თინა ბექაური
გიორგი ბექაური
ნოდარ ზარიძე
ავთანდილ საგინაშვილი

მათემატიკა 11

მოსწავლის წიგნი

2024

თინა ბექაური
გიორგი ბექაური
ნოდარ ზარიძე
ავთანდილ საგინაშვილი

მათემატიკა 11

XI კლასის სახელმძღვანელო

რედაქტორი: ავთანდილ საგინაშვილი
გარეკანის დიზაინი: ივანე საგინაშვილი
დიზაინი და დაკაბადონება: ალექსი კახნიაშვილი

საკონტაქტო ინფორმაცია: ტელ.: 599 68 09 74
ელ-ფოსტა: avtandilsaginashvili@yahoo.com
ელ. რესურსი: www.mat.ge

გამოცემულია 2024 წელს

ს ა რ ჩ ე ვ ი

სახელმძღვანელოში გამოყენებული პირობითი ნიშნები და რუბრიკები

პირობითი ნიშნები

– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული სტანდარტული დავალებები

– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული არასტანდარტული (მაღალი კოგნიტური დონის) დავალებები

– გამეორებასთან დაკავშირებული დავალებები

რუბრიკები

შესაძლებელია თუ არა? აბა, სცადე!	კვლევითი ხასიათის დავალებები
ჯგუფური სამუშაო წყვილებში სამუშაო	დავალებები, რომელთაც მოსწავლეთა ჯგუფები ან წყვილები ასრულებენ კლასში

ამ თავში გაიმეორებ:

- გამონათქვამთა ჯამისა და ნამრავლის განმარტებებსა და მათ ჭეშმარიტების ცხრილს;
- პირობითი გამონათქვამისა და ტოლფასობის განმარტებებსა და მათ ჭეშმარიტების ცხრილს;
- პირობითი გამონათქვამის შებრუნებული, მოპირდაპირე და ტოლფასი გამონათქვამების კონსტრუქციებს;
- გამონათქვამის უარყოფის განმარტებას;
- გამონათქვამთა ჯამისა და ნამრავლის უარყოფის ფორმულებს;
- თეორემის დამტკიცების საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდს;
- შებრუნებული, მოპირდაპირე და ტოლფასი თეორემების კონტრუქციებს.

ამ თავში ისწავლი:

- ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არის ცნებას;
- მათემატიკური გამონათქვამების სახეობებს;
- მათემატიკური თეორიის აგების სქემას;
- თეორემის დამტკიცების მეთოდებს.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- გამონათქვამთა ჭეშმარიტების ცხრილების შედგენას;
- გამონათქვამთა ტოლფასობის დასადგენად ჭეშმარიტების ცხრილების გამოყენებას;
- ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არის დადგენას;
- მათემატიკური გამონათქვამების სახეობათა გარჩევას;
- თეორემის შებრუნებულის, მოპირდაპირესა და ტოლფასის აგებას;
- თეორემის დასამტკიცებლად დედუქციისა და საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდების გამოყენებას.

ადა ბაირონი
1815-1852 წწ.
დიდი ინგლისელი პოეტის, ჯორჯ ბაირონის ქალიშვილი, პირველი პროგრამისტი ქალი.
მან შექმნა კალკულატორის პროგრამა და აღწერა ალგორითმიზაციის ძირითადი პრინციპები.

კომპლექსური დავალება
„აუცილებელი და საკმარისი“

ადამიანს ამა თუ იმ მიზნის მისაღწევად გარკვეული გადაწყვეტილების მიღება და შესაბამისი მოქმედების განხორციელება ესაჭიროება.

გადაწყვეტილების მიღებისას მნიშვნელოვანია გავარკვიოთ, რამდენად აუცილებელი ან რამდენად საკმარისია დასახული მიზნისთვის ესა თუ ის ქმედება.

იმისათვის, რომ თეორიული ან პრაქტიკული პრობლემა გადაჭრა, აუცილებელია კარგად გაიაზრო მისი არსი, დასახო მოქმედებათა ის მინიმუმი, რომელიც შედეგამდე მიგიყვანს, ანუ უნდა დაადგინო პრობლემის გადაჭრისთვის აუცილებელი და საკმარისი მოქმედებები.

მათემატიკაში დებულებების ჩამოყალიბება სიტყვებით „აუცილებელი“ და „საკმარისი“ ჩამოყალიბება ცნებათა თვისებებისა და მათ შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირის ნათლად წარმოდგენაში გვეხმარება. მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითები:

იმისათვის, რომ ნატურალური რიცხვი 6-ზე გაიყოს, საკმარისია, ეს რიცხვი გაიყოს 12-ზე, თუმცა, ეს არაა აუცილებელი. მაგალითად, 18 იყოფა 6-ზე, მაგრამ არ იყოფა 12-ზე.

იმისათვის, რომ რიცხვი 6-ზე გაიყოს, აუცილებელია, რომ რიცხვი გაიყოს 3-ზე, მაგრამ ეს არაა საკმარისი. მაგალითად, 9 იყოფა 3-ზე და არ იყოფა 6-ზე.

იმისათვის, რომ რიცხვი 6-ზე გაიყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რიცხვი გაიყოს 2-სა და 3-ზე.

შენი დავალება:

1. მოცემულ წინადადებებში გამოტოვებულ ადგილას ჩასვი შემდეგი სიტყვებიდან ერთ-ერთი: „აუცილებელია და არაა საკმარისი“, „საკმარისია და არაა აუცილებელი“, „აუცილებელია და საკმარისი“ ისე, რომ მიღებული წინადადება იყოს მართებული:

ა) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი . . . სამივე კუთხე ჰქონდეთ ტოლი;

ბ) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი . . . სამივე გვერდი ჰქონდეთ ტოლი;

გ) იმისათვის, რომ პარალელოგრამი იყოს მართკუთხედი . . . მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;

დ) იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი იყოს მართკუთხედი . . . მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;

ე) იმისათვის, რომ $A \Rightarrow B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი . . . A იყოს მცდარი;

ვ) იმისათვის, რომ $A \vee B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი . . . A იყოს ჭეშმარიტი;

ზ) იმისათვის, რომ $A \wedge B$ გამონათქვამი იყოს მცდარი . . . A იყოს მცდარი.

2. ჩასმის შედეგად მიღებული წინადადებების მართებულობა დაასაბუთე დედუქციის, კონტრმაგალითის ან საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენებით.

3. შეადგინე მართებული წინადადებები მათემატიკის, მეცნიერებისა და ყოფაცხოვრების სხვადასხვა სფეროდან, რომელთა ჩამოყალიბებაში მონაწილეობას მიიღებს სიტყვათა წყობა: „აუცილებელია და არაა საკმარისი“, „საკმარისია და არაა აუცილებელი“, „აუცილებელია და საკმარისი“.

4. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- ყოფისა და მეცნიერების რა სფეროებიდან მოიძიე შესაბამისი მაგალითები;
- დასაბუთების რა მეთოდები გამოიყენე;
- სასკოლო სახელმძღვანელოს გარდა, კიდევ რა ლიტერატურა დაგჭირდა დავალების შესასრულებლად.

1.1 მოქმედებები გამონათქვამებზე

მიზანი

ლოგიკური მოქმედებების გახსენება, ჭეშმარიტების ცხრილის აგება და გამონათქვამთა ტოლფასობის დასადგენად გამოყენება

გამონათქვამი არის წინადადება, რომელზეც შეიძლება ითქვას, რომ ის ჭეშმარიტია ან მცდარია. მაგალითად,

ა) 9 კენტი რიცხვია;

ბ) 9 მარტივი რიცხვია.

მოცემული ორივე წინადადება გამონათქვამია, ამასთან, ა) წინადადება ჭეშმარიტია, ხოლო ბ) წინადადება – მცდარი.

გამონათქვამებს დიდი ლათინური ასოებით აღვნიშნავთ (თუმცა, შესაბამის ლიტერატურაში ზოგჯერ პატარა ასოებითაც აღნიშნავენ).

პირველ რიგში, გავიხსენოთ „ან“ , „და“ კავშირებით და „თუ . . . , მაშინ“ და „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“ სიტყვებით ნაწარმოები ლოგიკური ოპერაციები გამონათქვამებზე.

ვთქვათ, A და B მოცემული გამონათქვამებია.

1. „A ან B“ – გამონათქვამების **ჯამი, ანუ დიზიუნქცია,** აღინიშნება ჩანაწერით: $A+B$ ან $A \vee B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული A და B გამონათქვამებიდან ერთი მაინცაა ჭეშმარიტი.

მაგალითად, განვიხილოთ გამონათქვამები:

ა) $8<10$ ან $3>5$;

ბ) $2+3=5$ ან $7-1=6$;

გ) $5^2=15$ ან $4 \cdot 6=26$.

ა) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია მასში შემავალი ერთ-ერთი გამონათქვამი, ბ) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი, ხოლო გ) გამონათქვამი მცდარია, რადგან მცდარია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი.

2. „A და B“ – გამონათქვამების **ნამრავლი, ანუ კონიუნქცია**, აღინიშნება ჩანაწერით: $A \cdot B$ ან $A \wedge B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ორივე გამონათქვამი.

მაგალითად, გამონათქვამებიდან:

ა) $8<10$ და $3>5$;

ბ) $2+3=5$ და $7-1=6$;

გ) $5^2=15$ და $4 \cdot 6=26$.

ა) გამონათქვამი მცდარია, რადგან ჭეშმარიტია მასში შემავალი მხოლოდ ერთი გამონათქვამი, ბ) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი, ხოლო გ) გამონათქვამი მცდარია, რადგან მცდარია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი.

3. „თუ A, მაშინ B“ – **პირობითი გამონათქვამი,** ანუ **იმპლიკაცია,** აღინიშნება ჩანაწერით: $A \Rightarrow B$ ან $A \to B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ჭეშმარიტი, ხოლო B მცდარი გამონათქვამია.

მაგალითად, გამონათქვამებიდან:

ა) $8<10 \Rightarrow 3>5$;

ბ) $2+3=5 \Rightarrow 7-1=6$;

გ) $5^2=15 \Rightarrow 4 \cdot 6=26$.

მხოლოდ ა) გამონათქვამია მცდარი, რადგან $8<10$ ჭეშმარიტი, ხოლო $3>5$ მცდარი გამონათქვამია.

