21? Число 37?
б) Какое простое число имеет номер 29 в этой последовательности?
в) Найди предыдущий и следующий член числа 47.
г) Сколько чисел в четвертом десятке являются членами этой последовательности?
- 6** Расставь обычные дроби в порядке возрастания, числитель которых на единицу меньше знаменателя, и составь их последовательность. Чему равен третий член полученной последовательности? Пятый член?
- 7** Первый и второй члены последовательности равны 1, а каждый из остальных членов равен сумме двух своих предыдущих членов. Чему равен третий член этой последовательности? Пятый член? Восьмой член?

**1, 1, 2, 3, 5, 8,
13, 21, 34, 55**

Последовательность, некоторые из первых членов которой перечислены здесь, была изобретена итальянским математиком 13-го века

Леонардо Фибоначчи.

Попробуй выяснить, по какому правилу составлена эта последовательность, и напиши, какой следующий член последовательности.

8

Установи закономерность и назови пропущенные члены последовательности:

а) 0, 1, 2, , 4, 5, , 7, ... б) 0, -2, -4, , -8, , -12, ...

в) 1, 4, 9, 16, , 36, , 64, ... г) $\frac{1}{2}$, , $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, , $\frac{1}{8}$, ...

д) а, б, а, б, а, , а, б, , б, ... е) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, , $\frac{5}{6}$, , $\frac{7}{8}$, ...

ж) ■ △ □ ▲ ■ △ □ ▲ ■ _ _ ▲

9

Составь две такие периодические последовательности, первыми тремя членами которых являются с, d, с.

10

Продолжи периодическую последовательность 1, 0, 2, 1, ... (представь несколько вариантов продолжения).

11

Сумма каждых трех соседних членов последовательности 3, 7, 1, ... равна одному и тому же числу. Чему равен: а) двенадцатый член этой последовательности? б) двадцатый член?

12

Цифровые электронные часы показывают текущее время с 00:00 до 23:59. Последовательность показаний часов является периодической. Со скольких членов состоит период этой последовательности?

13

Сотрудник охранной службы Гоги дежурит каждый третий день. Первый раз он дежурил в понедельник. Составь последовательность дней дежурства Гоги. Является ли эта последовательность периодической? Какой у нее период?

14

Запиши остатки, полученные путем деления первых десяти натуральных чисел на 6.
а) Продолжи эту последовательность.
б) Чему равен четырнадцатый член последовательности? Двадцатый член? Сотый член?
в) Является ли полученная последовательность периодической?
г) Какой у нее период?
д) Как изменится ответ, если мы возьмем 11 вместо 6? Какие-нибудь другие натуральные числа?

15

На какую цифру закончится запись числа 2^{100} .

16

Сумма каждых трех соседних членов последовательности 2, 5, ... равна одному и тому же числу. Какое число является: а) десятым членом этой последовательности? б) сотым членом?

17

Первый член последовательности равен 5. Каждый последующий член получается путем умножения предыдущего члена на 2. Сколько членов этой последовательности будет меньше 1000?

18 Диапазон распределения нечетных членов последовательности чисел равен 17, а диапазон распределения четных членов равен 13. Какое наименьшее число может быть диапазоном распределения этой последовательности?

19 Сумма двух чисел равна 45, вместе с тем, 16% одного числа равно 20% другого числа. Найди эти числа.

20 Какой процент воды содержался в 10 кг сырых грибов, если после сушки было получено 1,5 кг сухих грибов, содержащих 20% воды.

21 Сколько кг сухофруктов получится из 40 кг яблок, если яблоки содержат 80% воды, а сухофрукты содержат 20% воды.



22 Вычисли:

а) $\frac{27^2 - 13^2}{27^2 + 9 \times 39}$; б) $\frac{36^2 - 14^2}{36^2 - 18 \times 28}$.

23 Саломе на 10 лет моложе Гиги и через 2 года будет в 3 раза моложе его. Сколько лет Саломе?

24 Когда отцу Гелы был 31 год, Геле было 8 лет. Сейчас отец Гелы в 2 раза старше Гелы. Сколько лет Геле?

Ну-ка, попробуй!

- 1) Последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n$ содержит 11 чисел, кратных 7. Найди наименьшие возможные и наибольшие возможные значения n .
- 2) Найди остаток, полученный делением числа 3100 на 10.

4.18 Арифметическая прогрессия



Цель

Уметь:

1. Распознавать последовательность с постоянным шагом;
2. Находить разность (шаг) и неизвестные члены прогрессии.

В этом параграфе мы рассмотрим последовательности, которые лучше всего иллюстрируют одну очень важную закономерность. Начнем с примеров.

Пример 1. В нижеприведенной таблице показано движение денег на личном счете вкладчика.

Дата	Доход	Расход	Остаток
22/12/2018		590	10
25/01/2019	50		60
24/02/2019	50		110
25/03/2019	50		160
25/04/2019	50		210
26/05/2019	50		260
25/06/2019	50		310

Из таблицы видно, что в декабре со счета было снято 590 лари, после чего на счету осталось 10 лари. В конце каждого следующего месяца на счет зачислялась одна и та же сумма (50 лари). Последний столбец таблицы показывает суммы, накопленные на счетах в результате зачислений. Записи в этом столбце следующие: к 10 добавили 50 - получилось 60, к 60 добавили 50 - получилось 110 и т.д. до 310.

Если предположим, что в будущем увеличение суммы будет продолжаться с той же закономерностью, мы получим последовательность:

10, 60, 110, 160, 210, 260, 310, 360, 410, ...

Эта последовательность точно описывает состояние личного счета вкладчика до тех пор, пока вкладчик продолжает зачисления таким способом.

Пример 2. Хлебная печь работает на дизельном топливе. Чтобы не нарушился процесс выпечки, обязательно необходимо следить за запасом топлива. Это легко сделать, если знать начальный запас топлива и его ежедневный расход. Допустим, первоначальный запас топлива составлял 1000 литров, а ежедневный расход - 80 литров. Тогда после одного дня работы останется $1000 - 80 = 920$ литров топлива, через два дня - $920 - 80 = 840$ л, а через три дня - $840 - 80 = 760$ л и т. д., пока запас не будет исчерпан (или пополнен).

Рассмотрим последовательность чисел

1000, 920, 840, 760, 680, ...

Члены этой последовательности отражают ежедневное изменение запаса топлива. Первый член последовательности равен 1000, а каждый следующий член получается путем вычитания 80 от предыдущего члена, или добавления (-80).

В рассмотренных примерах в обеих последовательностях выявляется одинаковая

закономерность. Последовательность, составленная по такой закономерности, называется **арифметической прогрессией**.

Арифметическая прогрессия - это такая последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, получается добавлением одного и того же числа к предыдущему члену. Это число называется **разностью** или **шагом** прогрессии.

Из следующих последовательностей каждая является арифметической прогрессией:

- 1, 2, 3, 4, 5, ... (Шаг прогрессии равен 1);
- -2, -4, -6, -8, ... (Шаг прогрессии равен (-2));
- 3, 3, 3, 3, 3, ... (Шаг прогрессии равен 0);
- $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \dots$ (Шаг прогрессии равен $\frac{1}{6}$).

Если мы знаем какой-либо член прогрессии и хотим найти его следующий член, к данному члену надо прибавить шаг арифметической прогрессии.

Если мы знаем какой-либо член прогрессии и хотим найти его предыдущий член, из данного члена надо вычесть шаг арифметической прогрессии.

Для вычисления шага прогрессии надо найти разность между двумя ее соседними членами.

Ответь на вопросы

1. Какая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Что такое шаг (разность) арифметической прогрессии?
3. Как найти шаг арифметической прогрессии, если известны два соседних члена?
4. Как найти член арифметической прогрессии, если знаем другой член и шаг прогрессии?

Упражнения

1. Найди первые семь членов арифметической прогрессии, если:
 - а) Первый член прогрессии равен 4, а шаг - 3;
 - б) Первый член прогрессии равен 9,1, а шаг - (-0,3);
 - в) Второй член прогрессии равен 6, а шаг - 2;
 - г) Третий член прогрессии равен 4,5, а шаг - (-1,5);

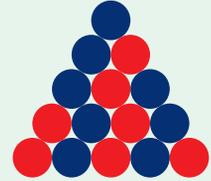
2

Пятый член арифметической прогрессии равен 5,25.

- а) Найди четвертый член, если шаг прогрессии $\frac{1}{2}$;
 б) Найди второй член, если шаг прогрессии (-3,75);
 в) Найди седьмой член, если шаг прогрессии $(-\frac{1}{12})$;
 г) Найди восьмой член, если шаг прогрессии $\frac{3}{4}$.

3

Сколько мячей будет сверху в десятом ряду, если продолжить данную последовательность мячей? Сколько мячей окажется в всех десяти рядах?



4

Михо забивает в пол гвозди длиной 15 см. При каждом ударе молотка гвоздь входит в пол на 6 мм.

- а) После скольких ударов гвоздь войдет до конца?
 б) Будет ли гвоздь торчать из пола на 4 см при каком-либо ударе?

5

Третий член прогрессии равен 2. Найди:

- а) 99-ый член, если шаг прогрессии равен $\frac{1}{5}$;
 б) 102-ый член, если шаг прогрессии равен $1\frac{1}{2}$;
 в) 101-ый член, если шаг прогрессии равен $(-\frac{2}{3})$;
 г) 98-ой член, если шаг прогрессии равен (-2,5).

6

Даны некоторые из первых семи членов арифметической прогрессии. Найди шаг прогрессии и остальные члены:

- а)

2	5	8				
---	---	---	--	--	--	--

;
- б)

10	7					
----	---	--	--	--	--	--

;
- в)

		1,7	2,6			
--	--	-----	-----	--	--	--

;
- г)

	5		-1			
--	---	--	----	--	--	--

;
- д)

9,1			3,1			
-----	--	--	-----	--	--	--

;
- е)

			$2\frac{1}{3}$	3,5		
--	--	--	----------------	-----	--	--

.

7

Чему равен шаг прогрессии и шестой член, если:

- а) Первый член прогрессии равен 2, а второй член — 4?
 б) Второй член прогрессии равен 11, а третий член — 8?
 в) Третий член прогрессии равен 6,7, а пятый член — $5\frac{1}{2}$?
 г) Пятый член прогрессии равен $(-5\frac{1}{6})$ — а седьмой член (-3,5)?
 д) Восемнадцатый член прогрессии равен 2, а девятнадцатый член — 7?

- 8** Найди шаг и первый член арифметической прогрессии, если:
- а) третий член прогрессии равен (-2) , а четвертый член -4 ;
 - б) четвертый член прогрессии равен 2 , а шестой член (-4) ;
 - в) второй член прогрессии равен $(-3,8)$, а пятый член $(-3\frac{1}{2})$;
 - г) пятый член прогрессии равен $(-3,5)$, а седьмой член (-5) .
- 9** Чему равен шаг арифметической прогрессии, в которой:
- а) двадцатый член равен (-12) , а двадцать первый член -4 ?
 - б) 99-ый член равен 2 , а 100-ый член (-4) ?
 - в) 1000-ый член равен (-3) , а 102-ой член (-5) ?
 - г) 90-ый член равен $6,5$, а 95-ый член -5 ?
- 10** У фирмы долг $1\ 667\ 000$ лари. Она выплачивает ежемесячно $111\ 000$ лари долга. Через сколько месяцев у фирмы останется долг 2000 лари?
- 11** На одном складе 320 т картофеля, на втором -250 тонн. Из первого склада ежедневно вывозят 15 т картофеля, из второго -10 т. Через сколько дней на обоих складах останется одинаковое количество картофеля?
- 12** В дождливый сезон бамбук растет быстро и равномерно. Во вторник длина бамбука была 1 м, в пятницу $-2,5$ м. Какой длины будет бамбук в воскресенье?
- 13** Является ли число 9 членом прогрессии, в которой
- а) первый член $4,5$, а шаг $-1,5$?
 - б) пятый член 13 , а шаг -2 ?
 - в) первый член (-1) , а шаг -3 ?
 - г) третий член равен 21 , а шестой член -12 ?
- 14** Первый член арифметической прогрессии равен (-11) , а шаг -2 .
- а) Сколько отрицательных членов в этой прогрессии?
 - б) Найди первый отрицательный член прогрессии.
- 15** Первый член арифметической прогрессии равен 19 , а шаг (-3) .
- а) Сколько положительных членов прогрессии?
 - б) Найди первый отрицательный член прогрессии.

16 Обоснуй что второй и каждый следующий член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому его соседних членов.

17 Вычисли сумму натуральных чисел с 1 до 99.

18 Возможно ли, чтобы арифметическая прогрессия была последовательностью, в которой:

а) Первый член - 5, третий член - 9, четвертый член - 10?

б) Шестой член (-2), девятый член - (-8), а одиннадцатый член - (-12)?

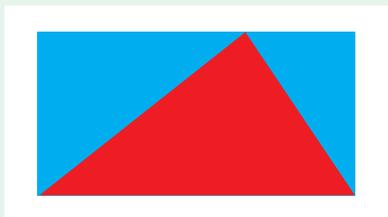
19 Даны два из первых девяти членов периодической прогрессии. Найди остальные члены, если известно, что период прогрессии состоит из двух членов?



20 Первый член прогрессии 3, а второй — 6. Чему равен 11-ый член, если известно, что сумма любого члена и следующих двух членов этой прогрессии одно и то же число?

21 Первый член прогрессии 3, а второй — 6. Чему равен 11-ый член, если известно, что сумма любого члена и следующих двух членов этой прогрессии одно и то же число?

22 По чертежу установи, сколько процентов прямоугольника закрашено красным.



23 Разложи на множители:

а) $xy^4 - y^4 + xy^3 - y^3$;

б) $ab^3 - b^3 + ab^2 - b^2$.

24 Вычисли значение выражения:

а) $(8x-1)(8x+1) - (16x-3)(4x+1)$, когда $x=0,3$;

б) $(6a-1)(6a+1) - (12a-5)(3a+1)$, когда $a=0,2$.

Обзор IV главы

Что мы изучили в этой главе?

- Нахождение числового значения выражения с переменной.
- Основные тождества алгебры.
- Натуральную степень числа и ее свойства.
- Действия над одночленами и многочленами.
- Формулы сокращенного умножения.
- Упрощение выражения с переменной.
- Использование разложения многочлена на множители в тождественных преобразованиях и вычислениях выражения.
- Тождественное преобразование уравнения и поиск решения.
- Метод решения линейного уравнения.
- Алгебраический метод решения задачи.
- Периодическую и арифметическую последовательности.

Ответ на вопросы

- Как найти числовое значение выражения с переменной?
- Какая формула выражает зависимость между пройденным расстоянием, скоростью и временем?
- Какие свойства равенства используются для доказательства тождества?
- Какие члены выражения с переменной называются подобными членами?
- Как сложить подобные члены?
- Как умножить одночлен на многочлен?
- Как умножить многочлен на многочлен?
- Как вычислить степень одночлена?
- Как вычислить степень многочлена?
- Какие формулы сокращенного умножения ты знаешь?
- Как проверить, является ли данное число решением уравнения?
- Какие действия надо провести для решения линейного уравнения?
- Какие этапы подразумевает алгебраический метод решения задачи?
- По какому правилу составлена последовательность Фибоначчи?
- Что такое период последовательности?
- Как вычислить шаг арифметической прогрессии?
- Какая числовая последовательность называется арифметической прогрессией?
- Что такое шаг арифметической прогрессии?

Выбери слово в правом столбце для предложения в левом столбце.