$A\Rightarrow B$ გამონათქვამში A გამონათქვამს ეწოდება **პირობა**, ხოლო B გამონათქვამს – **დასკვნა**.

$A\Rightarrow B$ პირობითი გამონათქვამის წაკითხვის სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს. მაგალითად: „A-დან გამომდინარეობს B“, „B-სთვის საკმარისია A“, „A-სთვის აუცილებელია B“, „A-ს შედეგია B“ და სხვ.

4. „A მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B“ – **ტოლფასობა,** ანუ **ეკვივალენცია,** აღინიშნება ჩანაწერით $A\Leftrightarrow B$ ან $A\leftrightarrow B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ან ორივე გამონათქვამი მცდარი. მაგალითად, გამონათქვამებიდან:

ა) $8<10\Leftrightarrow 3>5$;

ბ) $2+3=5\Leftrightarrow 7-1=6$;

გ) $5^2=15\Leftrightarrow 4\cdot 6=26$,

ა) არის მცდარი გამონათქვამი, რადგან $8<10$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ხოლო $3>5$ მცდარი, ბ) ჭეშმარიტია, რადგან ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ხოლო გ) ჭეშმარიტია, რადგან ორივე გამონათქვამი მცდარია.

განმარტებულ გამონათქვამებს შედგენილი, ანუ რთული გამონათქვამები ეწოდება. ასეთი გამონათქვამების მნიშვნელობის დასადგენად ჭეშმარიტების ცხრილები გამოიყენება. 1-ელი ცხრილით ოთხივე შედგენილი გამონათქვამის ჭეშმარიტების ცხრილი ერთადაა წარმოდგენილი.

A	B	$A\vee B$	$A\wedge B$	$A\Rightarrow B$	$A\Leftrightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ	მ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ
მ	მ	მ	მ	ჭ	ჭ

ცხრილი 1

ორ P და Q გამონათქვამს ეწოდება **ტოლფასი**, თუ მათ მიერ შედგენილი $P\Leftrightarrow Q$ ტოლფასობა ჭეშმარიტი გამონათქვამია. ტოლფას გამონათქვამებს ერთი და იგივე ჭეშმარიტების ცხრილი აქვთ. იმ ფაქტის აღსანიშნავად, რომ P და Q ტოლფასი გამონათქვამებია, $P=Q$ ტოლობას გამოვიყენებთ.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ $A\Leftrightarrow B$ და $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$ ტოლფასი გამონათქვამებია.

დამტკიცება. საკმარისია, შევადგინოთ და შევადაროთ მოცემული გამონათქვამების ჭეშმარიტების ცხრილები.

A	B	$A\Rightarrow B$	$B\Rightarrow A$	$(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$	$A\Leftrightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	მ	მ
მ	მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ

ცხრილი 2

ვხედავთ, რომ მე-2 ცხრილში A-სა და B-ს ყველა მნიშვნელობისათვის $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ და A⇔B გამონათქვამების მნიშვნელობები ემთხვევა, რაც მათ ტოლფასობას ნიშნავს.

მაგალითი 2. მოცემულია ორი გამონათქვამი:

A: ოთხკუთხედი პარალელოგრამია;

B: ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

დავამტკიცოთ, რომ A და B ტოლფასი გამონათქვამებია. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ჭეშმარიტია, როგორც A⇒B, ისე მისი შებრუნებული B⇒A გამონათქვამი.

A⇒B გამონათქვამი სიტყვიერად ნიშნავს:

თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

თუ A ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ანუ თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ პარალელოგრამის თვისების გამო მისი დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა. ე.ი. B გამონათქვამიც ჭეშმარიტია და ამიტომ ჭეშმარიტია A⇒B გამონათქვამი. თუ A მცდარი გამონათქვამია, მაშინ A⇒B გამონათქვამი განმარტების თანახმადაა ჭეშმარიტი.

B⇒A გამონათქვამი სიტყვიერად ნიშნავს:

თუ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

თუ B ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ანუ თუ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ პარალელოგრამის ნიშნის თანახმად, ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, ე.ი. A გამონათქვამიც ჭეშმარიტია და ამიტომ, ჭეშმარიტია B⇒A გამონათქვამი. თუ B მცდარი გამონათქვამია, მაშინ B⇒A გამონათქვამი განმარტების თანახმადაა ჭეშმარიტი.

დამტკიცებული B=A ტოლფასობა სიტყვიერად შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ:

ოთხკუთხედი პარალელოგრამია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

ან, რაც იგივეა:

იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი პარალელოგრამი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე გაიყოს.

თუ A⇒B პირობით გამონათქვამში პირობას და დასკვნას გადავანაცვლებთ, მივიღებთ მოცემულის **შებრუნებულ** B⇒A გამონათქვამს. მე-2 ცხრილიდან ჩანს, რომ საზოგადოდ, A⇒B და B⇒A ტოლფასი გამონათქვამები არაა.

მაგალითად, ორი გამონათქვამი:

A: რიცხვი 7-ის ტოლია,

B: რიცხვი კენტია,

არაა ტოლფასი გამონათქვამები. მართლაც, A⇒B ჭეშმარიტი გამონათქვამია, რადგან 7 კენტი რიცხვია, მაგრამ B⇒A მცდარია, რადგან კენტი რიცხვი შეიძლება 7-ის ტოლი არ იყოს.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ A⇒B გამონათქვამის ჭეშმარიტების დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ A ჭეშმარიტია, მაშინ ჭეშმარიტია B-ც, რადგან A-ს მცდარობის შემთხვევაში, A⇒B გამონათქვამი B-ს მნიშვნელობისგან დამოუკიდებლადაა ჭეშმარიტი.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ წინადადებას ეწოდება გამონათქვამი?
2. რა შემთხვევაშია მცდარი ორი გამონათქვამის ჯამი?
3. რა შემთხვევაშია ჭეშმარიტი ორი გამონათქვამის ნამრავლი?
4. რა კომპონენტებისაგან შედგება პირობითი გამონათქვამი?
5. როგორ გამონათქვამებს ეწოდება ტოლფასი?

სავარჯიშოები

1 ვთქვათ, A ჭეშმარიტი, ხოლო B მცდარი გამონათქვამია. შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელი გამონათქვამებია მცდარი?
ა) $A\Rightarrow B$; ბ) $A\vee B$; გ) $B\Rightarrow A$; დ) $A\wedge B$; ე) $A\Leftrightarrow B$.

2 დაასაბუთე, რომ ტოლფასია გამონათქვამები:
ა) $A\vee B$ და $B\vee A$; ბ) $A\wedge B$ და $B\wedge A$; გ) A და $A\vee A$; დ) A და $A\wedge A$.

3 მაშომ და ლუკამ გამოთქვეს ვარაუდი გამოსახულების მნიშვნელობაზე:
მაშო: მნიშვნელობა კენტია ან 10-ზე მეტი;
ლუკა: მნიშვნელობა კენტია და 10-ზე მეტი.
დაადგინე, ამ ორი ვარაუდიდან რომელია მცდარი, თუ გამოსახულების მნიშვნელობა 9-ის ტოლი აღმოჩნდა.

4 მასწავლებელმა ტატოს დაავალა ამოეხსნა, სულ მცირე, 10 მაგალითი ან 5 ამოცანა. ტატომ ამოხსნა 12 მაგალითი და 3 ამოცანა. შეასრულა თუ არა ტატომ დავალება?

5 მასწავლებელმა ნიცას დაავალა ამოეხსნა, სულ მცირე, 10 მაგალითი და 5 ამოცანა. ნიცამ ამოხსნა 12 მაგალითი და 3 ამოცანა. შეასრულა თუ არა ნიცამ დავალება?

6 კლასში 11 მოსწავლე ქერაა, 8 – ცისფერთვალება, ხოლო 6 – ქერა და ცისფერთვალება. რამდენი მოსწავლეა კლასში ქერა ან ცისფერთვალება?

7 კლასის 15 მოსწავლე ვარჯიშობს კალათბურთის სექციაში, 12 – ფრენბურთის სექციაში, ხოლო 24 – კალათბურთის ან ფრენბურთის სექციებში. რამდენი მოსწავლე ვარჯიშობს კალათბურთისა და ფრენბურთის სექციაში?

8 მოცემულია ორი წინადადება:
ა) n და m კენტი ნატურალური რიცხვებია;
ბ) n ან m კენტი ნატურალური რიცხვია.
ამ წინადადებებიდან რომელია მცდარი, თუ ცნობილია, რომ $n+m$ კენტი ნატურალური რიცხვია?

9 შემდეგი პირობითი გამონათქვამებიდან რომლებია ჭეშმარიტი?
ა) თუ 11 ლუწი რიცხვია, მაშინ 12 მარტივი რიცხვია;
ბ) თუ 12 შედგენილი რიცხვია, მაშინ 11 ლუწი რიცხვია;
გ) თუ $3>4$ ან $4>3$, მაშინ $5>6$;
დ) თუ $3>4$ და $4>3$, მაშინ $5>6$.

10 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისათვის ჭეშმარიტია გამონათქვამი:

ა) $A \Rightarrow (A \vee B)$;   ბ) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$;   გ) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$.

11 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი P, Q და R გამონათქვამებისათვის ჭეშმარიტია გამონათქვამი:

$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

12 დაამტკიცე მოცემული გამონათქვამების ტოლფასობა:

ა) ნატურალური რიცხვი იყოფა 3-ზე;

ბ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერის ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე.

13 დაამტკიცე მოცემული გამონათქვამების ტოლფასობა;

ა) პარალელოგრამი რომბია;

ბ) პარალელოგრამის დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

14 დაადგინე, ტოლფასია თუ არა მოცემული გამონათქვამები:

ა) ოთხკუთხედი რომბია;

ბ) ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

15 მოცემულია ორი გამონათქვამი:

A: რიცხვი 23-ის ტოლია;

B: რიცხვი მარტივია.

ჩამოაყალიბე $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ გამონათქვამები სიტყვიერად და გაარკვიე მათი ჭეშმარიტება-მცდარობა.

16 მოცემულია ორი გამონათქვამი:

A: სამკუთხედი მართკუთხაა;

B: სამკუთხედის ორი გვერდის კვადრატების ჯამი მესამე გვერდის კვადრატის ტოლია.