1. Разность следующего и предыдущего члена арифметической прогрессии называется прогрессии	многочленом
2. Равенство, которое верно для любого допустимого значения переменной называется	решением
3. Значение переменной, для которого уравнение превращается в правильное числовое равенство, называется уравнения.	шагом
4. В выражении $5a - 3b + 2a$, $5a$ и $2a$ члены.	тождественным
5. Алгебраическая сумма одночленов называется	подобные
	тождеством

Упражнения

1

Найди значение выражения:

а) $\frac{4}{5} \times \left(5\frac{1}{4} - 7\frac{1}{3}\right) - \frac{5}{6}$; б) $8\frac{1}{5} + \frac{3}{17} \times \left(2\frac{1}{5} - 3\frac{1}{3}\right)$; в) $8,5 - \frac{3}{7} \times \left(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2}\right)$;
 г) $86:17,2 - 7,2 \times \frac{25}{72}$; д) $1,27:2,5 + 9,2 \times \frac{1}{460}$; е) $81:7,5 - 3,8:\frac{19}{75}$.

2

a , b и c - отрицательные числа. Сравни с 0 значение выражения:

а) $ab - 3c$; б) $3ab - 2c$; в) $2ab + 3c^2$; г) $3ab - 2c^3$; д) $-3ab + 2c^3$.

3

Представь одночлен в стандартном виде и установи его степень:

а) $3ab^2a$; б) $1,2a^2b^3ca^3b$; в) $2xy^2z^3x^5y$; г) $4(x^3y)^2 \times 1,5xy$.

4

Представь многочлен в стандартном виде

а) $2x - x^2 - 5 - (1 - 2x)^2$; б) $24n - (3n)^2 + (n - 1)^2$;
 в) $2x + (2x - 4)(2x + 4)$; г) $14 - (x - 11)(x + 11)$;
 д) $(a + 2)(a - 4) + 16a^2 - 3a + 4$; е) $(x^3 - 1)(x^2 - 1)$.

5

Представь в виде произведения:

а) $15x + 3x^2 - 6x^3$; б) $4(x - y)^2 - x + y$;
 в) $3(x - y) - (y - x)^2$; г) $a(n - 2) - b(2 - n) + 6(n - 2)$;
 д) $8a^3 - 32a$; е) $-10xy^2 - 20x^2y^2 - 15xy$;
 ж) $(a - b)^3 - (b - a)^2$; з) $2(a - b)^2 - (a^2 - b^2)$;
 и) $2(a - b)^2 + (a^2 - b^2)$; к) $x + x^2 - x^3 - x^4$;
 л) $x^2 + xy - 2x - 2y$; м) $x^2 + 3xy + 2y^2$;
 н) $a^3 - x^3y^3$; о) $a^3 - 27$;
 п) $(m^2 - 2mp)^2 - p^4$; р) $(x^2 + 25)^2 - 100x^2$.

6 Вычисли значение выражения:

а) $7,3 \times 10,5 + 7,3 \times 15 + 2,7 \times 10,5 + 15 \times 2,7$;

б) $19,9 \times 18 - 19,9 \times 16 + 30,1 \times 18 - 30,1 \times 16$;

в) $\frac{638^2 - 362^2}{1500}$; г) $\frac{94^2 - 51^2}{65^2 \cdot 22^2}$;

г) $\left(\frac{1}{3}b + a\right)\left(a - \frac{1}{3}b\right) - (b^2 - a^2)$, когда $b = -0,3$, $a = -1$.

7 Сократи дробь:

а) $\frac{ma - mb}{m^2}$; б) $\frac{8a^2 - 2ab}{2a^2b}$; в) $\frac{x^2 - a^2}{x + a}$; г) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$.

8 Сравни количества, данные в А и В столбцах.

- Если количество, данное в ячейке столбца А больше количества, данного в соответствующей ячейке столбца В, выбери ответ а).
- Если количество, данное в ячейке столбца В больше количества, данного в соответствующей ячейке столбца А, выбери ответ б).
- Если количества, данные в ячейках, равны, выбери ответ в).
- Если данная информация не достаточна для установления того, какое количество больше, выбери ответ г)

	А	В	Ответы
1	$795 \times 0,85$	$795 : 0,85$	а) б) в) г)
2	$256 : (-1,25)$	$256 \times (-1,25)$	а) б) в) г)
3	$-8,75 \times 0,95$	$-8,75 : 0,95$	а) б) в) г)
4	$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) : 25$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \times 25$	а) б) в) г)
5	$607 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$	$607 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$	а) б) в) г)
6	$804 \times \left(-\frac{1}{27}\right)$	$804 : \left(-\frac{1}{27}\right)$	а) б) в) г)
7	$(x-1)^2$	$(x+1)^2$	а) б) в) г)
8	x	-1	а) б) в) г)
9	$x+1$	x	а) б) в) г)
10	$(x+1)(x-1)$	$(x+2)(x-2)$	а) б) в) г)

9 Реши уравнение:

а) $9x - 23 = 5x - 11$; б) $\frac{11x}{7} = \frac{2-x}{5}$; в) $\frac{16-x}{3} = \frac{3x}{5}$; г) $\frac{1}{2}x : 0,2 = 0,4$;

д) $5x + (3x + 70) = 35$; е) $8a - (7a + 8) = 9$; ж) $\frac{6x+7}{7} - 3 = \frac{5x-3}{8}$.

з) $\frac{x-4}{5} = 9 - \frac{2x-4}{9}$; и) $10 - \frac{3x-1}{2} = \frac{6x+3}{11}$; к) $\frac{4x-3}{2} - \frac{5-2x}{3} - \frac{3x-4}{3} = 5$.

10 Опиши закономерность и вычисли пропущенные члены в следующих последовательностях::

- а) 2 4 5 7 ?; б) 1 3 5 7 ?; в) 0 1 3 6 ?; г) 20 19 17 14 ?;
д) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$? $\frac{5}{6}$; е) 2 4 8 ? 32; ж) 1 2 2 4 3 6 ? ?; з) 1 3 7 15 ?.

11 Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией? Чему равен шаг?

- а) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$... б) 1 0 1 0 1 ... в) 5 10 15 20 ... г) 1 2 3 0 ...

12 Третий член арифметической прогрессии - 0, а четвертый — 4. Чему равен первый член этой прогрессии?

13 Пятый член прогрессии - 10, а седьмой — 6. Чему равен восьмой член этой прогрессии?

14 Сумма каждых трех последовательных членов прогрессии 3, 5, 0, ... равна 8.

- а) Чему равен четвертый член этой прогрессии?
б) Чему равен десятый член этой прогрессии?
в) Какой шаг у этой прогрессии?

15 Зависимость между значениями температур, измеренных по шкале Цельсия и Фаренгейта, определяется формулой $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, где C - это температура, измеренная по шкале Цельсия в градусах, а F - по шкале фаренгейта.

- а) Какова температура по Фаренгейту, если по Цельсию она равна 0?
б) Какова температура по Цельсию, если по Фаренгейту она равна +50?

16 Для вычисления суммы, накопленной на банковском счету, используется сложная формула $M_n = M(1 + \frac{p}{100})^n$, где M - количество суммы, внесенной на банковский счет, p - ежегодная процентная ставка, а n - количество лет, за которое сумма накоплена.

- а) Какую сумму накопит Шорена за два года, если она внесла на счет 400 лари, процентная ставка равна 10%?
б) Какую сумму внес Гия в банк, если при ежегодной процентной ставке 10%, через 2 года на его счету стало 121 лари?

17 При ссуде денег используется т.н. простая формула процента: если надо ссудить сумму M под $p\%$, тогда через n месяцев должник должен вернуть $M_n = M(1 + \frac{np}{100})$ сумму.

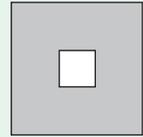
- а) Какую сумму должен вернуть должник в случае ссуды под 5% через четыре месяца, если он взял в долг 100\$?

б) Ссуду под какой процент взял Ваню, если через 5 месяцев вместо взятых в долг 1000\$ ему надо вернуть 1500\$?

- 18** Найди дробь, знаменатель которой на 2 больше числителя, и после увеличения каждого из них на один получается $\frac{1}{2}$.
- 19** В школьную секцию волейбола ходит 36 учеников. Количество девочек - в 2 раза больше количества мальчиков. Сколько девочек ходит в секцию волейбола?
- 20** Туристы вышли в 10 часов утра на катере по течению реки, 3 часа отдохнули на берегу и вернулись в 3 часа дня. Скорость течения реки - 3 км/ч, а катера 18 км/ч. На какое расстояние от пристани они удалились?
- 21** В трех седьмых классах 25 отличников. В 7^2 классе - на 3 отличника больше, чем в 7^1 . А в 7^3 классе - на 4 отличника больше, чем в 7^2 . Сколько отличников в каждом классе?
- 22** Дорога от А до В сначала идет в гору, затем вниз и в конце - горизонтально. Вся длина этой дороги - 370 км. Установи скорость движущейся по этой дороге машины на каждом участке, если известно, что в гору она прошла на 6 км меньше, а вниз - на 8 км больше, чем на горизонтальной дороге. При этом, машина двигалась в гору 1 час, вниз - 2 часа, и по горизонтальной дороге - 3 часа.
- 23** Расстояние от города А до В по морю на 40 км короче, чем по прямой дороге. Корабль проходит это расстояние за 9 часов и 36 минут, а автобус - за 7 часов. Скорость корабля на 15 км/ч меньше скорости автобуса. Вычисли скорость каждого из них.
- 24** Расстояние между двумя станциями поезд проходит за 1 час 20 минут. Если машинист увеличит скорость поезда на 3 км/ч, тогда поезд то же расстояние пройдет на 5 минут быстрее. Вычисли расстояние между станциями.
- 25** Лодка плыла по течению реки 2,4 часа, а против течения - 3,2 часа. Расстояние, пройденное по течению реки на 13,2 км больше, чем — против течения реки, Вычисли скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 1,5 км/ч.
- 26** По течению реки катер прошел расстояние от А пункта до пункта В на 1 час 20 минут быстрее, чем от В до А. Скорость течения 3 км/ч, а катера - 15 км/ч. Вычисли расстояние между пунктами А и В.
- 27** Периметр равнобедренного треугольника равен 58 см. Длина одной стороны составляет $\frac{5}{12}$ части второй стороны.

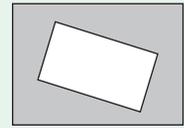
28

Напиши формулу для вычисления затемненной площади фигуры, если сторона большого квадрата — a см, а малого квадрата — b см.



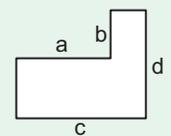
29

Напиши формулу для вычисления затемненной площади фигуры, если длина большого прямоугольника — a см, ширина — 9 см, а длина малого прямоугольника b см, ширина — 4 см.



30

Напиши формулы для вычисления площади и периметра фигуры, данной на чертеже.



31

Вставь пропущенные одночлены так, чтоб получить тождество:

а) $a^3 + \dots + 64 = (\dots)^3$;

б) $8 + \dots + \dots = (\dots + y)^3$;

в) $c^3 + \dots + 27 = (\dots)^3$;

г) $8a^3 - \dots - \dots = (\dots - b)^3$.

32

Сократи дробь:

а) $\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$;

б) $\frac{11a^2b - ab^2}{11a^3 - 11ab^2 - a^2b + b^3}$.

в) $\frac{a^8 - b^8}{a^4 - b^4}$;

г) $\frac{ac + b^2 + bc + ab}{bd + ak + ad + bk}$.

33

n -ый член числовой последовательности обозначим a_n . Вычисли первые три члена последовательности и определи, которая последовательность является арифметической прогрессией, если:

а) $a_n = 2n - 1$;

б) $a_n = 2^n$;

в) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

г) $a_n = (n-1)(n+1)$.

34

Составь последовательность из последних цифр членов последовательности $a_n = 7^n$. Какую закономерность ты видишь? Каков период этой последовательности? На какую цифру закончится 7^{11} ?

35

Средний рост девочек класса — 165 см, средний рост мальчиков — 162 см, а средний рост всех учеников класса — 164 см. Кого в классе больше — девочек или мальчиков? Во сколько раз больше?

Ну-ка попробуй

Реши задачу алгебраическим методом.

Дорога от дома Сандро до школы состоит из подъема и спуска. Если Сандро по подъему будет идти со скоростью 4 км/ч, а на спуске — 6 км/ч, тогда он дойдет до школы и вернется обратно за 50 мин. Какое расстояние от дома Сандро до школы?

Тест №4

- 1** У Шалвы было n лари. На половину из этой суммы он приобрел книги, 5 лари отдал сестре, а на остальную сумму купил мяч. Сколько стоит мяч?
а) $(n-5)$ лари; б) $\left(\frac{n}{2} + 5\right)$ лари; в) $\left(\frac{n}{2} - 5\right)$ лари; г) $(n-5)$ лари.
- 2** Если число a на 5 больше числа b , тогда
а) $a=b-5$; б) $a>b+5$; в) $a+5=b$; г) $a=b+5$.
- 3** Если удвоенное число a в 3 раза больше числа b , тогда
а) $2a=3b$; б) $a=6b$; в) $3a=2b$; г) $2a=b+3$.
- 4** Если одна тетрадь стоит 40 тетри, а одна ручка — 20 тетри, тогда m количество тетрадей и n количество ручек стоит:
а) $60(m+n)$ тетри; б) $(40m+20n)$ тетри;
в) $(20m+40n)$ тетри г) 60 тетри.
- 5** 1 м ткани стоил n лари. После скидки на 20% за 10м ткани заплатили:
а) $200n$ лари; б) $8n$ лари; в) $30n$ лари; г) $10(n-20)$ лари.
- 6** $a^2 - a(a-ab) =$
а) a^2b ; б) ab ; в) $2a^2$; г) $2a^2 - b$.
- 7** Выражение, тождественно равно выражению $7(a-2b)+5(2a+b)$:
а) $7a-b$; б) $17a-9b$; в) $17a^2+19$; г) $10a+9b$.
- 8** Выражение, тождественно равно выражению $(a-3)(a+3)$:
а) a^2-9 ; б) a^2-6a ; в) a^2-6a+9 ; г) $a+9$.
- 9** Если $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{8}$, тогда $6x-8y =$
а) -1; б) 1; в) -2; г) 2.
- 10** Если $x=-0,4$, $y=-0,8$, тогда $xy-1 =$
а) 2,2; б) 0,31; в) -1,32; г) -0,68.
- 11** Одно число больше второго на 5, и меньше третьего на 11. Чему равно среднее арифметическое этих трех чисел, если наименьшее из них число $a-8$?
а) $a-8$; б) $2a+1$; в) $a-1$; г) $a+1$.
- 12** Если $6x-10,2=0$, тогда $x =$
а) -8; б) 2; в) -2; г) 1,7.
- 13** Решение уравнения $5x-4,5=3x+2,5$:
а) 2; б) 0; в) 3,5; г) -2,5.

- 14 Решение уравнения $2x - (6x - 5) = 45$
а) 4; б) -4; в) 0; г) -10.
- 15 Решение уравнения $10x = 5(2x + 3)$:
а) 3; б) 2; в) -2; г) нет решения.
- 16 Решение уравнения $x^2 - 2x + 1 = 0$.
а) 1; б) 2; в) 0 и 1; г) 0.
- 17 Решение уравнения $\frac{5x}{2} + \frac{x - 3}{3} = 1 + \frac{x - 5}{6}$.
а) -15; б) $\frac{7}{16}$; в) $2\frac{2}{5}$; г) -0,36.
- 18 Отрезок длиной 51 сантиметр разделили на два отрезка в соотношении 8:9, длина наименьшего из них:
а) 20см; б) 21см; в) 24см; г) 27см.
- 19 $6,4^2 - 3,6^2 =$
а) 12; б) 10; в) 28; г) 2,8.
- 20 $17^2 + 34 \times 13 + 13^2 =$
а) 900; б) 16; в) 130; г) 289.
- 21 Сумма трех последовательных четных чисел 54. Наименьшее из них:
а) 8; б) 12; в) 16; г) 20.
- 22 Сумма трех последовательных нечетных чисел 81. Сумма цифр наибольшего из них:
а) 7; б) 9; в) 11; г) 13.
- 23 Маме - 50 лет, сыну - 28 лет. Сколько лет назад мама была вдвое старше сына?
а) 22; б) 44; в) 6; г) 16;
- 24 m - четное число, а n - нечетное число. Которое из следующих чисел четное?
а) $m+n$; б) $2m+n$; в) $2(m+n)+1$; г) $3(m+n)+1$.
- 25 Из пунктов А и В навстречу друг другу выехало два автомобиля. После того, как через 30 минут они встретились, они продолжили путь с той же скоростью, и автомобиль, вышедший из пункта А, прибыл в пункт В через 10 минут. Через сколько минут прибудет в пункт А автомобиль, вышедший из пункта В?
а) 30 мин; б) 10 мин; в) 90 мин; г) 10/3 мин.

Это интересно!

Что такое алгоритм

Алгоритм - это последовательность действий, необходимых для достижения цели. Например, если вам утром нужно идти в школу, вы должны встать за час или полтора до выхода из дома (в зависимости от расстояния до школы и пользуетесь ли вы транспортом), сделать утреннюю зарядку, водные процедуры, одеться, позавтракать, взять портфель (подразумевается, что вы сложили его вечером) и пойти в школу.

Если вы посмотрите на список этих действий, то заметите, что их последовательность строго определена, то есть эти действия нельзя выполнять в другой последовательности (например, невозможно сначала сделать зарядку, а затем проснуться).

Невозможно выполнить какую-либо операцию в математике, если мы не знаем алгоритм, соответствующий этой операции. Возьмем, к примеру, алгоритм сложения дробей:

Чтобы сложить две дроби, нам нужно:

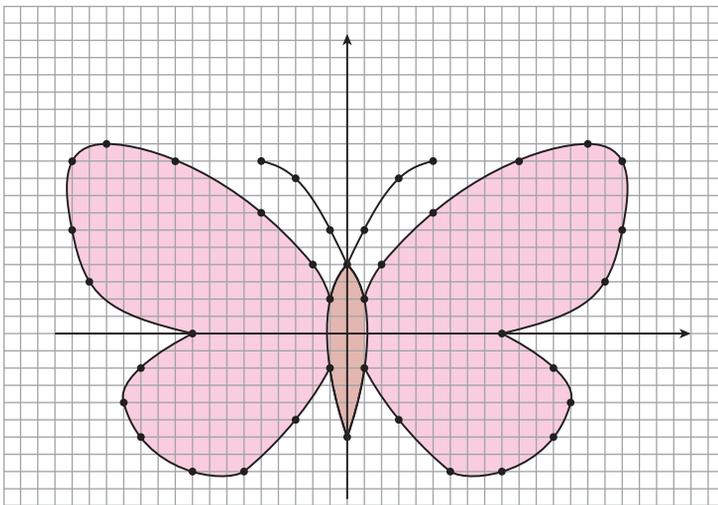
- а) Написать знак равенства перед суммой и провести вдоль нее линию дроби;
- б) Найти наименьшее общее кратное или общий знаменатель слагаемых;
- в) Записать общий знаменатель в знаменателе (то есть под проведенной линией);
- г) Разделить общий знаменатель на знаменатель первого слагаемого;
- д) Умножить числитель первого слагаемого на полученное частное;
- е) Разделить общий знаменатель на знаменатель второго слагаемого;
- ж) Умножить числитель второго слагаемого на полученное частное;
- з) Сложить числа, полученные после действий д) и ж);
- и) Записать полученную в правой части уравнения сумму на место числителя;
- к) Если полученная дробь сокращается, то ее надо сократить;
- л) Если полученная дробь неправильная, записываем ее как целое или смешанное число.

Как видите, даже такая простая операция, как сложение двух дробей, требует алгоритма из 11 действий. В свою очередь, выполнение действий в этом алгоритме требует знания соответствующих алгоритмов. Например, мы не можем выполнить действие б), если мы не знаем алгоритм нахождения наименьшего общего кратного, и мы не можем выполнить деление без знания алгоритма деления и так далее. Из приведенного выше примера можно сделать вывод, что невозможно выполнить математические операции без знания алгоритмов. Это не означает, что алгоритмы обязательно надо выучить наизусть. Это то же самое, что выучить наизусть алгоритм, чтобы ходить в школу. На самом деле, повторяя действия снова и снова, они становятся привычкой. Точно так же, как после частого повторения сложения дробей, решения задач алгебраическим методом или других математических действий, их алгоритм запоминается.

Глава 5. Система координат

В этой главе ты изучишь:

- ❖ Соответствие между точками плоскости и парами чисел;
- ❖ График зависимости между переменными;
- ❖ Распознавание и построение графика прямой пропорциональной зависимости;
- ❖ Запись параллельного переноса с помощью координат.



После изучения главы ты сможешь:

- ❖ Построить систему координат;
- ❖ Установить координаты точки, лежащей на плоскости;
- ❖ Находить точку на координатной плоскости с помощью пары чисел;
- ❖ Находить значение переменной по графику;
- ❖ Распознавать и построить график прямой пропорциональной зависимости;
- ❖ Установить координаты параллельного переноса;
- ❖ Находить координату точки, полученной при параллельном переносе.

Проект

«Создание эмблемы класса»



1. Посмотри на эмблемы, данные на рисунке и опиши, по какому принципу они построены;
2. Найди фото или рисунок разных эмблем и выбери среди них такие, которые получены с помощью параллельного переноса или осевой симметрии;
3. С помощью параллельного переноса и осевой симметрии создай эмблему своего класса;
4. Представь свой проект классу.

5.1 Координаты точки



Цель

Уметь:

1. Построить систему координат на плоскости;
2. Найти координаты точки.

Возможно ли с помощью чисел выразить положение точки на плоскости? Французский математик 17-ого века, Рене Декарт создал систему координат, которая дает возможность, указать положение точки на плоскости с помощью пары чисел.

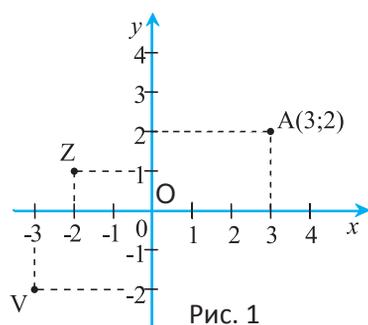


Рис. 1

Система координат состоит из двух перпендикулярных прямых, которые пересекают друг друга в начале системы (рис. 2). Начало координат обычно обозначают буквой O или так, как показано на этом чертеже к ней приписывают число 0 . Горизонтально направленная числовая прямая называется **осью абсцисс**, или осью Ox , а вертикальная прямая - **осью ординат**, или осью Oy .

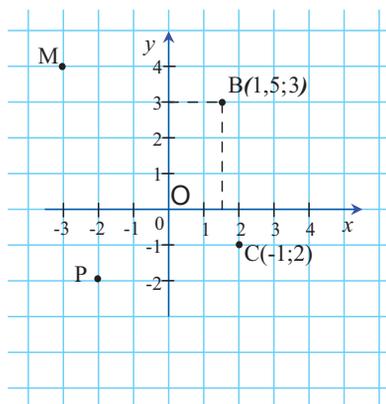


Рис. 2

Плоскость, на которой построена система координат, называется **координатной плоскостью**. На координатной плоскости возьмем точку A (рис.1). Из этой точки на координатные оси опустим перпендикуляры. Как видно из чертежа, основание перпендикуляра, опущенного на ось абсцисс совпало с точкой, координата которой 3 , а основание перпендикуляра, опущенного на ось ординат - с точкой, координата которой 2 . Пара чисел $(3;2)$ называется **координатами** точки A . При записи пары координат на первом месте всегда пишется координата основания перпендикуляра, опущенного на ось абсцисс. Она называется **x -координата** или **абсцисса** точки A . От нее точкой с запятой отделена вторая координата, которая представляет координату основания перпендикуляра, опущенного на ось ординат. Она называется **y -координатой**

или ординатой. Если необходимо, к точке можно приписать координаты, как это показано на 1-ом и 2-ом рисунке.

Систему координат удобно чертить на бумаге в клетку (рис. 2). При этом оси должны совпадать с линиями бумаги, а за единичный отрезок можно взять длину одной или нескольких клеток.

Построение системы координат на бумаге в клетку удобно и тем, что на ней легко найти координаты точки, так как опущенные на координатные оси перпендикуляры пройдут параллельно линиям клетки бумаги.

На 3-ем рисунке абсцисса точки A лежит на оси. Ее абсцисса (x -координата) равна 3 . Для нахождения ординаты (y -координаты) точки A , опустим перпендикуляр из точки A к

оси ординат. Он совпадает с отрезком OA , координата его основания на y -оси равна 0 . Значит, координаты точки A $(3;0)$.

Ордината всех точек, лежащих на оси абсцисс, равна нулю.

Таким же образом мы можем найти координаты точки лежащей на оси ординат, например, координаты точки B . Если из точки B опустим перпендикуляр к оси абсцисс, его основание совпадает с точкой O , поэтому абсцисса точки B равна 0 .

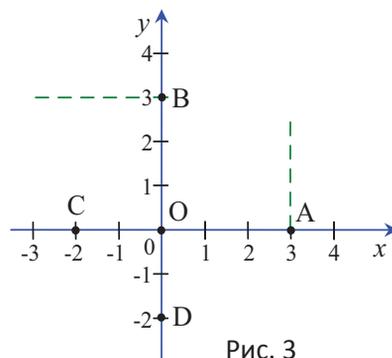


Рис. 3

Абсцисса всех точек, лежащих на оси ординат, равна нулю.

Ордината точки B совпадает с точкой, координата которой на y -оси равна 3 . Значит, координаты точки B $(0;3)$.

Так как точка O лежит на обеих осях, обе ее координаты равны 0 .

Координаты начала координатной системы $(0;0)$.

Что можно сказать о точках, лежащих на перпендикулярных к осям прямых?

Рассмотрим случай, когда через лежащую на оси абсцисс точку $(-3;0)$ проходит прямая a , перпендикулярная этой оси (рис. 4). Найдем координаты точек, лежащих на этой прямой.

Так как перпендикуляр, проведенный из любой точки прямой a к оси абсцисс пройдет через точку $(-3;0)$, абсциссы точек, лежащих на этой прямой, равны друг другу и абсциссе точки $(-3;0)$, или равны 3 .

Значит,

У точек, лежащих на прямой, перпендикулярной оси абсцисс, равные абсциссы.

Теперь рассмотрим случай, когда точки лежат на прямой, перпендикулярной оси ординат. Например, на Рис. 4 через точку, лежащую на оси ординат $(0;-2)$, проведена прямая b , перпендикулярная этой оси. Так как перпендикуляр, проведенный из любой точки прямой b к оси абсцисс пройдет через точку $(0;2)$, можно сказать, что ординаты точек, лежащих на прямой b , равны (-2) .

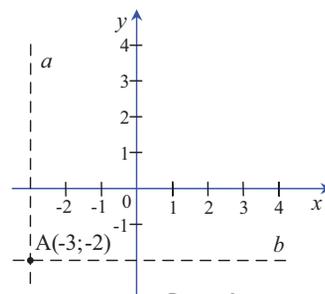


Рис. 4

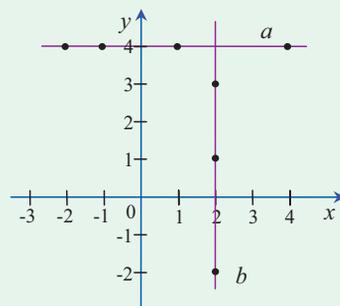
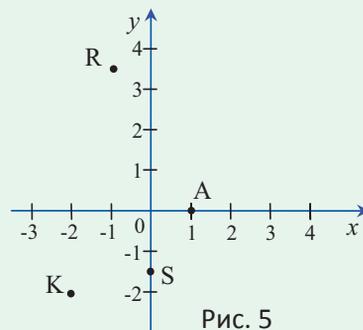
У точек, лежащих на прямой, перпендикулярной оси ординат, равные ординаты.

Ответ на вопросы

1. Как по другому называются ось Ox ? Oy ?
2. Какая координата пишется первой при записи координат в виде пары?
3. Как найти абсциссу точки? ординату?
4. Точка M лежит на оси ординат. Чему равна абсцисса этой точки?
5. Точка M лежит на оси Ox . Чему равна ордината этой точки?
6. Каковы координаты начала координат?
7. Какая координата равна у точек, лежащих на прямой, перпендикулярной оси абсцисс?
7. Какая координата равна у точек, лежащих на прямой, параллельной оси абсцисс?

Упражнения

- 1 По Рис. 1 найди координаты точек Z и V .
- 2 Посмотри на Рис. 2, на котором даны координаты точек B и C и попытайся, не проводя дополнительные линии, найти координаты точек M и P .
- 3 По Рис. 3 найди координаты точек C и D .
- 4 По Рис. 5 найди координаты точек A , K , S и R .
- 5 Абсцисса точки M , лежащей на прямой, перпендикулярной оси абсцисс, равна $1,5$. Найди абсциссу точки F , лежащей на той же прямой.
- 6 Абсцисса одной из точек, лежащих на прямой, перпендикулярной оси ординат, равна (-2) . Найди ординату точки W , лежащей на той же прямой.
- 7 Найди координаты точки пересечения прямых a и b на рис. 6.
- 8 Прямая l , перпендикулярная оси x и прямая m , перпендикулярная оси y , пересекаются в точке P . Абсцисса точки E , лежащей на прямой l , равна (-3) , а ордината точки G , лежащей на прямой m - 5 . Найди координаты точки P .



- 9 Обозначь на координатной плоскости точку, у которой:
а) абсцисса отрицательная, а ордината положительная;
б) и абсцисса, и ордината отрицательные.
- 10 Точка А лежит на прямой, перпендикулярной оси абсцисс, и пересекающей эту ось в точке (3,5; 0). Чему равна абсцисса точки А?
- 11 Точка К лежит на прямой, перпендикулярной оси ординат и пересекающей эту ось в точке (0; -3). Чему равна ордината точки К?
- 12 Координатами трех вершин квадрата ABCD являются: A(1; 2), B(1; 5), C(4; 5). Найди координаты вершины D.
- 13 Координатами трех вершин прямоугольника ABCD являются: A(-8; -4), B(-8; 0), C(-1; 0). Найди координаты вершины D.
- 14 Координатами двух вершин квадрата ABCD являются: A(-3; 5), B(-1; 5). Найди координаты вершин C и D. Рассмотрите все возможные случаи.
- 15 Координаты двух противоположных вершин квадрата:
а) (4;0) и (0;4);
б) (6;2) и (6;8).
Найди координаты остальных вершин.
- 16 110г соли растворили в 40г воды. Раствор какой концентрации получили?
- 17 К 2 л спиртового раствора с концентрацией 96% добавили 4л чистой воды. Раствор какой концентрации получили?



Проект

«Использование координат на практике»

Подготовь доклад, реферат или компьютерную презентацию.

5.2 Нахождение точки по ее координатам



Цель

Уметь:

1. Найти точку с помощью ее координат.
2. Определять положение фигуры на координатной плоскости.