ჩამოაყალიბე $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ გამონათქვამები სიტყვიერად და გაარკვიე მათი ჭეშმარიტება-მცდარობა.

17 მოცემულია ორი გამონათქვამი:

A: რიცხვს გამყოფების კენტი რაოდენობა აქვს;

B: რიცხვი სრული კვადრატია.

ჩამოაყალიბე $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ გამონათქვამები სიტყვიერად და გაარკვიე მათი ჭეშმარიტება-მცდარობა.

18 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი P, Q და R გამონათქვამისათვის სრულდება ტოლობა:

ა) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;   ბ) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

19 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი A, B და C სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

ა) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;   ბ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.2 ცვლადიანი გამონათქვამი (პრედიკატი)

მიზანი ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არისა და ტოლფასობის ცნებათა განმარტება და გამოყენება

განვიხილოთ უტოლობა: $x^2-6x+8>0$. ეს უტოლობა არაა გამონათქვამი, რადგან შეუძლებელია ვთქვათ, რომ ის ჭეშმარიტია ან მცდარია. მაგრამ, თუ ამ უტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ 5-ს, მივიღებთ ჭეშმარიტ გამონათქვამს, ხოლო თუ ჩავსვამთ 3-ს, მიღებული გამონათქვამი იქნება მცდარი.

ცვლადის (ცვლადების) შემცველ წინადადებას, რომელიც ცვლადის (ცვლადების) კონკრეტული მნიშვნელობებით ჩანაცვლების შემდეგ გამონათქვამად გადაიქცევა, **ცვლადიანი გამონათქვამი,** ანუ **პრედიკატი** ეწოდება.

ცვლადიან გამონათქვამში, მისი შინაარსიდან გამომდინარე, ცვლადი შეიძლება იღებდეს როგორც რიცხვით, ისე სხვა სახის მნიშვნელობებს. მაგალითად:

ა) „x კენტი რიცხვია“ პრედიკატის შემთხვევაში x ცვლადი ღებულობს რიცხვით მნიშვნელობებს;

ბ) „x ოთხკუთხედი პარალელოგრამია“ პრედიკატში x ოთხკუთხედების სიმრავლის ელემენტია;

გ) „x კენტი ფუნქციაა“ პრედიკატში x რიცხვით ფუნქციათა სიმრავლის ელემენტია.

პრედიკატი შეიძლება რამდენიმე ცვლადიანი იყოს. მაგალითად, ჩანაწერი „$x^2+y^2=1$“ ორცვლადიანი, ხოლო „$x^2+y^2=z^2$“ სამცვლადიანი პრედიკატია.

პრედიკატის, ანუ ცვლადიანი გამონათქვამის აღნიშვნაში ცვლადებს უთითებენ. მაგალითად, $A(x)$: $2x=3$, ან $A(x;y;z)$: $x^2+y^2=z^2$.

ცვლადის (ცვლადების) ყველა იმ მნიშვნელობათა ერთობლიობას, რომელთათვისაც ცვლადიანი გამონათქვამი ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ცვლადიანი გამონათქვამის **ჭეშმარიტების არეს** უწოდებენ. მაგალითად, „$x^2-6x+8>0$“ ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არეა $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$ სიმრავლე (ახსენი, რატომ?).

ტოლი ჭეშმარიტების არის მქონე ცვლადიან გამონათქვამებს **ტოლფასი ცვლადიანი გამონათქვამები** ეწოდება. მაგალითად, „$x^2-1=0$“ და „$|x|=1$“ ტოლფასი ცვლადიანი გამონათქვამებია, რადგან ორივეს ჭეშმარიტების არეა $\{-1; +1\}$ სიმრავლე.

მაგალითი. მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი: A: $2x+3>7$; B: $5-3x>-4$.

დავადგინოთ $A\wedge B$ და $A\vee B$ გამონათქვამთა ჭეშმარიტების არეები.

ამოხსნა. $A\wedge B$ ნამრავლი ჭეშმარიტია ნიშნავს, ჭეშმარიტია როგორც A, ისე B უტოლობა. ეს კი მაშინ და მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა x არის $\begin{cases}2x+3>7\\5-3x>-4\end{cases}$ სისტემის ამონახსნი, ანუ $x\in(-\infty;3)\cap(2;+\infty)=(2;3)$.

$A\vee B$ ჯამი ჭეშმარიტია ნიშნავს, ჭეშმარიტია A ან B უტოლობა. ეს კი მაშინ და მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა x არის $\left[\begin{array}{l}2x+3>7\\5-3x>-4\end{array}\right.$ გაერთიანების ამონახსნი, ანუ

$$x\in(-\infty;3)\cup(2;+\infty)=(-\infty;+\infty).$$

პასუხი. $A\wedge B$-ს ჭეშმარიტების არეა (2;3) შუალედი, $A\vee B$-ს ჭეშმარიტების არეა $(-\infty;+\infty)$ შუალედი.

უპასუხე კითხვებს:

1. არის თუ არა პრედიკატი გამონათქვამი?
2. რა არის პრედიკატის ჭეშმარიტების არე?
3. რა შემთხვევაშია ორი პრედიკატი ტოლფასი?

სავარჯიშოები

1 მოცემული სამეულებიდან რომელი ეკუთვნის „$x^2+y^2=z^2$“ პრედიკატის ჭეშმარიტების არეს?

ა) 1, 2, 3; ბ) 2, 3, 4; გ) 3, 4, 5; დ) 5, 6, 7.

2 იპოვე ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არე:

ა) $x^2-4=0$; ბ) $x^2-4x+3=0$; გ) $x^2-8x+15\le 0$; დ) $x^2\ge 8$.

3 იპოვე ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არე:

ა) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება 0-ით;

ბ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება 0-ით ან 5-ით;

გ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება ლუწი ციფრით;

დ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება კენტი ციფრით.

4 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $2x-1>7$; B: $3x+5<8$.

იპოვე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

5 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $4x-y=3$; B: $2x+y=9$.

იპოვე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

6 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $y+2x\ge 4$; B: $x-3y\ge 6$.

საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

7 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $x^2+y^2\le 4$; B: $x^2+y^2\ge 1$.

საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

8 მოცემულია სამი გამონათქვამი:

A: ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია;

B: ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია;

C: ოთხკუთხედი კვადრატია.

ჩამოაყალიბე სიტყვიერად და დაადგინე $(A\wedge B)\Rightarrow C$ პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არე.

1.3 გამონათქვამის უარყოფა. კონტრმაგალითი

მიზანი

გამონათქვამის უარყოფის კონსტრუქციის აგება; გამონათქვამის მცდარობის კონტრმაგალითის მეთოდით დამტკიცება; „და“ და „ან“ კავშირების უარყოფის ფორმულები.

განვიხილოთ ორი გამონათქვამი:

A: „სამკუთხედი ტოლფერდაა“

B: „სამკუთხედი არაა ტოლფერდა“

ცხადია, რომ თუ ჭეშმარიტია A გამონათქვამი, მაშინ მცდარია B გამონათქვამი და პირიქით, თუ მცდარია A გამონათქვამი, მაშინ ჭეშმარიტია B გამონათქვამი. მოცემულ B გამონათქვამს A გამონათქვამის **უარყოფა** ეწოდება.

განმარტება. A გამონათქვამის უარყოფა ეწოდება ისეთ გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია, თუ A მცდარია და მცდარია, თუ A ჭეშმარიტია.

A გამონათქვამის უარყოფა $\overline{A}$ ან $\neg A$ ჩანაწერით აღინიშნება.

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია გამონათქვამისა და მისი უარყოფის მაგალითები:

A	$\overline{A}$
11 კენტი რიცხვია.	11 არაა კენტი რიცხვი.
სირაქლემა ფრინველია.	სირაქლემა არაა ფრინველი.
თბილისი საქართველოს დედაქალაქია.	თბილისი არაა საქართველოს დედაქალაქი.
არსებობენ მფრინავი თევზები.	არ არსებობენ მფრინავი თევზები ან არცერთი თევზი არ ფრენს.
ყველა ფრინველმა იცის ფრენა.	არსებობს ფრინველი რომელმაც არ იცის ფრენა.

ამრიგად, როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, A და $\overline{A}$ გამონათქვამებიდან ერთი-ერთი ჭეშმარიტია, მეორე კი – მცდარი.

გამონათქვამის უარყოფის საწარმოებლად ვიყენებთ ნაწილაკს „არ“ (ან „არა“), მაგრამ, თუ გამონათქვამი უკვე შეიცავს „არ“ ნაწილაკს, მაშინ ამ გამონათქვამის უარყოფისათვის ეს ნაწილაკი უნდა გამოვტოვოთ. მაგალითად, გამონათქვამის „მე არ ვიყავი სკოლაში“ უარყოფა იქნება „მე ვიყავი სკოლაში“.

ზოგჯერ უარყოფას არასწორად აწარმოებენ. მაგალითად, არის თუ არა გამონათქვამის „სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა“ უარყოფა „სამკუთხედი მახვილკუთხაა“? მართალია, ორივე ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტი ერთდროულად ვერ იქნება, მაგრამ თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ ორივე გამონათქვამი მცდარი აღმოჩნდება, რაც ეწინააღმდეგება უარყოფის განმარტებას.

ცხრილში მოცემული გამონათქვამი „ყველა ფრინველმა იცის ფრენა“, მცდარი გამონათქვამია. ამის დასამტკიცებლად არაა საკმარისი მისი უარყოფის „არსებობს ფრინველი, რომელმაც არ იცის ფრენა“ ჩამოყალიბება. საჭიროა მოვიყვანოთ ერთი მაინც ისეთი ფრინველის მაგალითი, რომელმაც არ იცის ფრენა. ასეთია, მაგალითად, პინგვინი. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ პინგვინი არის გამონათქვამის „ყველა ფრინველმა იცის ფრენა“ მცდარობის დამამტკიცებელი **კონტრმაგალითი.**

ცხრილში გამონათქვამები და მათი მცდარობის დამამტკიცებელი კონტრმაგალითებია მოცემული.