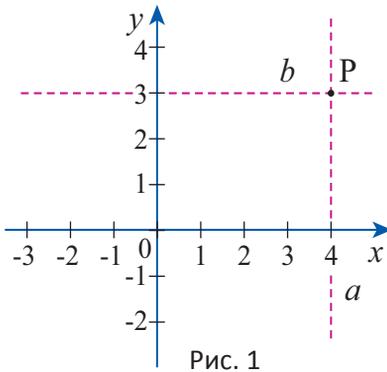


Рис. 1

Задача 1. Найдем на координатной плоскости такую точку, координаты которой $(4;3)$.

Решение. Все те точки, абсцисса которых равна 4, лежат на прямой a , а все те точки, ордината которых равна 3, лежат на прямой b (рис. 1). Поэтому точка их пересечения P , так как она лежит на обеих прямых, будет иметь абсциссу, равную 4 и ординату, равную 3.

Для нахождения точки с заданными координатами нужно:

1. Найти на оси абсцисс точку с заданной абсциссой и провести через нее прямую, перпендикулярную оси абсцисс.
2. Найти на оси ординат точку с заданной ординатой и провести через нее прямую, перпендикулярную оси ординат.
3. Точка пересечения построенных прямых будет искомой точкой.

С помощью координат можно определить и положение геометрических фигур.

Задача 2. Построим треугольник ABC , если координаты его вершин $A(2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 2)$.

Решение. С помощью координат найдем вершины треугольника и соединим их отрезками (рис. 2).

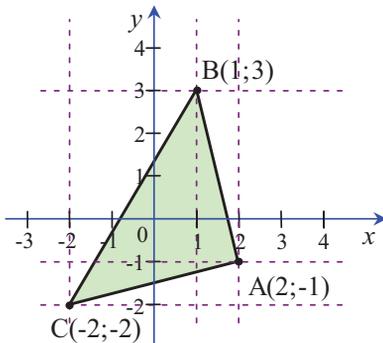


Рис. 2

Мы смогли построить треугольник с помощью трех пар чисел координат его вершин. Конечно, с помощью координат вершин можно построить и другие многоугольники. Таким образом, система координат дает возможность, записать и построить геометрические фигуры с помощью чисел, и в большинстве случаев установить их свойства. В будущем ты выучишь, как выразить разные математические объекты с помощью системы координат. Система координат связывает геометрию с другими отраслями математики. Метод координат - один из важных методов математики.

На третьем рисунке видно, что оси координат делят плоскость на четыре части. Эти части называют четвертями. Четверти пронумерованы римскими цифрами так, как показано на рис. 3.

Рассмотрим любую точку, лежащую в первой четверти. Проведем через нее перпендикулярные к осям абсцисс и ординат прямые.

На рисунке видно, что они пересекают ось в той части, где находятся положительные числа. Точки, лежащие в первой четверти имеют положительную абсциссу и положительную ординату. Подобными рассуждениями можно прийти к выводу, что точки, лежащие во второй четверти, имеют отрицательную абсциссу и положительную ординату.

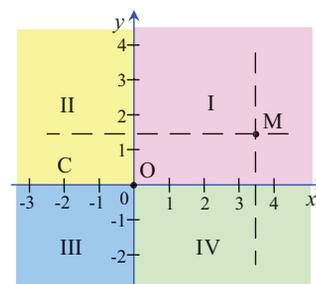


Рис. 3

Самостоятельно выясни, какие знаки у абсцисс и ординат точек, лежащих в третьей и четвертой четверти.

Ответ на вопросы

1. Как обозначить точку по ее координатам?
2. Как построить многоугольник по координатам вершин?
3. На какие части делит координатную плоскость система координат?
4. Какие свойства у точек, лежащих в каждой плоскости?

Упражнения

1. Прямая a , перпендикулярная оси абсцисс, пересекает ось абсцисс в точке $(0,5; 0)$, а прямая b , перпендикулярная оси ординат пересекает ось ординат в точке $(0;5)$. Найди координаты точки пересечения прямых a и b .
2. Точка $F(-2; 3)$ лежит на прямой, перпендикулярной оси ординат. Найди координаты точки пересечения этой прямой и оси ординат.
3. Через точку $A(-3; -2)$ проведены прямые a и b , перпендикулярные к осям абсцисс и ординат. Найди координаты точек пересечения с осями координат.
4. Обозначь на координатной плоскости точки с координатами:
а) $(-1; -2)$; б) $(-2; 1)$; в) $(3; -3)$; г) $(0; 1)$; д) $(4; 0)$.
5. Обозначь точки с координатами:
а) $(-2; 5)$; б) $(0; -3)$; в) $(-6; 0)$; г) $(1,5; -3,5)$; д) $(3\frac{1}{2}; -2\frac{1}{4})$.
6. Построй треугольник PQR , если его вершины $P(0; 0)$, $Q(1; 3)$, $C(4; 1)$.
7. Построй четырехугольник с вершинами: $K(1; 0)$, $L(3; 2)$, $M(5; 1)$, $N(3; 0)$.
8. Выясни, в какой четверти лежат точки, координаты которых:
а) $A(-3; -3)$; б) $B(-1; 1)$; в) $M(2; 1)$; г) $N(-3; 1)$; д) $E(-3; 0)$.
С помощью линейки проверь, какие три точки лежат на одной прямой.

- 9** Даны точки: $A(1;3)$, $B(-1;4)$, $D(7;-5)$, $N(0;6)$. Выясни, какие из них лежат: а) выше оси абсцисс? б) справа от оси ординат?
- 10** Точки P и Q имеют равные абсциссы, а их ординаты - противоположные числа. В какой четверти лежит точка Q , если точка P лежит в первой четверти?
- 11** Найди координаты точек, симметричных точке $A(3; 5)$ по отношению осей координат.
- 12** В какой четверти может лежать точка, произведение координат которой: а) положительное число? отрицательное число?
- 13** Построй прямую, проходящую через точки $A(-1; -1)$ и $B(5; 5)$. Как ты охарактеризуешь эту прямую? Чему равна абсцисса лежащей на этой прямой точки D , если ее ордината 7?
- 14** Построй прямую, проходящую через точку $A(-2; 2)$ и начало координат. Как ты охарактеризуешь эту прямую? Чему равна ордината лежащей на этой прямой точки, абсцисса которой -3?
- 15** На координатной плоскости даны точки $A(3; 5)$ и $B(1; 7)$. Найди координаты середины отрезка AB .
- 16** После 7 часов работы трактору, который вспахивает участок прямоугольной формы, осталось вспахать часть участка в 1,5 раза меньшей длины и в 3 раза меньшей ширины. За какое время трактор закончит вспахивать участок, если он продолжит работать с той же скоростью?
- 17** Найди двузначное число, сумма цифр которого 14. Если в записи этого числа поменять местами цифры, получим число на 36 больше, чем начальное.

Ну-ка попробуй

Расстояние от точки $A(a^2-10; 1-a)$, лежащей во второй четверти координатной плоскости, до оси ординат, равно 6. Вычисли координаты точки A .

Практическая работа (в парах)

Начерти систему координат.

- Построй прямоугольник, если известно, что координаты вершины A равны $(0;0)$ и две стороны прямоугольника перпендикулярны осям координат. Длина сторон прямоугольника равна 3 единичным отрезкам и 4 единичным отрезкам. Рассмотрите все возможные случаи.
- Сколько прямоугольников вы смогли построить?
- Вычислите периметр фигуры, полученной путем объединения всех прямоугольников.

5.3 График



Цель

Уметь:

1. Выразить зависимость между переменными с помощью графика;
2. Найти значение переменной с помощью графика.

Для представления зависимости между переменными до этих пор мы использовали таблицы и формулы. Теперь ознакомимся с представлением зависимости в виде построенной в системе координат линии: графика.

Задача 1. Зависимость количества всемирного населения и периода времени с 1970 года до 2005 года представлено таблицей:

t	0	5	10	15	20	25	30	35
N	3,91	4,21	4,52	4,86	5,22	5,61	6,03	6,49

Буквой N в таблице обозначено количество населения в миллиардах, а буквой t - годы, при этом 1970 год принят за 0.

Построим график, соответствующий этой зависимости.

Решение. Построим систему координат на оси абсцисс которой даны значения переменной t, на оси ординат - значения переменной N. Обозначим на ней точки, чьи координаты составлены соответствующими значениями переменных N и t. В нашем случае это точки: (0; 3,91), (5; 4,21), (10; 4,52), (15; 4,86), (20; 5,22), (25; 5,61), (30; 6,03) и (35; 6,49). Таким образом, мы построили точечную диаграмму (рис. 1), которая представляет зависимость между значениями переменных t и N, приведенных в таблице. Диаграмма дает возможность для каждого значения переменной t найти соответствующее значение переменной N.

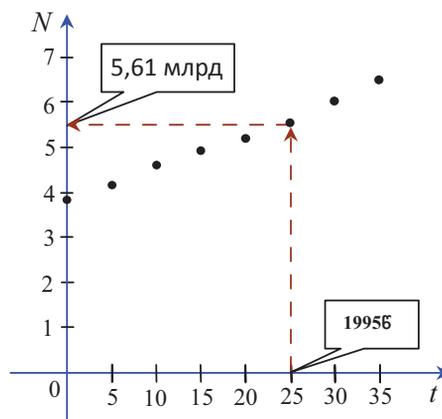


Рис. 1

С помощью построенной диаграммы найдем количество населения планеты в 1995 году, т.е. через 25 лет после 1970 года. Для этого проведем через точку оси абсцисс (t), координата которой 25, перпендикуляр до пересечения с одной из построенных точек, и с этой точки опустим перпендикуляр на ось ординат (N). Он опустится в точку, координата которой примерно 5,5 (Как мы помним из таблицы, ее точное значение 5,61). Значит, население планеты в 1995 году было примерно 5,5 миллиарда. Конечно, с помощью этой диаграммы невозможно найти значения переменной N для тех значений переменной t, которым не соответствует

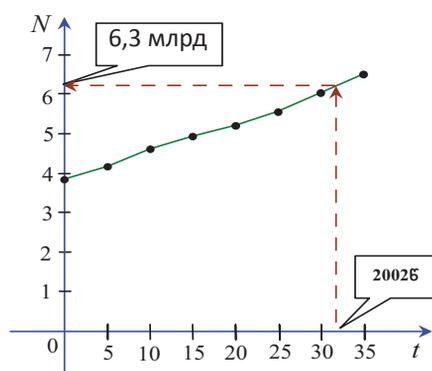


Рис. 2

ни одна точка на диаграмме. Поэтому, точки диаграммы тем ближе будут друг к другу и диаграмма тем точнее будет соответствовать зависимости между переменными N и t , чем больше значений переменной t будет участвовать в построении диаграммы. Например, диаграмма, построенная для каждого целого значения переменной t с 0 до 35, будет более точно представлять эту зависимость, чем построенная нами диаграмма. Если мы сможем построить диаграмму для всех значений переменной t , то точки диаграммы создадут линию, которая называется графиком зависимости переменной N от переменной t . С помощью графика возможно найти значения переменной N уже для всех значений переменной t .

Конечно, в нашем случае невозможно построить точки для всех значений переменной t , но можно построить ломаную, которая примерно представит график зависимости переменной N от t . Для этого соседние точки диаграммы соединим отрезками (рис. 2). Полученную ломаную (ее также называют линейной диаграммой) можно считать примерным представлением искомого графика. Это представление будет тем точнее, чем ближе будут друг к другу точки диаграммы.

С помощью линейной диаграммы можно найти значения переменной N даже для тех значений переменной t , которые не даны в таблице. Например, с помощью линейной диаграммы найдем количество населения планеты в 2002 год ($t = 32$). Для этого на оси абсцисс найдем точку, координата которой 32, проведем перпендикуляр до пересечения с графиком, и из точки пересечения опустим перпендикуляр на ось ординат. Как видно из рисунка 2, перпендикуляр опустится в точку, координата которой примерно 6,2. Отсюда мы можем сделать вывод, что в 2002 году на планете жило примерно 6,2 миллиарда человек (по статистическим данным, к 1 января 2002 года на планете жило примерно 6,212 миллиарда человек).

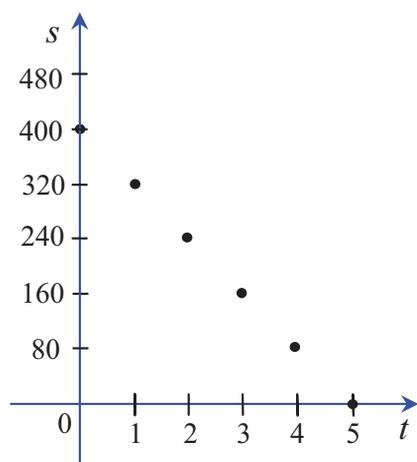


Рис. 3

В некоторых случаях вид графика можно установить точно. Например, рассмотрим следующий пример:

В некоторых случаях вид графика можно установить точно. Например, рассмотрим следующий пример:

Задача 2. Автомобиль находится на расстоянии 499 км от пункта назначения и начинает движение со скоростью 80 км/ч. Обозначим время, пройденное с

начала движения, буквой t , а расстояние до пункта назначения в километрах - буквой s . Построим график зависимости переменной s от t .

Решение. Подберем несколько значений переменной t , для каждого значения вычислим соответствующие значения переменной s и результат внесем в таблицу:

t	0	1	2	3	4	5
s	400	320	240	160	80	0

Так же, как и в предыдущем случае, для данных, приведенных в таблице, построим точечную диаграмму (рис. 3). Если присмотреться к этой диаграмме, то мы увидим, что все ее точки лежат на одной прямой. Поэтому для построения графика зависимости

между переменными s и t , достаточно соединить эти точки отрезками прямой (рис. 4).

Представленный на рис. 4 график точно отображает зависимость между переменными s и t , не только для значений переменной t , приведенных в таблице, но и для всех ее значений. Этим он отличается от точечной диаграммы, представленной на рисунке 2, которая лишь приблизительно отображает зависимость между переменными N и t .

С помощью графика можно найти значение переменной s для любого значения переменной t . Для этого нужно поступить так же, как в случае линейной диаграммы.

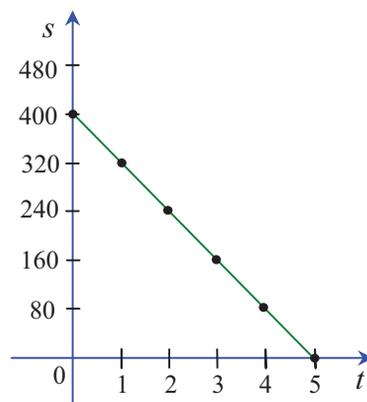


Рис. 4

Попробуй самостоятельно найти значения s с помощью графика, представленного на рисунке 4, когда $t = 2,5$. Затем, решив задачу 2, найди значение s для того же значения t и сравни полученные итоги.

Ответ на вопросы:

1. Как построить точечную и линейную диаграммы, представляющие зависимость между переменными?
2. Как вычислить значения переменной s с помощью точечной диаграммы?
3. Какие значения переменной можно вычислить с помощью точечной диаграммы?
4. Что такое график?
5. Как построить график, приблизительно представляющий зависимость между переменными?
6. Как вычислить приблизительное значение переменной s с помощью линейной диаграммы?
7. Возможно, ли чтобы линейная диаграмма точно совпадала с графиком?

Упражнения

1 Зависимость между переменными u и v задана следующей таблицей:

u	-1	0	1	2	3
v	2,5	3	2	1,5	1,5

С помощью таблицы построй точечную и линейную диаграмму.

- 2 Начерти и заполни таблицу по точечной диаграмме, данной на рисунке 5.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y							

Найди на диаграмме точку, которая соответствует наименьшему значению y . Сравни ее положение с положением других точек. Какой вывод можно сделать?

- 3 Начерти диаграмму, данную на рисунке 5, и построй соответствующую линейную диаграмму. С ее помощью найди приблизительное значение переменной y , когда $t = 2,3$.

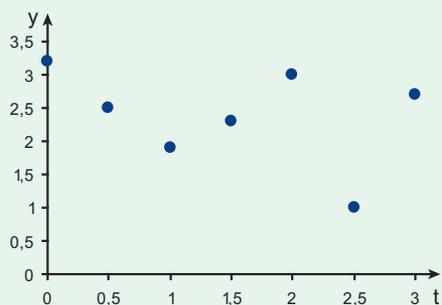


Рис. 5

- 4 Приведенная на рисунке 6 линейная диаграмма выражает зависимость между переменными Y и Z .

- а) Для каких значений переменной Y эта диаграмма показывает точное значение переменной Z ? Составь таблицу для этих значений переменной Z .
 б) С помощью диаграммы найди приблизительное значение переменной Z , когда $Y = -3$; $Y = 5$.

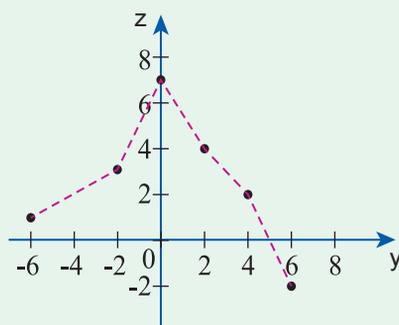


Рис. 6

- 5 На Новый год Гия купил несколько салютов по 50 тетри. Обозначим буквой n купленное количество салютов, а буквой A - потраченные деньги в лари.

n	0		3		7		9	
A		1		2,5		4		5

- а) Начерти и заполни таблицу;
 б) Выбери допустимые значения переменной n из следующих чисел: -3 ; $2,7$; 12 ; $10,5$;
 в) Выбери допустимые значения переменной A из следующих чисел: $0,5$; -3 ; $6,5$; 8 ; $9,2$;
 г) С помощью таблицы построй точечную и линейную диаграмму;
 д) Можно ли использовать линейную диаграмму, чтоб найти приблизительное значение A , когда $n = 3,5$? Ответ обоснуй.
 е) Составь формулу, которая будет выражать зависимость между переменными.

- 6 Изучи внимательно задачу 2 из текста параграфа и придумай формулу, которая выразит зависимость переменной s от переменной t . С помощью формулы вычисли значение переменной s , когда $t = 3,5$. Проверь, лежит ли точка, абсцисса которой $3,5$, а ордината - вычисленное тобой значение, на графике, приведенном на Рис. 4.

7

Зависимость между переменными m и n задана формулой $m=3n$.

а) Начерти и заполни таблицу:

n	-2	0			5		-1	
m			6	9		1		4

б) Используй приведенную формулу, и для любых пяти значений переменной n построй точечную диаграмму зависимости переменной m от n .

в) Посмотри внимательно на построенную диаграмму и напиши, какую закономерность ты заметил.

г) Напиши, возможно ли точно построить график этой зависимости. Построй график.

8

Зависимость между переменными x и y задана формулой $y=2x-3$

x	0	1	2	3	4
y					

а) Начерти, заполни таблицу и построй точечную диаграмму: какую закономерность ты заметил?

б) Построй линейную диаграмму и с ее помощью найди значения y , когда $x=0,5$; $x=1,5$; $x=3,2$.

в) Вычисли те же значения y с помощью формулы. Сравни их со значениями, найденными в пункте б), и в каждом случае вычисли разность между значениями, вычисленными в пунктах б) и в).

г) Что, по-твоему, представляет собой график зависимости между переменными x и y ?

9

Посмотри внимательно на построенный нами график населения планеты и попробуй ответить на вопросы:

а) Увеличивается или уменьшается население планеты?

б) Сколько, по-твоему, населения планеты было в 2010 году? 2015 году?

в) В каком году население планеты станет больше 8 миллиардов?

10

Бассейн наполняется 2 одинаковыми трубами за 6 часов. За сколько часов наполнится бассейн 3 такими трубами?

11

3 одинаковых комбайна убирают пшеницу с 24 гектаров площади за 4 дня. Со скольких гектаров уберут пшеницу 8 таких комбайнов за 9 дней?

12

Нато набрала $\frac{7}{12}$ часть рукописи, и ей осталось набрать на 25 страниц меньше набранного. Сколько страниц в рукописи?

Возможно ли это?

1. Написать семь натуральных чисел на окружности так, чтоб сумма каждых трех соседних чисел была 10?
2. Чтобы в равнобедренном треугольнике основание было
а) в 2 раза длиннее боковой стороны? б) в 2 раза короче боковой стороны?

Ну-ка, попробуй!

В произведении $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10$ сотри один множитель так, чтобы оставшееся произведение было полным квадратом натурального числа. Найди это натуральное число.

Работа в группе на тему: «Рисунки на координатной сетке»

Создайте группы из 4-5 членов. Постройте на координатной плоскости точки по данным координатам и последовательно соедините их:

I группа

Рисунок 1. (Единичный отрезок - длина двух сторон клетки тетради)

1. $(-5;3);(10;3);(5;0);(-2;0);(-5;3);$
2. $(-2;3);(2;10);(5;3);3. (-2;3);(2;13);(4;13);(3;12); (4;11);(2;11).$

Рисунок 2. (Единичный отрезок - длина одной стороны клетки тетради)

- $(-8;7); (-7;8); (-5;7); (-4;8); (-2;9); (0;9); (2;8); (5;6); (9;4); (10;3); (8;3); (6;2); (6;0);$
 $(5;-3); (4;-5); (2;-7); (0;-8); (0;-11); (-1;-12); (-2;-10); (-3;-9); (-5;-8); (-4;-7); (-3;-5);$
 $(-4;-3); (-6;-2); (-8;-3); (-9;-5); (-8;-7); (-6;-8); (-4;-7); (-1;-7); (1;-4); (1;-1); (0;1).$

II группа

Рисунок 1. (Единичный отрезок - длина одной стороны клетки тетради)

- $(-1;2); (0;2); (1;1); (1;0); (0;-2); (-8;-8); (-7;-6); (-7;-4); (-6;-1); (-5;1); (-1;5); (-2;8); (-2;9);$
 $(-1;10); (1;10); (2;9); (5;8); (2;8); (1;7); (2;5); (3;2); (3;1); (2;-1); (2;-2); (-1;-5); (-1;-8);$
 $(1;-9); (0;-10); (-1;-9); (-1;-10); (-2;-8); (-2;5,5); (-5;-7); (-6;-9); (-9;-9); (-8;-8).$

Рисунок 2. (Единичный отрезок - длина одной стороны клетки тетради)

1. $(-3;3); (0;6); (0;9); (-2;17); (-2;13);(-3;14); (-3;10); (-4;13); (-6;9); (-6;6); (-3;3);$
2. $(-3;3); (-3;-3); (2;2); (-2;-6); (-3;-11); (-3;-13); (-3;-11); (-5;-5); (-3;-3).$

III группа

Рисунок 1. (Единичный отрезок - длина двух сторон клетки тетради)

- $(-6;0); (-3;2); (2;4); (0;2); (4;1); (6;0); (9;3); (8;0); (3;-3); (6;0); (4;-1); (0;-2); (1;-3);$
 $(-3;-2); (-6;0); Глаз: (-4;0).$

Рисунок 2. (Единичный отрезок - длина двух сторон клетки тетради)

- $(-2;4,5); (-0,5;4); (0;4); (5,5;6,5); (7,5;5,5); (2,5;-1); (1,5;-2); (-5;-7); (-6;-5); (-3,5;0,5); (-3,5;1);$
 $(-4;2,5); (-5,5;5,5); (-5,5;6); (-5;6); (-2;4,5); (-1;3,5); (3,5;-2,5); (4,5;-3,5);$
 $(6,5;-2,5); (7,5;-3); (6;-5); (6,5;-6); (5,5;-5,5); (3,5;-7); (3;-6); (4;-4); (3;-3); (-3;1,5); (-4;2,5).$

5.4 График прямой пропорциональности



Цель

Уметь распознавать прямую пропорциональную зависимость, строить и читать график.

Наипростейшая зависимость между двумя переменными - это прямая пропорциональная зависимость.

Задача 1. Автомобиль движется со скоростью 110 км/ч в течении t часов. Представим зависимость пройденного автомобилем расстояния от времени.

Расстояние, пройденное автомобилем за t часов (в километрах) обозначим s . Так как скорость автомобиля равна 110 км/ч, то пройденное им расстояние будет выражаться формулой:

$$s = 110t$$

С помощью этой формулы вычислим значение переменной s для нескольких значений переменной t и составим таблицу:

t	0	0,5	1	1,5	1,8	2	-1	-0,2
s	0	55	110	165	198	220	-110	-22

Если посмотреть внимательно на таблицу, можно заметить, что для каждого значения t , кроме 0, соотношение $\frac{s}{t}$ равно одному и тому же числу. Например,

$$\frac{55}{0,5} = \frac{110}{1} = \frac{-22}{-0,2} = 110.$$

Когда $t = 0$, у этого соотношения нет смысла. В этом случае $s = 0$.

Замеченную закономерность легко объяснить, если вспомнить, что при движении с постоянной скоростью, скорость движения v равна отношению пройденного расстояния к затраченному на это время t . В нашем случае,

$$\frac{s}{t} = 110.$$

Значит, это соотношение для каждого значения переменной t равно постоянному значению, а именно, 110. Как мы знаем, если соотношение переменных величин - постоянное число, то такие величины называются прямо пропорциональными величинами, а зависимость между ними - прямой пропорциональностью. т.е. переменная s прямо пропорциональна переменной t .

Соотношение значений прямо пропорциональных переменных, как видим - ненулевое число. Оно называется **коэффициентом пропорциональности**. В рассмотренном нами случае коэффициент пропорциональности равен 110.

Рассмотрим обратное соотношение $\frac{t}{s}$. Конечно, его значение тоже не меняется и равно $\frac{1}{110}$. Значит, переменная t также прямо пропорциональна переменной s с коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{110}$.

В случае прямой пропорциональной зависимости, соотношение переменных - постоянная величина.

$$v = \frac{s}{t}$$

При движении с постоянной скоростью пройденное расстояние прямо пропорционально времени, затраченного на движение.

Если переменная y прямо пропорциональна переменной x с коэффициентом пропорциональности k , то тогда соотношение $\frac{y}{x}$ равно k :

$$\frac{y}{x} = k.$$

Определим y из этого уравнения. Так как делимое y равно произведению делителя x и частного k , поэтому:

$$y = kx \quad (1)$$

Если переменная y прямо пропорциональна переменной x с коэффициентом пропорциональности k , то тогда соотношение равно $y = kx$

Эта формула прямой пропорциональности (сравни ее с формулой, полученной в начале параграфа). Эта формула дает возможность вычислить значение y для каждого значения x , если известен коэффициент пропорциональности.

Как мы знаем, если две величины прямо пропорциональны, то при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз, вторая величина увеличивается (уменьшается) в столько же раз.

Проверь это правило с помощью таблицы, составленной для переменных t и s .

Построим график рассмотренной выше прямой пропорциональной зависимости. Для этого используем составленную нами таблицу и построим точечную диаграмму (рис. 1). Легко заметить, что все точки диаграммы лежат на прямой, проходящей через начало системы координат. Если эти точки соединить отрезком прямой, получим график прямой пропорциональной зависимости.

Этот факт справедлив для любой прямой пропорциональной зависимости:

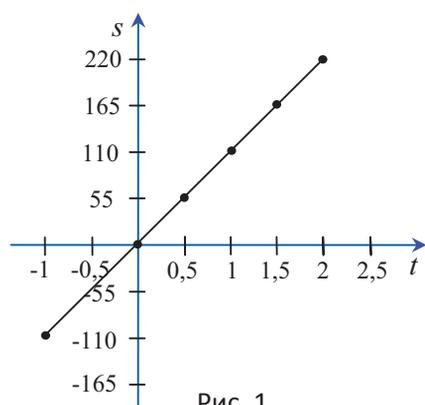


Рис. 1

График прямой пропорциональности представляет проходящую через начало координат прямую или ее отрезок.

Это свойство прямой пропорциональности дает возможность, построить график, если известна хотя бы одна пара соответствующих значений пропорциональных переменных. Для построения графика достаточно обозначить соответствующую этой паре точку на координатной плоскости и провести через нее и начало координат прямую. Так как график прямой пропорциональной зависимости также представляет прямую или часть прямой, проходящей через эти две точки, а через две точки проходит только одна прямая, поэтому все точки графика лежат на построенной нами прямой.

Мы ранее ознакомились с примерами прямой пропорциональной зависимости между величинами. Кроме уже рассмотренной нами зависимости пройденного расстояния и потраченного на движение времени при постоянной скорости, другие примеры прямой пропорциональной зависимости:

- При равномерном движении тела зависимость пройденного за равные промежутки времени расстояния от скорости тела;
- Зависимость общей стоимости предметов одинаковой цены от количества предметов;

- Зависимость данной массы жидкости от ее объема.

Как при решении практической задачи установить, есть ли между переменными, участвующими в задаче, прямая пропорциональная зависимость?

- Если зависимость между переменными дана в виде таблицы, тогда надо убедиться, что соотношение соответствующих значений переменных постоянно. Если значение одной переменной - ноль, то соответствующее значение второй переменной также должно быть равно нулю;
- Если зависимость между двумя переменными дана в виде формулы, тогда соотношение соответствующих значений переменных, участвующих в формуле, должно быть равным одному и тому же числу;
- Если зависимость между двумя переменными дана в виде графика, тогда точки этого графика должны лежать на прямой, проходящей через начало координат.

Ответ на вопросы

1. Какое свойство у соотношения прямо пропорциональных переменных?
2. Что такое коэффициент пропорциональности?
3. Какой формулой выражается прямая пропорциональная зависимость?
4. Какое свойство у прямо пропорциональных переменных?
5. Что представляет график прямой пропорциональности и как его построить?
6. Как распознать прямую пропорциональную зависимость между величинами, данными таблицей?
7. Как установить, является ли прямой пропорциональностью зависимость, данная формулой?
8. Как установить, является ли прямой пропорциональностью зависимость, данная графиком?

Упражнения

- 1 Какие из нижеперечисленных взаимозависимых переменных прямо пропорциональные?
 - а) Рост и масса человека;
 - б) Длительность работы лампочки и потребленная ею электроэнергия;
 - в) Сторона и площадь квадрата;
 - г) Ширина и площадь прямоугольника с одной и той же длиной;
 - д) Данный угол и угол, созданный его биссектрисой;
 - е) Количество купленных продуктов и их стоимость;

2 Зависимость между переменными x и y дана таблицей:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	1,2	0	-1,2	-2,4	-3,6	-4,8	-6

Эта зависимость прямо пропорциональна? Если да, то чему равен коэффициент пропорциональности?

3 Зависимость между переменными u и v дана таблицей:

u	-2	0	2	3	4	6	10
v	-3	0	3	4,5	6	8	15

Измени одно значение v так, чтоб эта зависимость стала прямой пропорциональностью.

4 Переменные x и L прямо пропорциональные. Начерти и заполни таблицу:

x	-1,5		0,6			1,8
L	2,5	0		2	5	

Напиши формулу, которая выразит переменную L с помощью переменной x .

5 Зависимость переменной z от x выражается формулой: $z = x$. $z = \frac{2}{5}x$.

а) Чему равен коэффициент пропорциональности этой зависимости?

б) Построй график этой зависимости, когда x меняется между 0 и 5.