გამონათქვამი	კონტრმაგალითი
ყველა ყვავილი სურნელოვანია.	გვირილა არ არის სურნელოვანი.
ყველა ცხოველი ძუძუმწოვარაა.	ნიანგი არაა ძუძუმწოვარა.
ყველა გზა რომში მიდის.	თბილისი-კოჯრის გზა რომში არ მიდის.
ყველა ჩემი კლასელი ფრიადოსანია.	ჩემი კლასელი გოჩა არაა ფრიადოსანი.
ყველა მარტივი რიცხვი კენტია.	2 მარტივია და ლუწი.
ნებისმიერი მთელი რიცხვის კვადრატი დადებითია.	$0^2=0$.
ნებისმიერი შედგენილი რიცხვი ლუწია.	15 შედგენილია და კენტი.

განვიხილოთ „ან“ და „და“ კავშირებით ნაწარმოები გამონათქვამები:

ა) „მე წავალ კინოში ან წავალ თეატრში“;

ბ) „მე წავალ კინოში და წავალ თეატრში“.

იმისათვის, რომ ა) გამონათქვამი არ განხორციელდეს, ანუ იყოს უარყოფილი, არ უნდა წავიდე არც კინოში და არც თეატრში. ე.ი. ა) გამონათქვამის უარყოფაა „არ წავალ კინოში და არ წავალ თეატრში“.

იმისათვის, რომ ბ) გამონათქვამი არ განხორციელდეს, ანუ იყოს უარყოფილი, საკმარისია, არ წავიდე ერთგან მაინც, ანუ არ წავიდე კინოში ან არ წავიდე თეატრში. ე.ი. ბ) გამონათქვამის უარყოფაა „არ წავალ კინოში ან არ წავალ თეატრში“.

ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}; \quad \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B};$$

ამ ფორმულების დასამტკიცებლად საკმარისია შევადგინოთ და შევადაროთ შესაბამისი ჭეშმარიტების ცხრილები (შეადგინე დამოუკიდებლად).

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ გამონათქვამს $A \Rightarrow B$ გამონათქვამის **მოპირდაპირე გამონათქვამი** ეწოდება. ჭეშმარიტების ცხრილების საშუალებით მტკიცდება შემდეგი ფორმულა:

$$\left(\overline{A} \Rightarrow \overline{B}\right) = \left(B \Rightarrow A\right).$$

სიტყვიერად ეს ფორმულა ასე ყალიბდება: პირობითი გამონათქვამის მოპირდაპირე გამონათქვამი მისი შებრუნებულის ტოლფასია.

თუ ამ ფორმულაში პირობას და დასკვნას ადგილებს შევუცვლით, მივიღებთ:

$$\left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right) = \left(A \Rightarrow B\right).$$

ანუ, პირობითი გამონათქვამი მისი შებრუნებულის მოპირდაპირე გამონათქვამის ტოლფასია.

მაგალითად, გამონათქვამის:

„თუ პარალელოგრამში დიაგონალები ტოლია, მაშინ პარალელოგრამი მართკუთხედია“ ტოლფასი გამონათქვამია:

„თუ პარალელოგრამი მართკუთხედი არაა, მაშინ პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლი არაა“.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა შემთხვევაშია მოცემული გამონათქვამის უარყოფა ჭეშმარიტი? მცდარი?
2. რის ტოლია ორი გამონათქვამის ჯამის უარყოფა? ნამრავლის უარყოფა?
3. რა არის მოპირდაპირე პირობითი გამონათქვამი?
4. რისი ტოლფასია მოპირდაპირე გამონათქვამის შებრუნებული?

სავარჯიშოები

1 შეადგინე გამონათქვამის უარყოფის ჭეშმარიტების ცხრილი.

2 ჩამოაყალიბე მოცემულის საწინააღმდეგო გამონათქვამი:
ა) ბეღურა ფრინველია; ბ) ქეთინო ფრიადოსანია;
გ) ბათუმი საქართველოს დედაქალაქია; დ) 9 არის 18-ის ჯერადი;
ე) დღეს კინოში მივდივარ.

3 მოცემული გამონათქვამისთვის შეადგინე მისი უარყოფა. დაადგინე მათგან რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი:
ა) 57 მარტივი რიცხვია;
ბ) 13-ს მხოლოდ ორი გამყოფი აქვს;
გ) 105 უნაშთოდ იყოფა 7-ზე;
დ) არ არსებობს 7, 8 და 15 სანტიმეტრიანი გვერდების მქონე სამკუთხედი;
ე) არ არსებობს მრავალკუთხედი, რომლის შიგა კუთხეების ჯამი 1440°-ის ტოლია.

4 მოცემულია ორი გამონათქვამი:
A: სამკუთხედი ტოლფერდაა; B: სამკუთხედი მართკუთხაა.
დაასაბუთე, რომ B გამონათქვამი არ არის A გამონათქვამის უარყოფა;

5 დაასაბუთე გამონათქვამის მცდარობა კონტრმაგალითის მოყვანით:
ა) ყოველი ნატურალური რიცხვი მარტივია ან შედგენილი;
ბ) ყოველი შედგენილი ნატურალური რიცხვი იყოფა 2-ზე ან 3-ზე;
გ) ყველა რიცხვი რაციონალურია;
დ) ნებისმიერ მართკუთხედში ჩაიხაზება წრე.

6 შეადგინე მოცემული გამონათქვამის უარყოფა:
ა) ყოველი რიცხვი რაციონალურია ან ირაციონალური;
ბ) ყოველი კვადრატი რომბია და მართკუთხედია;
გ) ყველა სპორტსმენი სწრაფია და მოქნილი;
დ) ყველა ფრინველს შეუძლია ცურვა ან ფრენა.

7 დაასაბუთე, რომ ნებისმიერი A გამონათქვამისთვის $A\cdot\overline{A}$ მცდარი, ხოლო $A+\overline{A}$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია.

8 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისთვის $A\Rightarrow B$ პირობითი გამონათქვამი $\overline{A}\vee B$ გამონათქვამის ტოლფასია.

9 დაასაბუთე, რომ ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისთვის ჭეშმარიტია $(A\Rightarrow B)\vee(B\Rightarrow A)$ გამონათქვამი.

10 მოცემულია ცვლადიანი გამონათქვამი: „ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის n^2+5n+1 კენტი რიცხვია“. შეადგინე ამ გამონათქვამის უარყოფა და დაადგინე, რომელი მათგანია ჭეშმარიტი.

1.4 გამონათქვამები მათემატიკაში

მიზანი

მათემატიკური გამონათქვამების დახასიათება; თეორემის დამტკიცების მეთოდების განხილვა

მათემატიკაში ძირითადად სამი სახის გამონათქვამი გვხვდება: **განმარტება**, **აქსიომა** და **თეორემა.** ეს გამონათქვამები მათემატიკური ცნებების თვისებებსა და ამ ცნებებს შორის კავშირებს აყალიბებს.

განმარტება ისეთი გამონათქვამია, რომლის მეშვეობით ამა თუ იმ ცნების შინაარსი გადმოიცემა. განმარტება ადრე განმარტებულ ან განმარტების გარეშე მიღებულ ე.წ. საწყის ცნებებს იყენებს. მისი საშუალებით ახალი ცნების სახელდება ხდება. ამიტომ მისი ჭეშმარიტება დამტკიცებას არ საჭიროებს.

მაგალითად, განვიხილოთ წრეწირის მხების განმარტება:

„წრფეს, რომელსაც წრეწირთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს, წრეწირის მხები ეწოდება".

მოცემულ განმარტებაში ნახსენები წრფე და წერტილი გეომეტრიის საწყისი ცნებებია, ხოლო წრეწირი მანამდე განმარტებული ცნებაა, რომლის განმარტებაში, თავის მხრივ, წერტილის, სიბრტყის, სიმრავლისა და მანძილის საწყისი ცნებები გამოიყენება (გაიხსენე ეს განმარტება).

აქსიომა დაუმტკიცებლად ჭეშმარიტად მიჩნეული გამონათქვამია, რომლის მეშვეობით საწყისი ცნებების თვისებები და მათ შორის კავშირები გადმოიცემა.

მაგალითად, აქსიომა:

„ორ წერტილზე გაივლება წრფე და ამასთან, მხოლოდ ერთი".

ორ წერტილსა და წრფეს შორის მიმართებას ამყარებს. ამ აქსიომის შედეგია, რომ წრფე შეგვიძლია ორი ასოთი აღვნიშნოთ: AB წრფე, სწორედ ის ერთადერთი წრფეა, რომელიც A და B წერტილზე გაივლება.

თეორემა პირობითი გამონათქვამია, რომლის ჭეშმარიტება დამტკიცებას საჭიროებს.

როგორც ყველა პირობითი გამონათქვამი, თეორემა ორი ნაწილისგან, პირობისა და დასკვნისაგან შედგება. თეორემის დამტკიცება პირობის ჭეშმარიტებიდან დასკვნის ჭეშმარიტების გამოყვანას გულისხმობს. ამის მისაღწევად აქსიომებს, უკვე დამტკიცებულ თეორემებსა და ლოგიკის კანონებზე დამყარებულ მსჯელობას ვიყენებთ.

განვიხილოთ ორი მაგალითი:

თეორემა 1. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია.

ეს თეორემა, ერთი შეხედვით, პირობითი გამონათქვამის სახით არაა ჩამოყალიბებული, მაგრამ, ცხადია, პირობაა, რომ ობიექტი, რომელზეც არის საუბარი – პარალელოგრამია, ხოლო დასკვნა მისი მოპირდაპირე გვერდების ტოლობაა. ამიტომ ამ თეორემის პირობითი გამონათქვამის სახით ჩამოყალიბება შემდეგნაირად შეგვიძლია:

„თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია".

ასე ჩამოყალიბებულ თეორემაში პირობაა გამონათქვამი:

P: „ოთხკუთხედი პარალელოგრამია",

ხოლო დასკვნა:

Q: „ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია“.

ჩამოვთვალოთ ამ თეორემის დამტკიცების საფეხურები:

1. ვთქვათ, ABCD ოთხკუთხედი პარალელოგრამია (პირობის ჭეშმარიტების დაშვება);

2. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ (პარალელოგრამის განმარტება);

3. $\angle BAC=\angle ACD$, $\angle ACB=\angle CAD$ (თეორემა ორი პარალელური წრფის მესამით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეების ტოლობის შესახებ);

4. $\Delta ABC=\Delta CDA$ (სამკუთხედების ტოლობის ნიშანი გვერდითა და მასთან მდებარე ორი კუთხით);

5. $AD=BC$ და $AB=CD$ (თეორემა ტოლ სამკუთხედებში შესაბამისი გვერდების ტოლობის შესახებ).

ჩატარებული მსჯელობით თეორემა დამტკიცებულია, რადგან დაშვებიდან, რომ P ჭეშმარიტი გამონათქვამია, გამოვიყვანეთ Q გამონათქვამის ჭეშმარიტება, რაც, როგორც 1.1 პარაგრაფიდან ვიცით, $P \Rightarrow Q$ პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტებას ნიშნავს.

ლოგიკური ჯაჭვი, რომელიც ამ დამტკიცებაშია გამოყენებული, ასე გამოიყურება:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$$

დამტკიცების განხილულ მეთოდს **დედუქციური მეთოდი** ეწოდება. ამავე მეთოდით მტკიცდება მოცემული თეორემის **შებრუნებული თეორემა**, რომელიც მოცემული $P \Rightarrow Q$ პირობითი გამონათქვამის შებრუნებული $Q \Rightarrow P$ გამონათქვამია (დაამტკიცე დამოუკიდებლად.)

თეორემა 2. ორი განსხვავებული წრფე არაუმეტეს ერთ წერტილში იკვეთება.

პირველ რიგში, თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით ჩამოვაყალიბოთ:

„თუ ორი წრფე განსხვავებულია, მაშინ წრფეთა საერთო წერტილების რაოდენობა 1-ს არ აღემატება“.

ასე ჩამოყალიბებულ თეორემაში პირობაა:

P: ორი წრფე განსხვავებულია;

ხოლო დასკვნა:

Q: წრფეების საერთო წერტილთა რაოდენობა 1-ს არ აღემატება.

თეორემის, ანუ $P \Rightarrow Q$ გამონათქვამის დამტკიცების მაგივრად შეგვიძლია დავამტკიცოთ შებრუნებულის მოპირდაპირე $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ გამონათქვამი, რომელიც, როგორც ვიცით, მოცემული გამონათქვამის ტოლფასია. ჩამოვაყალიბოთ ეს გამონათქვამი:

„თუ წრფეების საერთო წერტილთა რაოდენობა 1-ს აღემატება, მაშინ ეს წრფეები განსხვავებული არაა“.

დამტკიცება უშუალოდ ზემოთ ჩამოყალიბებული აქსიომიდან გამომდინარეობს, რადგან, თუ წერტილთა რაოდენობა ორი მაინცაა, ამ წერტილებზე ერთადერთი წრფე გაივლება.

დამტკიცების განხილულ მეთოდს **საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი** ეწოდება.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა სახის გამონათქვამები გვხვდება მათემატიკაში?
2. რატომ არ სჭირდება განმარტებას დამტკიცება?
3. რა არის თეორემა?
4. რაში მდგომარეობს თეორემის დამტკიცების დედუქციური მეთოდი?
5. ლოგიკის რომელ ფორმულას ეფუძნება დამტკიცების საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი?

სავარჯიშოები

1

ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით და გაარკვიე, რომელი მათგანის შებრუნებული გამონათქვამია ჭეშმარიტი:
ა) ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360 გრადუსის ტოლია;
ბ) 7-ის ჯერადი რიცხვების ჯამი 7-ის ჯერადია;
გ) ტოლფერდა ტრაპეციაში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია;
დ) ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის მედიანა სიმაღლეს წარმოადგენს.

2

მოცემულია თეორემა:
„პარალელოგრამში მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია“.
ა) ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით;
ბ) ჩამოაყალიბე შებრუნებული თეორემა;
გ) დაამტკიცე ჩამოყალიბებული თეორემები;
დ) გააერთიანე ჩამოყალიბებული თეორემები ტოლფასობის სახით.

3

მოცემულია თეორემა: „პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი თითოეულ დიაგონალს ორ ტოლ ნაწილად ყოფს“.
ა) ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით;
ბ) ჩამოაყალიბე მოცემულის შებრუნებული თეორემა;
გ) დაამტკიცე ჩამოყალიბებული თეორემები;
დ) გააერთიანე ჩამოყალიბებული თეორემები ტოლფასობის სახით.

4

მოცემულია თეორემა: „ტოლი კათეტების მქონე მართკუთხა სამკუთხედების ჰიპოტენუზები ტოლია“. დაამტკიცე მოცემული თეორემა;
ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემის შებრუნებული გამონათქვამი და გაარკვიე მისი მართებულობის საკითხი.

5

მოცემულია თეორემა: „კვადრატის დიაგონალები ტოლი და ურთიერთმართობულია“. დაამტკიცე მოცემული თეორემა;
ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემის შებრუნებული გამონათქვამი და გაარკვიე მისი მართებულობის საკითხი;
ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემის შებრუნებულის საპირისპირო თეორემა.

6

დაამტკიცე მოცემული თეორემა საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით:
ა) თუ n^2 კენტი რიცხვია, მაშინ n კენტი რიცხვია;
ბ) თუ რიცხვი n არ იყოფა 15-ზე, მაშინ n არ იყოფა 3-ზე ან 5-ზე;
გ) თუ n და p 1-ზე მეტი ნატურალური რიცხვებია და ამასთან, p არის n-ის 1-ისგან განსხვავებულ გამყოფებს შორის უმცირესი, მაშინ p მარტივი რიცხვია.

7

მოცემულია თეორემა: თუ სამკუთხედის მედიანით გვერდი ამავე მედიანის ტოლ ნაწილებად გაიყო, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.
ა) დაამტკიცე მოცემული თეორემა;
ბ) ჩამოაყალიბე და დაამტკიცე მოცემული თეორემის შებრუნებული თეორემა;
გ) გააერთიანე მოცემული თეორემები ერთ თეორემად ტოლფასობის სახით.

8

საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით დაამტკიცე თეორემა:
„მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა“.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №1

1 ვთქვათ, A და B ჭეშმარიტი გამონათქვამებია. შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელი იქნება მცდარი?

ა) $A \wedge B$; ბ) $A \vee B$; გ) $\overline{A} \Rightarrow B$; დ) $B \Rightarrow \overline{A}$.

2 მოცემული გამონათქვამებიდან რომელია $A \Rightarrow B$ გამონათქვამის ტოლფასი?

ა) $A \vee B$; ბ) $A \wedge B$; გ) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$; დ) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

3 მოცემულია გამონათქვამი: „თუ m და n ნატურალური 7-ის ჯერადი რიცხვებია, მაშინ m+n ჯამი 7-ის ჯერადი რიცხვია“. შემდეგი გამონათქვამებიდან, რომელია მოცემული გამონათქვამის ტოლფასი?

ა) თუ m ან n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი, მაშინ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი;

ბ) თუ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი, მაშინ m ან n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი;

გ) თუ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი, მაშინ m და n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვები;

დ) თუ m და n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვები, მაშინ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი.

4 მოცემულია გამონათქვამი: „ლიმონი მრგვალია და ყვითელი“. შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელია ამ გამონათქვამის უარყოფა?

ა) ლიმონი მრგვალი არაა ან ყვითელი არაა;

ბ) ლიმონი ზოგჯერ ნარინჯისფერია;

გ) ლიმონი არც მრგვალია და არც ყვითელი;

დ) თუ მრგვალია და ყვითელია, მაშინ ლიმონია.

5 მოცემულია გამონათქვამი: „თუ ოთხკუთხედი რომბიცაა და მართკუთხედიც, მაშინ ოთხკუთხედი კვადრატია.“ შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელია ამ გამონათქვამის ტოლფასი:

ა) თუ ოთხკუთხედი არც რომბია და არც კვადრატი, მაშინ ოთხკუთხედი ტრაპეციაა;

ბ) თუ ოთხკუთხედი არაა კვადრატი, მაშინ ოთხკუთხედი არც რომბია და არც მართკუთხედი;

გ) თუ ოთხკუთხედი არაა კვადრატი, მაშინ ოთხკუთხედი რომბი არაა ან მართკუთხედი არაა;

დ) კვადრატი ან რომბი არაა, ან მართკუთხედი არაა.

6 მოცემულია გამონათქვამი: „თუ ნატურალური რიცხვის კვადრატის ბოლო ციფრია 1, მაშინ ამ რიცხვის ბოლო ციფრიც არის 1“. შემდეგი ტოლობებიდან, რომელია მოცემული გამონათქვამის კონტრმაგალითი?

ა) $1^2=1$; ბ) $11^2=121$; გ) $13^2=169$; დ) $9^2=81$.

7 შეადგინე ორი გამონათქვამის ჯამის (დიზიუნქციის) ჭეშმარიტობის ცხრილი.

8 შეადგინე პირობითი გამონათქვამის (იმპლიკაციის) ჭეშმარიტობის ცხრილი.

9 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი A გამონათქვამისათვის მცდარია გამონათქვამი: $A \vee \overline{A} \Rightarrow A \wedge \overline{A}$.

10 მოცემულია ორი პირობითი გამონათქვამი:

A: თუ მირიანი ფეხბურთელია, მაშინ გიორგიც ფეხბურთელია;

B: თუ შიო ფეხბურთელია, მაშინ გიორგიც ფეხბურთელია.

დაადგინე, რომელია ფეხბურთელი, თუ ცნობილია, რომ A მცდარი და B ჭეშმარიტი გამონათქვამია.

თავი 2. ნამდვილი რიცხვები

ამ თავში გაიმეორებ:

- რაციონალური რიცხვის ჩაწერის სხვადასხვა ფორმას;
- წილადის პერიოდულ ათწილადად წარმოდგენას და პერიოდული ათწილადის ჩაწერას წილადის სახით;
- ათწილადის თანრიგობრივ შესაკრებთა ჯამად წარმოდგენას;
- ირაციონალური რიცხვის, როგორც არაპერიოდული ათწილადის სტრუქტურას;
- ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვით მოცემული სიზუსტით მიახლოებას;
- ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, როგორც უსასრულო პერიოდული და არაპერიოდული ათწილადების ერთობლიობას;
- რაციონალური ხარისხის თვისებებს.