в) Напиши формулу зависимости x от z и построь ее график, когда z меняется между 0 и 5.

6 Переменная M прямо пропорциональна переменной t с коэффициентом пропорциональности 2,5. Построй график зависимости, когда t меняется от (-1) до 2.

7 На рисунке 2 дан график зависимости s от t .

а) Объясни, почему эта зависимость - прямая пропорциональность;

б) Найди коэффициент пропорциональности;

в) Напиши формулу зависимости переменной s от t .

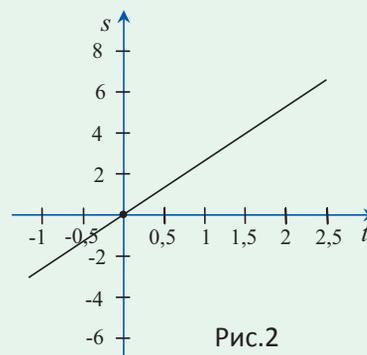


Рис.2

8 Укажи, какая из следующих формул не выражает прямую пропорциональную зависимость:

а) $y=x+a$; б) $V=2-u$; в) $b = \frac{a}{2}$; г) $f = \frac{3}{g}$.

9 Гия купил несколько одинаковых карандашей. Обозначим буквой n количество купленных вещей, а буквой L - заплаченную сумму в ларах.

а) Являются ли величины n и L прямо пропорциональными?

б) Гия заплатил за 8 карандашей 2 лари. Какую сумму заплатит Гия за 11 карандашей? Сколько карандашей он купит за 3 лари?

- в) С помощью приведенных в предыдущем пункте данных, найди коэффициент пропорциональности между переменными n и L . Установи, какая связь между коэффициентом пропорциональности и стоимостью карандаша.
- г) Напиши формулу зависимости между переменными n и L .
- д) Выбери допустимые значения переменной n среди следующих чисел: -2 ; 23 ; $7,3$; 100 ; -6 .
- е) Используй формулу, полученную в пункте г), и вычисли значение переменной L , когда переменная n принимает значения: 0 ; 2 ; $4,3$; 6 ; -3 . Укажи, в каких случаях, и почему формула дает ответы, не соответствующие условию задачи.
- ж) Построй график зависимости переменной L от n . Принадлежат ли этой прямой точки $(0;0)$? $(3; 0,75)$? $(-2; -0,5)$? $(5; 1,4)$? $(3; 2)$?

10

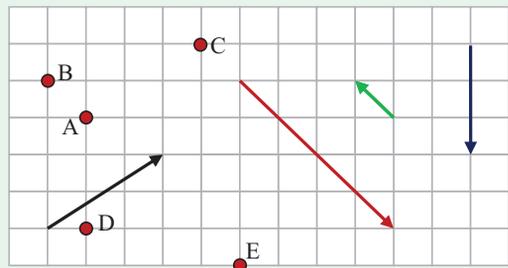
С помощью программы «GeoGebra» построь графики данной внизу прямой пропорциональной зависимости:

а) $y=3x$; б) $y=-2x$; в) $y = \frac{x}{3}$.

11

На рисунке разноцветными стрелками указаны параллельные переносы.

- а) Опиши каждый параллельный перенос устно (например, черная стрелка указывает параллельный перенос на три клетки вправо и две клетки вверх).
- б) Установи в какую точку перейдет точка A при каждом параллельном переносе.



12

- Установи длину отрезка AB , лежащего на координатной плоскости, если координаты точки $A(4;5)$, а точка B симметрична точке A : а) по отношению к оси абсцисс; б) по отношению к оси ординат.

Ну-ка, попробуй!

Реши задачу алгебраическим методом.

После того, как Мака и Елена перешли в другой класс, количество девочек в классе уменьшилось с $\frac{2}{5}$ до $\frac{1}{3}$. Сколько учеников осталось в классе?

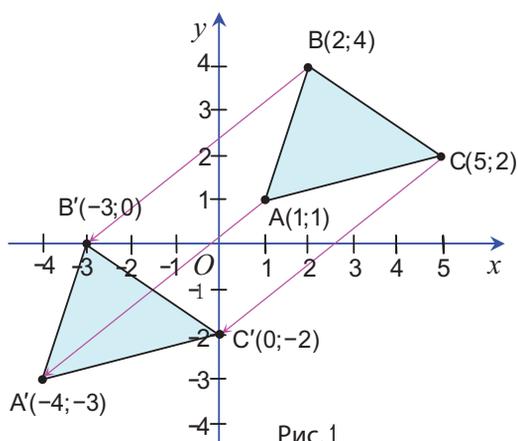
5.5 Параллельный перенос фигур



Цель

1. Описать параллельный перенос с помощью системы координат;
2. Ознакомиться со свойствами параллельного переноса.

Использование:
параллельный перенос используется для изучения свойства фигур, установлении их равенства.



Рассмотрим в системе Oxy какую-либо фигуру, например, треугольник ABC (рис. 1). Построим в этой же системе новую фигуру $A'B'C'$, координаты точек которой получаются при добавлении одного и того же числа к соответствующим координатам точек старой фигуры. Для этого подберем два числа a и b , например $a = -5$ и $b = -4$. Для каждой точки $D(x, y)$ треугольника ABC построим точку $D'(x'; y')$, координаты которой вычисляются формулой:

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\ y' &= y + b\end{aligned}\quad (1)$$

Эти точки составляют новую фигуру (фигура $A'B'C'$ на первом рисунке). Каждая точка этой фигуры получается путем переноса точек ABC треугольника в одно и то же направление, на одно и то же расстояние. Такой перенос, как мы знаем, называется параллельным переносом. В будущем обозначим параллельный перенос большими латинскими буквами P, U, V и т.д.

Вследствие параллельного переноса данной фигуры, положение полученной фигуры, конечно, зависит от чисел a и b , входящих в формулу (1). Эти числа называются **координатами параллельного переноса** (соответственно абсцисса и ордината). Если мы обозначим буквой U параллельный перенос, данный на первом рисунке, то его координатами будут $(-5;$

$-4)$. Вкратце параллельный перенос можно обозначить так: $U(-5; -4)$.

Задача 1. В какую точку переносит параллельный перенос $V(2; 3)$ точку $F(1; -1)$?

Решение. Используем формулу (1) для установления координат точки $F'(x'; -y')$, полученной путем параллельного переноса.

$$\begin{aligned}x' &= 1 + 2 = 3 \\ y' &= -1 + 3 = 2\end{aligned}$$

Поэтому $F'(3; 2)$.

При параллельном переносе фигуры получаем равную ей фигуру.

Благодаря этому свойству для построения параллельного переноса многоугольника достаточно построить точки, полученные путем параллельного переноса его вершин и соединить их последовательно, как в первоначальном многоугольнике (рис. 1).

Задача 2. Найдем координаты параллельного переноса, который переносит точку $A(3; -2)$ в точку $A'(-1; 3)$.

Решение: Допустим, координаты такого параллельного переноса $(a; b)$. В формулу (1) вместо $(x; y)$ подставим координаты точки A , а вместо $(x'; y')$ - координаты точки A' , получим:

$$-1=3+a, \quad 3=-2+b$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} a &= -1 - 3 = -4, \\ b &= 3 - (-2) = 5. \end{aligned}$$

В общем, если путем параллельного переноса $P(a;b)$ точка $A(x;y)$ переходит в точку $A'(x';y')$, то

$$\begin{aligned} a &= x' - x; \\ b &= y' - y. \end{aligned}$$

Для установления координат параллельного переноса, из координат точки, полученной параллельным переносом, нужно вычесть координаты первоначальной точки.

Параллельный перенос фигуры можно построить и в том случае, когда нет координатной системы, если укажем (например стрелкой, как на первом рисунке), в каком направлении и на какое расстояние надо перенести одну какую-либо точку фигуры. Остальные точки фигуры переходят в том же направлении и на то же расстояние.

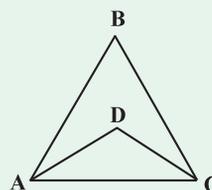
Ответ на вопросы:

1. Как вычислить координаты точки, полученной путем параллельного переноса точки.
2. Что называется координатами параллельного переноса?
3. Как вычислить координаты параллельного переноса?
4. Какие свойства у параллельного переноса?
5. Как построить многоугольник, полученный путем параллельного переноса?

Упражнения

1. Найди координаты точки, полученной параллельным переносом $U(3; 1)$ точки $A(-1; 2)$ и построй ее.
2. Координаты точки B' , полученной параллельным переносом $V(5; -1,3)$ точки B , равны $B'(-1; 2)$. Найди координаты точки B .

- 3 Построй треугольник, полученный параллельным переносом $T(2; -1)$ треугольника ABC , если $A(2; 0)$; $B(1; 2)$; $C(3; 3)$.
- 4 При параллельном переносе точка $A(0; -1,3)$ перешла в точку $A'(1,5; -2)$. Найди координаты этого параллельного переноса.
- 5 При параллельном переносе точка $C(2,2; 0,5)$ перешла в точку $C'(3,2; 5)$. Установи, в какую точку перейдет точка $D(-5; 5)$ при том же параллельном переносе и построь эту точку.
- 6 Найди координаты параллельного переноса, если при этом точка $D(-2; 5)$ переходит в точку, симметричную ей по отношению к оси абсцисс.
- 7 Найди координаты параллельного переноса, если при этом точка $M(3; -1)$ переходит в точку, симметричную ей по отношению к оси ординат.
- 8 При параллельном переносе U точка $A(3; 1)$ перешла в симметричную ей точку по отношению к оси абсцисс. Построй отрезок, полученный параллельным переносом U отрезка PQ , если $P(1; 3)$, $Q(4; -1)$.
- 9 Найди координаты параллельного переноса T , если он переносит отрезок AB с координатами концов $A(2; 3)$, $B(4; 3)$ в симметричный ему отрезок по отношению к оси ординат.
- 10 Допустим, S_0 - это симметрия по отношению к оси Oy , а S_1 - симметрия по отношению к прямой, проходящей через точку $(1;0)$ и параллельной оси Oy . Докажи, что если на точку плоскости координат подействует сначала симметрия S_0 , а затем S_1 , получим параллельный перенос. Вычисли координаты этого параллельного переноса.
- 11 Сколько целых значений может принять соотношение $\frac{a}{b}$ если $10 \leq a \leq 27$ и $9 \leq b \leq 15$?
- 12 При пересылке денег удерживают 2% от суммы. Какую сумму нужно заплатить, чтобы получатель суммы смог получить 490 лари?
- 13 Из листа треугольной формы ABC вырезали треугольник ADC (см. рисунок). Вычисли периметр полученного четырехугольника $ABCD$, если периметр треугольника ABC равен 21 см, а периметр треугольника ADC - 17 см.
- 14 Самолет движется с постоянной скоростью. В салоне есть экран с изображением карты, на которой видно передвижение соответствующей самолету светящейся точки. Масштаб этой карты 1:4000000. С какой скоростью движется самолет, если светящаяся точка на экране за 2 часа переместилась на 24 см?



15 В сплав входят никель и хром в соотношении 4:3. Найди массу этого сплава, если масса никеля 5,6г.

16 Найди наименьшее целое число, модуль которого меньше 4.

17 Длина участка прямоугольной формы 175м, а ширина - 105м. Шио решил оградить участок, для этого ему нужно выкопать ямки для столбов через каждые 5 метров. Сколько ямок понадобится Шио?

18 Найди информацию о глубине океанов. Подбери масштаб так, чтобы 1мм соответствовал целому числу метров и чертеж занимал как можно меньше места. Построй диаграмму (работай на компьютере).



Работа в парах

1. Постройте и по данной последовательности соедините точки:
а) $(0;0)$, $(-1;1)$, $(-3;1)$, $(-2;3)$, $(-3;3)$, $(-4;6)$, $(0;8)$, $(2;5)$, $(2;11)$, $(6;10)$, $(3;9)$, $(4;5)$, $(3;0)$, $(2;0)$, $(1;-7)$, $(3;-8)$, $(0;-8)$, $(0;0)$. Отдельно обозначьте точку $(3;10)$, которую не соедините ни с одной другой точкой.
б) $(-4;3)$, $(0;6)$, $(0;0)$, $(10;0)$, $(12;2)$, $(12;1)$, $(11;0)$, $(11;-8)$, $(9;-8)$, $(9;-4)$, $(0;-4)$, $(0;-8)$, $(-2;-8)$, $(-2;3)$, $(-4;3)$. По желанию полученные рисунки раскрасьте.
2. Выполните какой-нибудь рисунок ломаной линией и запишите координаты его вершин.

Ну-ка, попробуй!

Найди n , если известно, что сумма количества ребер, граней и вершин n -угольной пирамиды равна 38.

Обзор V главы

Что мы выучили в этой главе?

- Построение прямоугольной системы координат.
- Как установить координату точки.
- Как найти точку по ее координатам.
- Графическое представление зависимости между двумя переменными.
- Построение графика прямой пропорциональной зависимости.
- Осевая симметрия и параллельный перенос на координатной плоскости.
- Поиск координат параллельного переноса.

Ответ на вопросы:

- Как построить прямоугольную систему координат?
- Как найти абсциссу данной точки на координатной плоскости?
- Как найти ординату данной точки на координатной плоскости?
- Какая координата равна у точек, лежащих на параллельной оси ординат прямой?
- Какая координата равна у точек, лежащих на перпендикулярной к оси ординат прямой?
- Какая координата положительна у точек, лежащих во второй четверти координатной плоскости?
- Какая координата равна нулю у точек, лежащих на оси абсцисс?
- Как найти точку по ее координатам на координатной плоскости?
- Как из точечной диаграммы получить линейную диаграмму?
- Какие способы представления зависимости между переменными ты знаешь?
- Что такое прямая пропорциональная зависимость между переменными?
- Как построить график прямой пропорциональной зависимости данной формулой или таблицей?
- Какое свойство у прямой пропорциональной зависимости между переменными?
- Как найти координаты точки, полученной параллельным переносом точки?
- Как найти координаты параллельного переноса?
- У какой координаты точки меняется знак при симметрии по отношению к оси ординат?

Выбери слово в правом столбце для предложения в левом столбце.	
1. Первая координата, данная на координатной плоскости, называется	третьей
2. Если у точки обе координаты отрицательные, то эта точка лежит в четверти.	ордината
3. При прямой пропорциональной зависимости переменных постоянно.	абсциссой
4. У точек, лежащих на оси абсцисс, равна 0.	соотношение
5. Ордината точки, симметричной по отношению к оси абсцисс, меняет	знак

Упражнения

- 1** Какое расстояние от точки с координатами $(-3; 0)$ до начала координат?
- 2** Какое расстояние между точками $A(-5; -4)$ и $B(8; -4)$?
- 3** Точка C - середина отрезка AB . Найди координаты точки C , если координаты точек A и B равны $(2; 6)$ и $(6; 6)$.
- 4** Точка C - середина отрезка AB . Найди координаты точки B , если координаты точек A и C равны $(4; 6)$ и $(4; 0)$.
- 5** Даны координаты трех вершин $A(1; 2)$, $B(1; 5)$, $C(4; 5)$ четырехугольника $ABCD$. Найди координаты вершины D .
- 6** Координаты трех вершин лежащего на координатной плоскости прямоугольника $(1; 2)$, $(5; -2)$, $(5; 2)$. Найди координаты четвертой вершины.
- 7** Вершины треугольника: $M(0; 4)$, $N(4; 0)$, $O(0; 0)$. Найди координаты серединной точки A стороны OM и серединной точки B стороны ON треугольника.
- 8** На координатной плоскости построен прямоугольник $ABDM$ с координатами вершин: $A(-8; 3)$, $B(1; 3)$, $D(1; -2)$. Вычисли периметр прямоугольника $ABDM$.
- 9** На координатной плоскости построен прямоугольник $ABDM$ с координатами вершин: $A(-8; 3)$, $B(1; 3)$, $D(1; -2)$. Вычисли периметр прямоугольника $ABDM$.