ამ თავში გაეცნობი:

- მოქმედებების წარმოებას ირაციონალურ რიცხვებზე;
- რთული პროცენტის ფორმულის გამოყენებას საფინანსო საქმიანობასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოსახსნელად.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- რაციონალური რიცხვების სხვადასხვა ფორმით ჩაწერას;
- პერიოდული ათწილადის წილადის სახით წარმოდგენას;
- ირაციონალური რიცხვების ამოცნობას;
- კალკულატორის გამოყენებას ირაციონალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების მოცემული სიზუსტით გამოსათვლელად;
- ყოველწლიური მუდმივი შენატანის შემთხვევაში ანგარიშზე დაგროვილი თანხის რაოდენობის დადგენას;
- სესხის დასაფარი წლიური გადასახადის დადგენას.

გუსტავ პეტერ დირიხლე
1805-1859 წწ.
გერმანელი მათემატიკოსი, თანამედროვე რიცხვთა თეორიის ერთ-ერთი ფუძემდებელი

კომპლექსური დავალება
„საბანკო სესხის წლიური გადასახადის გამოთვლა“

თანამედროვე მსოფლიოში ადამიანის საქმიანობის ყველა სფეროში მნიშვნელოვანი ადგილი ფინანსებს უკავია. ფინანსები განსაზღვრავს მრეწველობის, სოფლის მეურნეობის, მეცნიერების, განათლების, თავდაცვის, მედიცინისა და სპორტის მიღწევებსა და განვითარების დინამიკას. საფინანსო ორგანიზაციების სწორად წარმართულ და ოპტიმალურად გათვლილ მოქმედებებზეა დიდწილად დამოკიდებული ქვეყნის ეკონომიკური პროგრესი.

ფინანსურ საქმიანობაში, ნებსით თუ უნებლიეთ, ყველა ადამიანია ჩართული: დაწყებული ბავშვიდან, რომელიც მაღაზიაში 1 ლარად კანფეტს ყიდულობს, დამთავრებული ბიზნესმენით, რომელიც ბანკიდან რამდენიმემილიონიან სესხს იღებს.

ამიტომ მნიშვნელოვანია, რომ ყველა მოქალაქე ფლობდეს საფინანსო საქმიანობის ელემენტარულ უნარ-ჩვევებს, როგორებიცაა, მაგალითად, ამა თუ იმ პროდუქტზე პროცენტული ფასდაკლების ან/და ფასნამატის გამოთვლა, ბანკში ანაბარზე შეტანილი თანხის ნამატის გამოთვლა, ბანკიდან ასაღები სესხის პირობების ანალიზი, სესხის პროცენტის მიხედვით წლიური გადასახადის დადგენა და სხვ.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია კარგად გავარკვიოთ აღებული სესხის დაფარვის პირობები და მოვარგოთ ის ჩვენს ფინანსურ შესაძლებლობებს, რათა არ აღმოვჩნდეთ ფინანსური კოლაფსის მდგომარეობაში.

შენი დავალება:

1. შეისწავლე სახელმძღვანელოს ამ თავში მოცემული მასალა. გააანალიზე და ამოხსენი 2.4 პარაგრაფის თეორიულ ნაწილში მოცემული ამოცანები;

2. ისარგებლე 2.4 პარაგრაფში მოცემული ფორმულებით და ამოხსენი ამ პარაგრაფის სავარჯიშოები;

3. ამოხსენი ამოცანა:

სანდროს ნომინალური თვიური ხელფასია 2500 ლარი. ხელფასის 20% საშემოსავლო გადასახადია, ხოლო დარჩენილი თანხის 40% საყოფაცხოვრებო ხარჯებს ხმარდება. სანდრომ გადაწყვიტა აიღოს ავტოსესხი 50 000 ლარის ოდენობით. შეძლებს თუ არა სანდრო 5 წელიწადში ვალის დაფარვას, თუ ბანკის წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%? (პასუხი დაასაბუთე)

4. ა) ინტერნეტით მოიძიე რომელიმე ბანკის სესხის კალკულატორი;
ბ) სესხის კალკულატორის საშუალებით, მე-3 დავალების მონაცემების მიხედვით, გამოთვალე სანდროს მიერ ყოველთვიურად გადასახდელი თანხა;
გ) დაადგინე, დაახლოებით, რამდენი პროცენტითაა მეტი სესხის კალკულატორით მიღებული შედეგი შენ მიერ ფორმულის გამოყენებით მიღებულ შედეგზე;

5. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ გამოთვალე სანდროს მიერ ყოველთვიურად გადასახდელი თანხის ოდენობა?
- როგორ ფიქრობ, რამ გამოიწვია სესხის კალკულატორით და შენ მიერ ფორმულის გამოყენებით გამოთვლილ გადასახადს შორის განსხვავება?
- რა ტექნიკური საშუალებები და საძიებო სისტემები გამოიყენე დავალების შესასრულებლად?
- არის თუ არა ბანკიდან სესხის აღება ყოველთვის მიზანშეწონილი?

2.1 რაციონალური რიცხვები

მიზანი

რაციონალური რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა ფორმის განხილვა და გამოყენება

საგანთა, ობიექტთა ერთი და იმავე რაოდენობის გამოსახვა სხვადასხვა სახის ჩანაწერითაა შესაძლებელი. მაგალითად, თუ 9 ვაშლი 4-მა მეგობარმა თანაბრად უნდა გაინაწილოს, მაშინ გასაგებია, რომ თითოეულს ამ ცხრა ვაშლის მეოთხედი, ანუ $\frac{9}{4}$ ვაშლი შეხვდება. ვაშლების იმავე რაოდენობას მივიღებთ, თუ მეგობრებს ჯერ 2-2 ვაშლს, ხოლო შემდეგ დარჩენილი ვაშლის მეოთხედებს ჩამოვურიგებთ. ამ შემთხვევაში თითოეულ მეგობარს $2\frac{1}{4}$, ანუ, 2,25 ვაშლი შეხვდება. თუ ვაშლების იმავე რაოდენობას პროცენტის სახით ჩავწერთ, მივიღებთ: $\left(\frac{9}{4}\cdot 100\right)\%=225\%$.

განხილული მაგალითიდან ვასკვნით: $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}=2,25=225\%$.

მიღებულ ტოლობებში:

$\frac{9}{4}$ **ჩვეულებრივი წილადის** სახით ჩაწერილი რიცხვია;

$2\frac{1}{4}$ არის $\frac{9}{4}$-ის მთელი ნაწილის გამოყოფით მიღებული **შერეული** სახით ჩაწერილი რიცხვი;

2,25 არის $\frac{9}{4}$-ის მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით მიღებული **ათწილადის** სახით ჩაწერილი რიცხვი;

225% არის $\frac{9}{4}$-ის 100-ზე გამრავლებით მიღებული პროცენტის სახით ჩაწერილი რიცხვი.

გავიხსენოთ, რომ ყველა იმ რიცხვს, რომლის $\frac{m}{n}$ წილადის სახით ჩაწერაა შესაძლებელი, სადაც m მთელი, ხოლო n ნატურალური რიცხვია, **რაციონალური რიცხვი** ეწოდება. რაციონალურია:

ა) ნებისმიერი მთელი რიცხვი, მაგალითად, –7, რადგან $-7=\frac{-7}{1}$;

ბ) ნებისმიერი შერეული რიცხვი, მაგალითად, $5\frac{3}{8}$, რადგან $5\frac{3}{11}=\frac{5\cdot 11+3}{11}=\frac{58}{11}$;

გ) ნებისმიერი სასრული ათწილადი, მაგალითად 3,415, რადგან $3,415=\frac{3415}{1000}$.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს ლათინური მთავრული Q ასოთი აღნიშნავენ. განმარტების თანახმად,

$$Q=\left\{\frac{m}{n}: m\in Z, n\in N\right\},$$

სადაც Z-ით **მთელ რიცხვთა სიმრავლე,** ხოლო N-ით **ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა** აღნიშნული.

რაციონალურ,ი რიცხვთა სიმრავლის მნიშვნელოვანი ქვესიმრავლეა ისეთი რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 10-ის ნატურალური ხარისხია. ასეთი რიცხვებისთვის ათწილად ჩანაწერს ვიყენებთ. მაგალითად:

$$\frac{13}{10}=1{,}3;\quad -\frac{2457}{100}=-24{,}57;\quad \frac{401}{1000}=0{,}401.$$

ათწილადის სახით ჩაწერილი დადებითი რიცხვის ზოგადი სახეა:

$$a_1a_2...a_n,\ b_1b_2...b_k \qquad (1)$$

სადაც მძიმის მარცხნივ მდგომი $a_1a_2...a_n$ ციფრების მიმდევრობა გამოსახავს რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო მძიმის მარჯვნივ მდგომი $b_1b_2...b_k$ ციფრების მიმდევრობა – წილად ნაწილს.

თუ (1) სახით მოცემულ ათწილადს თანრიგობრივი შესაკრებების ჯამად წარმოვადგენთ, მივიღებთ:

$$a_1a_2\ldots a_n,b_1b_2\ldots b_k=a_1\cdot10^{n-1}+a_2\cdot10^{n-2}+\ldots+a_n\cdot10^0+b_1\cdot10^{-1}+b_2\cdot10^{-2}+\ldots+b_k\cdot10^{-k}\quad(2)$$

1-ელი სახის რიცხვს **სასრული ათწილადი** ეწოდება.

იმისათვის, რომ წილადის სახით ჩაწერილი რიცხვი ათწილადის სახით ჩავწეროთ, მრიცხველი უნდა გავყოთ მნიშვნელზე. მაგალითად,

$$\frac{2}{5}=2:5=0{,}4;\quad \frac{15}{4}=15:4=3{,}75.$$

მაგალითი 1. წარმოვადგინოთ თანრიგობრივი შესაკრებების ჯამის სახით $\frac{1223}{40}$.

ამოხსნა. მოცემული წილადი ჯერ ჩავწეროთ ათწილადის სახით, რისთვისაც საკმარისია შევასრულოთ 1223-ის 40-ზე გაყოფა. თუმცა, მოცემულ შემთხვევაში, უმჯობესია, ჯერ გამოვყოთ მთელი ნაწილი 30, ხოლო წილადი ნაწილის მნიშვნელი და მრიცხველი გავამრავლოთ 25-ზე. მივიღებთ:

$$\frac{1223}{40}=30\frac{23}{40}=30\frac{575}{1000}=30{,}575=3\cdot10+0\cdot10^0+5\cdot10^{-1}+7\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}.$$

ისეთი წილადი, რომლის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული მარტივი მამრავლი არ მონაწილეობს, სასრული ათწილადის სახით ჩაიწერება.

მართლაც, თუ წილადი $\frac{m}{2^{k_1}\cdot5^{k_2}}$ სახისაა, სადაც k_1 და k_2 მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, მრიცხველისა და მნიშვნელის $2^{k_2}\cdot5^{k_1}$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$\frac{m}{2^{k_1}\cdot5^{k_2}}=\frac{m\cdot2^{k_2}\cdot5^{k_1}}{2^{k_1+k_2}\cdot5^{k_2+k_1}}=\frac{m\cdot2^{k_2}\cdot5^{k_1}}{10^{k_1+k_2}}.$$

თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული ერთი მარტივი მამრავლი მაინც მონაწილეობს, მაშინ ასეთ წილადს სასრულ ათწილადად ვერ ჩავწერთ, რადგან ასეთი წილადის მნიშვნელი 10-ის მთელი ხარისხის სახით არ ჩაიწერება. ამ შემთხვევაში, მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება. მაგალითად,

$$\frac{1}{3}=0{,}333...=0,(3);\quad \frac{13}{6}=2{,}1666...=2{,}1(6).$$

მიღებული 0,(3) და 2,1(6) ჩანაწერები, შესაბამისად, რაციონალური რიცხვების $\frac{1}{3}$-ისა და $\frac{13}{6}$-ის **პერიოდული ათწილადი** ჩანაწერებია.

პერიოდული ათწილადის ზოგადი სახეა

$$a_1a_2...a_n,b_1b_2...b_k(c_1c_2...c_p) \qquad (2)$$

სადაც $a_1a_2...a_n$ მთელი ნაწილი, $b_1b_2...b_k$ პერიოდამდელი წილადი ნაწილი, ხოლო $c_1c_2...c_p$ პერიოდული ათწილადის ის ნაწილია, რომელიც უსასრულოდ მეორდება. ამ უკანასკნელ ნაწილს **პერიოდი**, ხოლო მასში ციფრთა რაოდენობას, ანუ p-ს, **პერიოდის სიგრძე** ეწოდება. მაგალითად, ჩანაწერში 12, 701(45), მთელი ნაწილია 12, პერიოდამდელი წილადი ნაწილი – 701, პერიოდი – 45, ხოლო პერიოდის სიგრძე – 2.

პერიოდულ ათწილადს, რომლის ჩანაწერში პერიოდი უშუალოდ მძიმის შემდეგ იწყება, **წმინდა პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. ასეთია, მაგალითად, 0,(3), 13,(25) და სხვ. ისეთ პერიოდულ ათწილადს, რომლის ჩანაწერში პერიოდამდელი წილადი ნაწილიც მონაწილეობს, **შერეული პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. მაგალითად, ასეთია 2,1(6).

შევნიშნოთ, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადის მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის პროცესში მიღებული ნაშთები შეიძლება იყოს 0, 1, . . . , n-1. გაყოფის რაიმე საფეხურზე ნულოვანი ნაშთის მიღების შემთხვევაში გაყოფის პროცესი დამთავრდება და მივიღებთ მოცემული წილადის სასრული ათწილადის სახის ჩანაწერს. (როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში მოხდება, თუ n-ს არ გააჩნია 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული მარტივი გამყოფი.) სხვა შემთხვევაში, ყველაზე მეტი, n-1 საფეხურის შემდეგ რომელიმე არანულოვანი ნაშთი გამეორდება, რაც განაყოფის გამეორებას და პროცესის უსასრულო პერიოდულ გაგრძელებას გამოიწვევს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

ყოველი $\frac{m}{n}$ სახის წილადი სასრული ან პერიოდული ათწილადის სახით წარმოდგება.

მართებულია მოცემული თეორემის შებრუნებული თეორემაც:

როგორც სასრული, ისე პერიოდული ათწილადი წილადის სახით წარმოდგება.

სასრული ათწილადის წილადად წარმოდგენის შესაძლებლობა მისი განმარტებიდან გამომდინარეობს. რაც შეეხება პერიოდულ ათწილადს, მისი წილადად ჩაწერის შესაძლებლობა გამომდინარეობს ფორმულიდან, რომელსაც დაუმტკიცებლად გთავაზობთ:

$$a_1a_2\dots a_n,b_1b_2\dots b_k\left(c_1c_2\dots c_p\right)=a_1a_2\dots a_n\frac{b_1b_2\dots b_kc_1c_2\dots c_p-b_1b_2\dots b_k}{\underbrace{99...9}_{p-ჯერ}\underbrace{00...0}_{k-ჯერ}}. \qquad (3)$$

მაგალითი 2. ჩავწეროთ წილადის სახით პერიოდული ათწილადი: ა) 0,(43) ; ბ) 26,153(17)

ამოხსნა. ა) 0,(43) პერიოდულ ათწილადს მთელი და პერიოდამდელი წილადი ნაწილი არ აქვს, ამიტომ მე-3 ფორმულიდან მივიღებთ ტოლობას: $0,(43)=\frac{43}{99}$;

ბ) ამ შემთხვევაში, მე-3 ფორმულის მიხედვით, k=3, ხოლო p=2. ამიტომ

$$26,153(17)=26\frac{15317-153}{99000}=26\frac{15164}{99000}.$$

ჩამოყალიბებული პირდაპირი და შებრუნებული თეორემის გაერთიანებით მივიღებთ თეორემას:

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე სასრული და პერიოდული ათწილადების სიმრავლეთა გაერთიანებაა.

ეს თეორემა ნიშნავს, რომ რაციონალური რიცხვი შეგვიძლია განვმარტოთ, როგორც რიცხვი, რომლის ჩაწერა შესაძლებელია სასრული ან პერიოდული ათწილადის სახით.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ რიცხვს ეწოდება რაციონალური?
2. არის თუ არა მთელი რიცხვი რაციონალური?
3. არის თუ არა შერეული რიცხვი რაციონალური?
4. როგორ წარმოადგენ შერეულ რიცხვს წილადის სახით?
5. როგორ ჩაწერ რიცხვს პროცენტის სახით?
6. რას ეწოდება ათწილადი?
7. არის თუ არა ათწილადების სიმრავლე წილადების ქვესიმრავლე?
8. რას გვიჩვენებს ათწილადის ჩანაწერში მძიმე?
9. რა შემთხვევაში მიიღება წილადის მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფისას ათწილადი? პერიოდული ათწილადი?
10. რა არის პერიოდული ათწილადის პერიოდი? პერიოდის სიგრძე?

სავარჯიშოები

1 ჩაწერე მოცემული მთელი რიცხვი 10-ის ტოლი მნიშვნელის მქონე წილადის სახით:

ა) 3; ბ) 13; გ) –21; დ) 10; ე) –100.

2 ჩაწერე მოცემული შერეული რიცხვი წილადის სახით:

ა) $3\frac{2}{5}$; ბ) $-1\frac{1}{2}$; გ) $-5\frac{4}{5}$; დ) $10\frac{7}{20}$; ე) $-13\frac{10}{11}$.

3 ჩაწერე პროცენტით მოცემული რიცხვი წილადის სახით:

ა) 50%; ბ) 25%; გ) 10%; დ) 29% ე) $\frac{1}{3}$%.

4 ჩაწერე ათწილადი წილადის სახით:

ა) 0,3; ბ) –1,4; გ) –0,21; დ) 10,458; ე) 123, 1234.

5 მოცემულთაგან რომელი რიცხვი არ ჩაიწერება სასრული ათწილადის სახით?

ა) 19; ბ) $1\frac{2}{5}$; გ) $-2\frac{3}{20}$; დ) $13\frac{12}{15}$; ე) $6\frac{50}{55}$.

6 ჩაწერე მოცემული რიცხვი ათწილადის სახით:

ა) $1\frac{3}{5}$; ბ) $2\frac{3}{50}$; გ) $-2\frac{7}{20}$; დ) $23\frac{14}{35}$; ე) $-\frac{165}{44}$.

7 წარმოადგინე მოცემული რიცხვი თანრიგობრივი შესაკრებების ჯამად:

ა) 123; ბ) 23,123; გ) 102,5061; დ) $\frac{7}{25}$; ე) $3\frac{13}{250}$.

8 ჩაწერე მოცემული რიცხვი პერიოდული ათწილადის სახით:

ა) $\frac{5}{6}$; ბ) $\frac{2}{9}$; გ) $-1\frac{4}{9}$; დ) $-3\frac{7}{12}$; ე) $\frac{22}{7}$.

9 ჩამოაყალიბე სიტყვიერად წმინდა პერიოდული ათწილადის წილადად ჩაწერის წესი.

10 ჩამოაყალიბე სიტყვიერად შერეული პერიოდული ათწილადის წილადად ჩაწერის წესი.

11 ჩაწერე მოცემული პერიოდული ათწილადი წილადის სახით:
ა) 0,(7); ბ) 0,(9); გ) –0,(18); დ) 10,(36); ე) –2,(24);
ვ) 0,1(5); ზ) 1,2(3); თ) 20,3(15); ი) 1,41(123); კ) 9,0(12).

12 იპოვე წილადი (0,5; 0,6) შუალედიდან, რომლის მნიშვნელი 20-ის ტოლია.

13 იპოვე 0,(7)-სა და 0,(8)-ს შორის მოთავსებული ყველა ის წილადი, რომელთა მნიშვნელია 27.

14 დაამტკიცე, რომ ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი რაციონალური რიცხვია.

15 დაამტკიცე, რომ ორი რაციონალური რიცხვის ნამრავლი რაციონალური რიცხვია.

16 გამოსახე მიმართება ნატურალურ, მთელ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეებს შორის ვენის დიაგრამით.

17 გამოსახე მიმართება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესა და სასრული ათწილადი რიცხვების სიმრავლეს შორის ვენის დიაგრამით.

18 დაამტკიცე ტოლობა: 4,(9)=5,(0).

19 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის უამრავი რაციონალური რიცხვია მოთავსებული.

20 დაამტკიცე, რომ $\frac{k^2-1}{24}$ -სახის წილადი ნატურალურ რიცხვს წარმოადგენს, სადაც k არის 3-ზე მეტი მარტივი რიცხვი.

21 დაამტკიცე, რომ A და B სიმრავლეებისათვის
ა) $A \cup B = A$ და $B \subset A$; ბ) $A \cap B = A$ და $A \subset B$ ტოლფასი გამონათქვამებია.