10

С 6 часов утра до 12 часов каждый час измеряли температуру воздуха. В таблице даны итоги измерения температуры.

Время (ч)	6	7	8	9	10	11	12
Температура (С°)	13	14	15	17	18	20	23

- Построй точечную диаграмму с помощью таблицы;
- Преобразуй точечную диаграмму в линейную диаграмму;
- С помощью полученной диаграммы определи примерное значение температуры в 11³⁰.

11

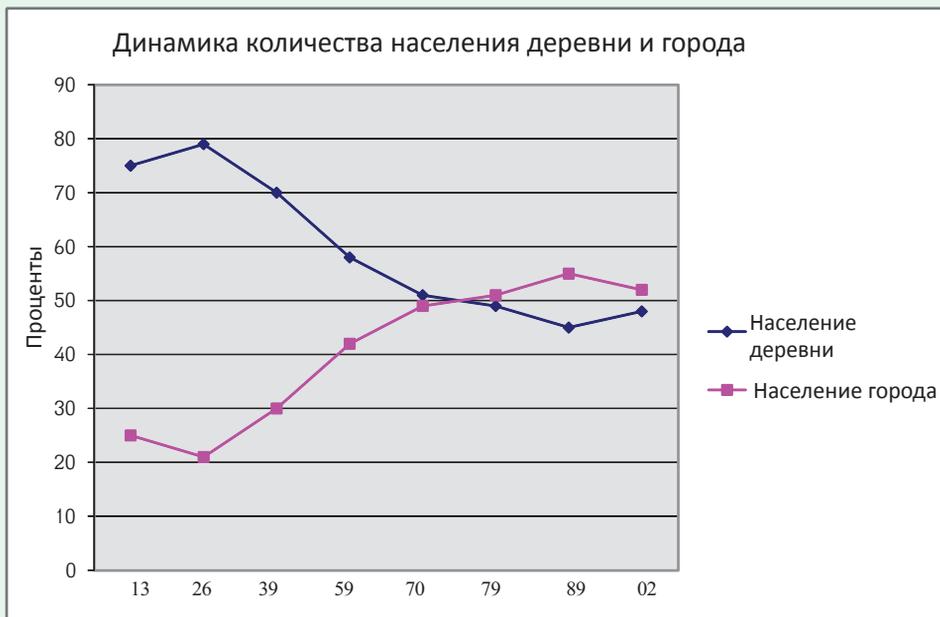
В таблице дано количество населения по опросам, проведенных в разные годы.

Год	1913	1926	1939	1959	1970	1979	1989	2002
Количество населения (в миллионах)	2,6	2,7	3,5	4,0	4,7	5,0	5,4	4,4

- С помощью таблицы построй точечную диаграмму (прими 1913 год за ноль);
- Преобразуй точечную диаграмму в линейную диаграмму;
- С помощью полученной диаграммы определи примерное количество населения в 1935, 1965 и 1995 годах.

12

На линейной диаграмме дан процентный показатель городского и сельского населения Грузии по итогам описи, проведенной в 1913-202 годах.



С помощью диаграммы определи:

- В каком году процентный показатель деревенского населения был самым высоким;
- В каком году процентный показатель городского населения был самым высоким;
- В каком году примерно уравнилось население города и деревни;
- В каких годах процент городского населения увеличивался.

- 13 Построй график прямой пропорциональности $y=2x$.
- 14 Автомобиль движется с постоянной скоростью 80км/ч. Составь таблицу зависимости расстояния S от времени t и построй график.
- 15 В какую точку перейдет при параллельном переносе $U(-1; 2)$ точка $A(4; -2)$?
- 16 Точка $A(2,5; -7)$ при параллельном переносе переходит в точку $B(3; 5)$. а) Найди координаты параллельного переноса; б) В какую точку перейдет точка $C(0,1; -5)$ при том же параллельном переносе.
- 17 В какую точку перейдет точка $(1; -3)$ при симметрии по отношению к оси абсцисс?
- 18 Координаты противоположных вершин квадрата $(1; 1)$ и $(1; 5)$. Найди координаты остальных вершин.
- 19 Координаты вершин A и C квадрата $ABCD$ соответственно $(-1; 2)$ и $(5; 2)$. Вычисли координаты вершин B и D .
- 20 Подбери несколько значений переменной x и в системе координат построй точки с координатами $(2x; 3x)$. Обрати внимание, как расположены эти точки, и сделай вывод о зависимости между выражениями $2x$ и $3x$.
- 21 Координаты трех точек, лежащих на координатной плоскости $A(1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(2; 2)$.
а) Построй равнобедренный треугольник, для которого точка A будет вершиной при основании, B - серединой точкой основания и C - точка, лежащая на боковой стороне;
б) Вычисли координаты остальных вершин полученного треугольника.
- 22 Координаты параллельного переноса $U(0; 2)$. Найди координаты параллельного переноса, при котором точки переходят перпендикулярно к U , и на расстояние в два раза больше.

Ну-ка, попробуй!

Докажи, что если последовательно воздействовать на точки координатной плоскости двумя параллельными переносами $P(a; b)$ и $Q(c; d)$, то получим параллельный перенос с координатами $(a+c; b+d)$.

Тест №5

- 1 Точка с положительной абсциссой и ординатой лежит на координатной плоскости:
а) в I четверти; б) во II четверти; в) в III четверти; г) в IV четверти;
- 2 Точка с отрицательной абсциссой и ординатой лежит на координатной плоскости:
а) в I четверти; б) во II четверти; в) в III четверти; г) в IV четверти;
- 3 Точка с абсциссой, равной нулю, лежит:
а) на оси абсцисс; б) на оси ординат;
в) в III четверти; г) в IV четверти;
- 4 Определи, в какой точке ось абсцисс пересечет окружность с радиусом в 5 единиц и центром в начале координат.
а) 0 и -5 ; б) $(-5;0)$ и $(5;0)$; в) 5 и 0; д) $(0;0)$ и $(5;0)$.
- 5 Какое расстояние между точками $A(5; 2)$ и $B(5; -4)$?
а) 6; б) 8; в) 5; г) 7;
- 6 Расстояние от точки до оси абсцисс равно:
а) модулю абсциссы; б) модулю ординаты;
в) расстоянию до начала координат; г) сумме абсциссы и ординаты
- 7 Расстояние от точки до оси ординат равно
а) модулю абсциссы; б) модулю ординаты;
в) расстоянию до начала координат; г) сумме абсциссы и ординаты.
- 8 Отрезок, соединяющий точки $A(-2;6)$ и $B(3;4)$ лежит:
а) слева от оси ординат; б) справа от оси ординат;
в) над осью абсцисс; г) под осью абсцисс;
- 9 Какое расстояние от точки $(0;-12)$ до начала координат?
а) $(2;-5)$; б) $(-2;-5)$; в) $(-2;5)$; г) $(2;5)$.
- 10 Координаты точки $A(2;5)$. Координаты точки, симметричной ей по отношению к оси абсцисс, будут:
а) $(2;-5)$; б) $(-2;-5)$; в) $(-2;5)$; г) $(2;5)$.
- 11 На координатной плоскости лежат четыре точки: $A(3;-2,5)$, $B(2,5;3)$, $M(2,5;-3)$ и $N(-3; -2,5)$. Какие из этих точек симметричны по отношению к оси ординат?
а) A и N; б) A и M; в) A и B; г) B и M

12 Координатами точки пересечения оси симметрии точек $A(-4;7)$ и $B(2;7)$, являются:
а) $(0;0)$; б) $(-1;0)$; в) $(0;-1)$; г) $(4;2)$

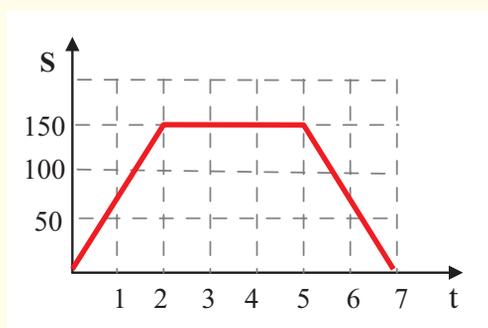
13 Если при параллельном переносе точка $A(-5;0)$ переходит в точку $B(3;-2)$, а точка $C(1;1)$ в точку $D(x;y)$, то
а) $x=2, y=-2$; б) $x=-15, y=0$; в) $x=9, y=-1$; г) $x=-8, y=-1$.

14 Найди координаты параллельного переноса, если точка $A(-1,3; 2,4)$ переходит в точку $B(3; -2)$.
а) $(4,3; -4,4)$; б) $(3,3; -3,4)$; в) $(2,3; -2,4)$; г) $(2,3; -2,4)$.

15 Коэффициент пропорциональной зависимости $y = -7x$ равен:
а) 7; б) -7; в) y ; г) x .

16 Чему равен k , если точка $(-2,5;5)$ лежит на графике пропорциональной зависимости $y=kx$?
а) -2; б) 2; в) -2,5; г) 5.

В 10 часов утра из города А в город В выехал автобус. На несколько часов он остановился в городе В и затем вернулся в город А. На чертеже дан график зависимости расстояния между автобусом и городом А (в километрах) от времени t (в часах).



С помощью графика ответь на вопросы 17-21:

17 Сколько километров от города А до города В?
а) 50 км; б) 100 км; в) 150 км; г) 300 км

18 С какой скоростью движется автобус от А до В?
а) 50 км/ч б) 100 км/ч в) 25 км/ч г) 75 км/ч

19 На сколько часов автобус останавливался в городе В?
а) 2ч; б) 3ч; в) 7ч; г) 5ч.

20 В котором часу автобус вернулся в город А?
а) в 17ч; б) 6ч; в) в 12ч; г) в 15ч.

21

Сколько всего километров проехал автобус?

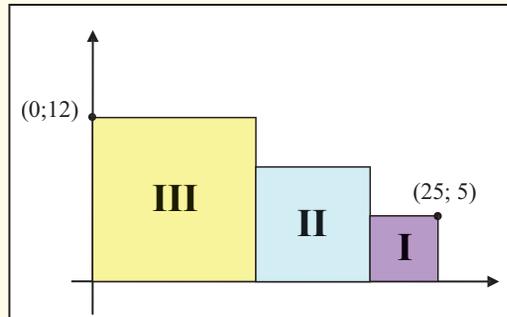
- а) 50км; б) 100км; в) 150км; г) 300км..

На плоскости координат даны три квадрата и указаны координаты одной вершины первого и третьего квадрата. С помощью чертежа ответь на вопросы №22-25.

22

Чему равна сторона первого квадрата?

- а) 25; б) 5; в) 30; г) 60.

**23**

Чему равен периметр третьего квадрата?

- а) 12; б) 48; в) 25; г) 36.

24

Чему равна площадь второго квадрата?

- а) 64; б) 36; в) 49; г) 81.

25

Чему равно среднее арифметическое площадей всех трех квадратов?

- а) 60,5; б) 36,4; в) $77\frac{2}{3}$; г) $57\frac{1}{2}$.

Ответы Глава 3

- 3.1** 15. а) 0; б) -2,64; в) $9\frac{1}{30}$; г) $29\frac{1}{3}$. 16. 155° . 17. а) -15; б) -5; в) 0,2; г) 11,7. 18. 124° .
19. 30° . 20. 10см. 21. 225м^2 . Ну-ка, попробуй! 30см.
- 3.2** 1. а) 100%; е) 64%; з) 150%; л) 26%; п) 223,56%. 2. а) $\frac{3}{100}$; д) $\frac{5}{100}$; о) $\frac{1}{10000}$.
3. а) 50%; г) 20%; д) 99%; т) $\frac{100}{3}\%$. 4. а) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{10}$; д) $\frac{67}{100}$. 5. а) 5; в) 10; е) 0,035; т) 1.
6. а) 50%; б) 25%; в) 75%; г) 12,5%. 9. 26кг. 10. 150кг. 11. 37638км^2 . 12. 5. 13. 40.
14. 3км. 15. 9. 17. а) 55%; б) 45%; в) 75%. 18. а) 25%; б) картофель 3т, капуста 3,6т.
марковь 1,8т, 0,6т. 19. 1,5 лари. 21. а) 1,5 лари; б) 10 тетри; в) 5 лари 60 тетри.
22. 20. 25. 925 лари. 26. а) 6; б) 4,5; в) 0,45; г) 2,7; д) 6. 27. а) 80, 176, 256; б) 128, 160, 224.
29. 14см, 14см, 16см. 30. 75° .
- 3.3** 1. а) 50; б) 200; в) 100; г) 300; д) 1000; е) 10. 2. а) 11; б) 54; в) 90; г) 0,4848; д) 9; е) 18;
ж) 24; з) 174. 3. 32. 4. 30. 5. 5 ч. 6. 200 лари. 7. 30 лари. 8. 90 лари. 9. 900 лари.
10. 545 лари. 11. 2000 лари. 12. 176 гр. 13. 4 кг. 14. а) 20; б) 6,25 кг. 15. а) 11000;
б) 12100. 16. 30800 лари. 17. 32%; 18. 68%. 20. а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{5}$; в) 0,3; г) $\frac{1}{4}$; д) 0,25; е) 0,4;
ж) 0,01; з) 0,1; и) $\frac{1}{3600}$.
- 3.4** 1. а) 25%; б) 20%; в) 50%; г) 200%. 2. а) 20%; б) 5%; в) 25%; г) 77,5%. 3. б) $\frac{200}{9}\%$; г) 35%.
5. а) 40%; б) 30%; в) $\frac{650}{7}\%$; г) 90%; д) 25%; е) 200%. 6. 60%. 7. 82%. 9. 52%.
10. 30% серебро, 20% золото, 50% медь. 11. 25%. 12. 1%. 13. 90г. 14. а) 50%; б) 25%;
в) 50%; г) 100%; д) $33\frac{1}{3}\%$; е) 40%. 15. 50%. 16. 40%. 18. 2,5%. 19. а) 25%; б) 120° .
22. 200%. 23. 90%. 24. 100г. 25. 76,25%. 26. 20г. 27. 990. 28. 35. 29. $\frac{7}{3}$. 30. 5,8.
31. $x=3, y=7, z=9$. 32. 11 деревьев. 33. через 2 дня.
- 3.5** 2. в). 3. $\frac{41}{42}, +1,4, 10,4$. 4. 3. 5. 3,6. 6. 7. 7. 8. 13. а) не может; б) не может; в) может.
17. $a = 2, b = 9$. 19. 243грамм. 20. 1: 2500000. 21. д) 22. а) 5; б) $\frac{1}{3}$.
«Возможно ли это?» а) невозможно; б) возможно.

Обзор III Главы

2. а) на 25%; б) на 20%. 3. а) 3 лари и 60 тетри; б) 6 т; в) 1,44; г) 30 кг; д) 4,32. е) 4,32.
4. а) 3 лари; б) 1,8 т; в) 0,9; г) 1,5кг; д) 21,6 см. 5. а) 3; б) 144. 7. 30%.
8. на 50%. 9. 35%. 10. 40%. 11. а) в 25 раз; б) 5; в) 4; г) $\frac{87}{25}$; 12. а) 5; б) 17; в) 43,2
г) удовлетворительные. 13. 49. 14. 20. 15. 150м. 16. 16км. 17. 500г. 18. 16 футболистов;
19. 18кг; 20. 17500 и 22500. «Ну-ка, попробуй!» 25.

Глава 4

- 4.1** 6. $3a+2b$. 7. $9,5n+7,5m$. 8. $(vt + 7)км$. 9. а) $x = 2$; б) $v = 2$; в) $a = -3/2$; г) $a = -4$; е) $a = \pm 1$. 10. $\frac{S}{t-2}$ км\ч. 11. $\frac{a}{n+0,5}$. 12. г) $n(n+1)(n+2)$. 13. а) v_1t+v_2t ; б) $3v_1+3v_2+12$. 14. $m(1 + \frac{p}{100}) \times (1 - \frac{q}{100})$. 15. $\frac{2}{5}n$. 21. $x = -3/2$. 24. $|a| > |b|, |a| < |b|, |a| < |b|, |a| < |b|$. 25. 15см. 27. а) $68^\circ, 44^\circ$; б) $35^\circ, 35^\circ, 110^\circ$. 28. 10дм.
- 4.2** 7. а = 1. 15. а) $a=b+5$; б) $b=5a$; в) $b=0,2a$; г) $a=0,3b$; д) $a=1,4b$; е) $b=0,6a$; в) $a+b+c+d=4m$. 17. а) $2a - 3b = 1,5$; б) $3a = 4b$; в) $am = 0,6bn$. 18. а) $2(m-3) = n+3$; б) $m+5 = 1,25(n-5)$. 19. $n = 1, 3, 9$. 20. г). 21. б). 22. на 25%. 25. а) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}; \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}; \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$.
- 4.3** 16. а) 5613; б) 678; в) 294; г) 30865. 18. а) на 1; б) на 4; в) на 5; г) на 6; д) на 0. 22. 108куб.м. 24. а) 8; б) 12; в) 25; г) 64. 25. 130° . 26. на 40%. 27. 140° .
«Ну-ка, попробуй!» а) $x = \pm 2, y = \pm 2$; б) $x = 0, y = 2$ или $x = 2, y = 0$.
- 4.4** 10. в $\frac{10^6}{3}$ раз. 12. а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=7$; д) $n=m+1$; е) $n=2k+7$. 14. а) 0,5; б) 1; к) 0,04; л) 3. 15. 70км. 16. 350км. 17. а) в 6 раз; б) 1,25.
«Ну-ка, попробуй!» примерно $946 \times 1010км$.
- 4.5** 11. $4,8b; 1,44b^2$. 12. $16a; 15a^2$; 13. $7ab^2$; 14. 80км. 15. 2ч. 4,5км\ч. 16. 7а. 20. 48. 21. 5м; 10м; 15м. 22. а) $-1\frac{7}{120}$; б) $-5/3$. 23. 34. 24. -5. 25. а) 3^{m+n+2} ; б) 5^{3x} ; в) $5^{3x+13^{m+n+2}}$. 26. в). 27. д). «Ну-ка, попробуй!» 11:10.
- 4.6** 5. в) -8. 7. $(4x^2+2y)+(-3x-5y^2-3xy)$. 8. $(3a^2+4b^2) - (3x+5y^2+3xy)$. 11. $P = a^2 - 3ac - 6$. 14. 864л. 15. 25%. 16. У Эки в 2 раза больше.
- 4.7** 4. 30 легковая, 20 грузовой. 5. 11,5 га, 9 га. 6. 4,5км/ч, 4км/ч. 8. $k - n + 2m$. 11. 4; 6; 8; 10. 12. 3.
- 4.8** 11. а) -8,5; б) 24; в) 7,5; г) -150; д) 2,1; е) -6,4. 12. 6а. 12. 6а. 14. 56 см². 15. 270,4см². 17. а) 140; б) 160; в) 77; г) 0,25; д) 0,1; е) -0,25. 18. 960000. 19. на 60%. 20. на 32785 тонн. «Ну-ка, попробуй!» 18а.
- 4.9** 13. а) 10000; б) 10000; в) 8100; г) 0. 15. а) 400; б) 10 000; в) 12100; г) 160000. 16. а) 0,25; б) $\frac{1}{17}$. 18. а) -125; б) 8000. 19. а) $1 - 2a$; б) $a^2 + 5$. 20. 128кв.см.
- 4.10** 1. а) 4,8; б) -2,4. 2. а) 4899; б) 9996; в) 39999; г) 39975; д) 159993,75; е) 5200; ж) 625; з) 16; и) 35; к) 4000; л) 8,4; м) 159999. 4. а) 2,4; б) 9. 5. д). 6. г). 9. 5. 10. 5. 11. уменьшится на 25. 12. уменьшится на 225м². 14. а) $0,5a^2b^2 + 2a^2b^2$; б) $24a^2+2$. 15. а) $16x - 17$; б) $64 - n^6$; в) $4x+2x+1+1$; г) $22x+2x+y+1+22y$. 16. а) $\frac{1}{16}x^8 - 16y^8$; г) $\frac{1}{8}x^3 - 1$; з) $64^x + 64^y$. 17. на 4%. 18. на 25%. 20. 43 и 34. 21. а) 0,04; б) $8\frac{9}{16}$; в) $15\frac{5}{8}$.
- 4.11** 9. а) $10 \cdot 3n$; б) $6 \cdot 7^k$; в) $63 \cdot 4^m$; г) $12 \cdot 2^{2n}$. 11. -8. 12. -5. 15. в) $3b^{n+1}(2b+3)$.
- 4.12** 11. а) 0; б) 0; в) 0. 12. а) 80; б) 250; в) 21. 14. а) $(ax - 1)(ax^n + 1)$; б) $(3x^2 - 1)x(x^n - 1)$; в) $(a + 2x)(x^{n-1} - 1)$. 15. а + с и b - с. 16. а) $(x + 1)(x + 3)$; б) $(x - 1)x(x - 2)$; в) $(x^2+2)(x^2+3)$; г) $n(n+1)(n+2)$; д) $(y-4)(y-10)$; е) $(a - 5)(a - 1)$. 17. а) 39 999; б) 49 000; в) 10; г) 6,25.

- 4.13** 15. а) $(a + b)(a^2 - b)$; б) $(x - y - m)(x - y + m)$; в) $(a + b - d)(a + b + d)$; г) $(c - a + b)(c + a - b)$.
 16. а) $a - b$; б) $a + b$; в) $a^2 + ab + b^2$; г) $a + b$. 17. а) $a^2 + ab + b^2$; б) $1/(a + b)$; в) $1/(a - b)$.
 18. $a - c$. 19. а) 560; б) 10. 21. а) $(x - 1)^2 x (x + 1)(x^2 + 1)$; б) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.
 22. д) $64x^2$; е) $(m - 2)^2$. 23. а) 1; б) 1. 27. 25км^2 , 5км. 28. 10. 29. а) $a + 3c$, $b + 3c$;
 б) $3c$; в) $6m^2$. 30. $a + 3c$, $a + 5b$. 31. а) $(b - 1)(b + 1)(b^2 + 5)$. 33. а) 0,5; б) 3,88.
- 4.14** 3. да. 4. да. 5. да. 10. а) нет; б) да; в) нет. 11. а) нет; б) да; в) нет. 12. а) 0 и 2;
 б) 0 и -3; в) -7 и +7. 14. 5см. 15. $R^2 - r^2$. «Ну-ка, попробуй!» 2. $70,56\text{см}^2$.
- 4.15** 4. а) 264; б) 12; з) -1,8; и) $4\frac{1}{3}$. 5. а) 0,5; б) $9\frac{2}{3}$; в) $4\frac{1}{3}$. 6. $k=1$. 7. $m=4$. 8. 115. 9. $2m^2$.
- 4.16** 1. 24 и 8. 3. 108° и 72° . 4. 144° и 36° . 5. 20л и 10л. 6. 1,7л и 1,9л. 7. 10 и 12. 8. 54 и 18.
 9. 138кг. 10. 24. 11. 4см и 20см. 12. 1500м^2 . 13. 2км/ч. 14. 13,5км/ч. 15. а) $133\frac{1}{3}\text{кг}$.
 б) 30кг. 16. а) $5\frac{15}{22}$ кг. б) 17,6кг. 17. 20 лет и 5 лет. 18. 6 лет тому назад. 19. 72.
 20. 100. 21. 80км/ч. и 70км/ч. 22. 10. 23. 38 лет. 25. $8\frac{8}{9}$ часов. 26. 63 лет. 27. 10см.
 28. в 9 раз. «Ну-ка, попробуй!» 135, 225, 315, 405.
- 4.17** 11. а) 1; б) 7. 12. 1440. 15. 6. 16. а) 2; б) 2. 17. 8 членов. 18. 17. 19. 25 и 20. 20. 88%.
 21. 10кг. 22. а) $\frac{14}{27}$. б) $1\frac{7}{18}$. 23. 3 лет. 24. 23 лет.
 «Ну-ка, попробуй!» 1) наименьшее 77, наибольшее 83; 2) 1.
- 4.18** 3. 10, 55. 10. через 15 месяцев. 11. через 14 дней. 12. 3,5м. 13. а) да; б) да;
 в) нет; г) да. 14. а) 6; б) 1. 17. 4950. 18. а) нет; б) да. 20. 6. 21. больше 20 см и
 меньше 30 см. 22. 50%. 24. а) 0,8; б) 4,6.

Обзор Главы 4

2. а) > 0 ; б) > 0 ; в) > 0 ; г) > 0 ; 11. в) 5. 12. -8. 13. 4. 15. а) 32; б) 10. 18. $\frac{1}{3}$. 19. 24.
 23. 40км/ч; 25км/ч; 27. 24см. 28. $a^2 - b^2$. 29. $9a - 4b$. 30. $cd - ab$, $2c + 2d$. 33. только а).
 34. период 7, 9, 3, 1. последняя цифра 3. 35. девочек в 2 раза больше.
 «Ну-ка, попробуй!» 2км.

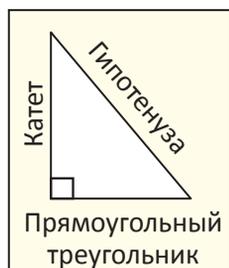
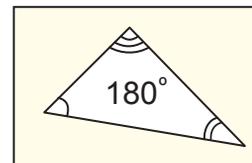
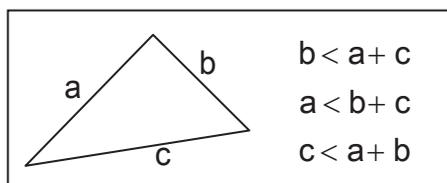
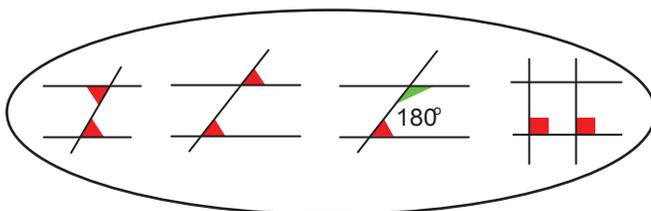
Глава 5

- 5.1** 8. (-3; 5). 10. 3,5. 11. -3. 12. $D(4; 2)$. 13. (-1; -4). 14. $D(-3; 3)$, $C(-1; 3)$ или $D(-3; 7)$, $C(-1; 7)$.
 15. а) (0; 0) и (4; 4); б) (3; 5) и (9; 5). 16. 20%. 17. 32%.
- 5.2** 1. (0,5; 5). 2. (0; 3). 3. (-3; 0), (0; -2). 10. IV четверть. 11. (3; -5) и (-3; 5). 12. а) I или III четверть;
 б) II или IV четверть. 15. (2; 6). 16. за 2 часа. 17. 59. «Ну-ка, попробуй!» (6; 3).
- 5.3** 5. б) 12; в) 0,5, 6,5 и 8; д) 3,5 недопустимое значение; е) $A = 0,5n$. 6. $S = 400 - 80t$. 10. за 4 ч.
 11. 144га. 12. 150. «Возможно ли это?» невозможно.
 «Ну-ка, попробуй!» нужно стереть 7; 720.
- 5.4** 3. 8 нужно заменить на 9. 4. $L = -\frac{5x}{3}$. 5. а) $\frac{2}{5}$; в) $x = \frac{5z}{2}$. 7. в) $S = 2t$. 9. г) $L = 0,25n$.
 «Ну-ка, попробуй!» 18.
- 5.5** 4. (1,5; -0,7). 6. (0; -10). 7. (-6; 0). 9. $T(-6; 0)$. 10. (2; 0). 11. 3. 12. 500 лари. 13. 24 см.
 14. 480км/ч. 15. 9,8 г. 16. -3. 17. 112. «Ну-ка, попробуй!» 9.

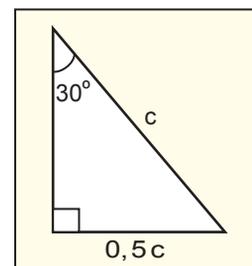
Обзор Главы 5

- 1.3. 2. 13. 3. (4; 6). 4. (4; -6). 5. (4; 2). 7. (0; 2) и (2; 0). 8. 28. 9. 18. 16. а) (0,5; 12); б) (0,6; 7).
 17. (1; 3). 18. (-1; 3), (3; 3). 21. б) (5; 1) и (3; 3). 22. (-4; 0) и (4; 0).

Справочный материал



Первый признак	
Второй признак	
Третий признак	



Свойства степени

$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n : a^m = a^{n-m}$	$(a^n)^m = a^{nm}$
--------------------	--	---------------------------	-----------------------	--------------------

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	$(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$

Символы, использованные в учебнике	
$\triangle ABC$	ABC Треугольник
$\sphericalangle ABC$	ABC Угол
\perp	Знак перпендикулярности прямых или отрезков
\parallel	Знак параллельности прямых или отрезков
\in	"Принадлежит"
\notin	"Не принадлежит"
\subset	Одно множество входит в другое множество
$\not\subset$	Одно множество не входит в другое множество
\emptyset	Пустое множество
\cup	Знак объединения множеств
\cap	Знак пересечения множеств
%	Процент
$^{\circ}$	Градус

Единицы измерения длины		
Грузинские	Английские	Международные
1 годжи - 4 см	1 миля = 1764 ярдов = 1 км 609 м	1 км = 1000 м
1 цида - 15 см	1 ярд = 3 фута = 91 см	1 м = 10 дм = 100 см
1 цкрта - 48 см	1 фут = 12 дюймов = 31 см 5 мм	1 дм = 10 см
1 адли - 96 см	1 дюйм = 2 см 5 мм	1 см = 10 мм

Единицы измерения		
Площади	Массы	Времени
1 кв. км = 1000000 кв. м	1 т - 1000 кг	1 год - 365 суток
1 га = 10000 кв. м	1 кг - 1000 г	1 сутки - 24 часа
1 га = 100 ар	1 ц - 100 кг	1 час - 60 минут
1 ар = 100 кв. м	1 г - 100 мг	1 минута - 60 секунд

Образование названий в метрической системе		
Приставка	Значение приставки	Пример
Деци	уменьшение в 10 раз	1 дециметр = 0,1 метра
Санتي	уменьшение в 100 раз	1 сантиметр = 0,01 метра
Милли	уменьшение в 1000 раз	1 миллиграмм = 0,001 грамма
Микро	уменьшение в 1000000 раз	1 микрометр = 0,000001 метра
Дека	увеличение в 10 раз	1 декалитр = 10 литров
Гекто	увеличение в 100 раз	1 гектолитр = 100 литров
Кило	увеличение в 1000 раз	1 килограмм = 1000 грамм
Мега	увеличение в 1000000 раз	1 мегатонна = 1000000 тонна

В случае выявления фактов продажи этого учебника,
просьба сообщить на горячую линию:

(+995 32) 2 200 220

Контактная информация

www.mat.ge