2.2. ირაციონალური რიცხვები

მიზანი

ირაციონალური რიცხვისა და ნამდვილი რიცხვის განმარტება.
მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე

თეორემა. $x^2=2$ განტოლებას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ აქვს.

დამტკიცება. თეორემა საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით დავამტკიცოთ.

ვთქვათ, მოცემულ განტოლებას აქვს ამონახსნი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში და ეს ამონახსნია $\frac{m}{n}$, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია. ამასთან, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, შეკვეცით მას უკვეცი წილადით ჩავანაცვლებთ. ამ ამონახსნის მოცემულ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ $m^2=2n^2$ ტოლობას. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ m^2 ლუწი რიცხვია. ეს კი ნიშნავს, რომ m-იც ლუწი რიცხვია, ანუ $m=2k$, სადაც $k\in N$. თუ $m^2=2n^2$ ტოლობაში m-ის ნაცვლად 2k-ს ჩავსვამთ, მივიღებთ: $4k^2=2n^2$, საიდანაც $n^2=2k^2$. უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ n^2 და მასთან ერთად n ლუწი რიცხვია. გამოდის, რომ $\frac{m}{n}$ წილადი იკვეცება 2-ზე, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას უკვეცი რაციონალური ამონახსნის არსებობის შესახებ.

როგორც წინა კლასებიდან იცი, $x^2=2$ განტოლების დადებითი ამონახსნი $\sqrt{2}$-ით აღინიშნება. დამტკიცებული თეორემის თანახმად, $\sqrt{2}$ არც სასრული და არც პერიოდული ათწილადის სახით არ ჩაიწერება.

მიუხედავად ამისა, $\sqrt{2}$-ის მნიშვნელობის გამოთვლა ნებისმიერი თანრიგის სიზუსტითაა შესაძლებელი. მაგალითად, მეათედის სიზუსტით გამოსათვლელად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ვისარგებლოთ $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{200}{100}}=\frac{\sqrt{200}}{10}$ ტოლობით. რადგან ერთეულის სიზუსტით $\sqrt{200}\approx 14$, მივიღებთ, რომ $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ მეათედის სიზუსტით. ანალოგიურად ვიქცევით $\sqrt{2}$-ის მეასედის სიზუსტით გამოსათვლელად:

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{20000}{10000}}\approx\frac{141}{100}\approx 1{,}41$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ $\sqrt{2}$-ის მეათასედების, მეათიათასედების და ა.შ. თანრიგის ციფრებს. ამასთან, ეს პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება და მიღებული ჩანაწერი არ იქნება პერიოდული ათწილადი, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\sqrt{2}$ რაციონალური რიცხვი აღმოჩნდება. ე.ი. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\sqrt{2}$-ის მიახლოებითი გამოთვლის პროცესი უსასრულოდ გრძელდება და შედეგად უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი ჩანაწერი მიიღება. მაგალითად, კალკულატორის საშუალებით 10^{-31} თანრიგის სიზუსტით გამოთვლილი $\sqrt{2}$ ათწილადი ჩანაწერი ასე გამოიყურება:

1,4142135623730950488016887242097

განმარტება. უსასრულო არაპერიოდულ ათწილად რიცხვს **ირაციონალური რიცხვი** ეწოდება.

როგორც ჩატარებული მსჯელობით დავრწმუნდით, $\sqrt{2}$ ირაციონალური რიცხვია. ირაციონალური რიცხვებია $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, π (წრეწირის სიგრძის მის დიამეტრთან შეფარდება) და სხვ.

დადებითი ირაციონალური რიცხვის ზოგადი სახეა:

$$a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_k \dots \qquad (1)$$

სადაც $a_1a_2 \dots a_n$ მთელი ნაწილი, ხოლო $b_1b_2 \dots b_n$ უსასრულო არაპერიოდული წილადი ნაწილია.

იმისათვის, რომ მივიღოთ 1-ელი სახის ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა 10^{-k} სიზუსტით, მის ჩანაწერს ჩამოვაცილოთ წილადი ნაწილის ყველა თანრიგის ერთეული, დაწყებული $k+1$-დან. მიღებული $r_k=a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_k$ სასრული ათწილადი იქნება 10^{-k} სიზუსტით მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით. გასაგებია, რომ რაც უფრო დიდ k-ს ავიღებთ, მით უფრო მცირე იქნება განსხვავება მოცემულ ირაციონალურ რიცხვსა და სასრულ ათწილადს შორის. სასრული ათწილადი კი რაციონალური რიცხვია. ე.ი. რაციონალურ რიცხვთა r_k მიმდევრობის წევრები k-ს ზრდასთან ერთად რაგინდ ახლოს აღმოჩნდებიან ირაციონალურ a რიცხვთან. ამ ფაქტს მათემატიკის ენაზე ასე აყალიბებენ: r_k მიმდევრობის ზღვარი a-ს ტოლია და წერენ:

$$r_k \to a \text{ ან } \lim_{k\to\infty} r_k = a.$$

დასკვნა. ნებისმიერი ირაციონალური a რიცხვისათვის არსებობს რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა, რომლისთვისაც $|a - r_k| < 10^{-k}$.

მაგალითად, $a = \sqrt{2}$ შემთხვევაში ასეთი მიმდევრობა იქნება:

1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 ...

განმარტება. რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების სიმრავლეთა გაერთიანებას **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე** ეწოდება.

$R=I\cup Q$, სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, I ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში განიმარტება ოთხივე არითმეტიკული მოქმედება: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და 0-ისგან განსხვავებულ რიცხვზე გაყოფა. ეს მოქმედებები რაციონალური რიცხვების შემთხვევაში იგივეა, რაც მოქმედებები წილადებზე. ირაციონალური რიცხვების შემთხვევაში კი ხდება მათი რაციონალური მიახლოებითი მნიშვნელობებით ჩანაცვლება.

მაგალითად, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ჯამის გამოსათვლელად ვიღებთ შესაკრებთა მიახლოებითი მნიშვნელობების ჯამებისგან შედგენილ მიმდევრობებს:

1,4+1,7; 1,41+1,73; 1,414+1,732; 1,4142+1,7320; 1,41421+1,73205 . . .

მტკიცდება, რომ არსებობს ერთადერთი ირაციონალური რიცხვი, რომლისთვისაც ეს მიმდევრობა წარმოადგენს ზემოთ განხილული მიახლოებითი მნიშვნელობების r_k მიმდევრობას. სწორედ ამ რიცხვს ეწოდება $\sqrt{2}$ -ისა და $\sqrt{3}$ -ის ჯამი.

არითმეტიკული მოქმედებები ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ინარჩუნებენ შენთვის კარგად ცნობილ ყველა იმ თვისებას, რომლებიც მათ აქვთ რაციონალური რიცხვებისათვის.

იმის გამო, რომ სასრული ათწილადის მნიშვნელობა არ იცვლება, თუ მის ჩანაწერს მარჯვნივ ნულს მივუწერთ, შეგვიძლია, როგორც მთელი რიცხვები, ისე სასრული ათწილადები,

პერიოდული ათწილადის სახით ჩავწეროთ, პერიოდით 0.

მაგალითად,

$$7=7,(0); \qquad -2=-2,(0); \qquad 1,25=1,25(0).$$

ასე რომ, რაციონალური რიცხვების სიმრავლე შეგვიძლია განვმარტოთ, როგორც პერიოდული ათწილადების სიმრავლე, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე – როგორც პერიოდული და არაპერიოდული ათწილადების სიმრავლეთა გაერთიანება.

უსასრულო ათწილადებს ისევე ვადარებთ, როგორც სასრულ ათწილადებს ვადარებდით. განვიხილოთ მაგალითი: დავადგინოთ, რომელია მეტი, $\frac{22}{7}$ თუ π.

მეასედამდე სიზუსტით, როგორც $\frac{22}{7}$, ისე π რიცხვი 3,14-ის ტოლია. ე.ი. მეასედის თანრიგი არაა საკმარისი მათ შესადარებლად. მათი მიახლოებითი მნიშვნელობის მეტი სიზუსტით დასადგენად გამოვიყენოთ კალკულატორი: $\frac{22}{7} \approx 3,142857$, ხოლო $\pi \approx 3,141592$. როგორც ვხედავთ, პირველი განსხვავება მეათასედის თანრიგშია და რადგან 2>1, ამიტომ $\frac{22}{7} > \pi$.

როცა გამოთვლებს მეასედამდე სიზუსტით ვაწარმოებთ, π-რიცხვი შეგვიძლია $\frac{22}{7}$-ით ან 3,14-ით ჩავანაცვლოთ.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ რიცხვს ეწოდება ირაციონალური რიცხვი?
2. შეიძლება თუ არა მთელი რიცხვი იყოს ირაციონალური? სასრული ათწილადი?
3. ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი: „ყოველი ნამდვილი რიცხვი ან რაციონალური რიცხვია ან ირაციონალური რიცხვი“?
4. როგორ დაადგენ კალკულატორით $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობას $\frac{1}{1000000}$-მდე სიზუსტით?
5. როგორ გამოთვლი ორი პერიოდული ათწილადის ჯამს?
6. როგორ შეადარებ ნამდვილ რიცხვებს?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე მეათედამდე სიზუსტით: ა) $\sqrt{5}$; ბ) $\sqrt{7}$.

2 კალკულატორის გამოყენებით გამოთვალე: ა) $\sqrt{8}$-ის, ბ) $\sqrt{11}$-ის, გ) $\sqrt{13}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა 10^{-4} სიზუსტით.

3 გამოთვალე $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ჯამის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეათასედის სიზუსტით.

4 ქვემოთ მოცემულთაგან რომელ გამოსახულებათა მნიშვნელობაა ირაციონალური?

ა) $\sqrt{13}$; ბ) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; გ) $\sqrt{81}:\sqrt{4}$;

დ) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$; ე) $2+\sqrt{3}$; ვ) $0,(4)+\sqrt{2}$.

5 დაამტკიცე, რომ:

ა) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ რაციონალური რიცხვია;

ბ) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ ირაციონალური რიცხვია.

6 რომელია მეტი:

ა) $1\frac{3}{7}$ თუ $\sqrt{2}$; ბ) 10 თუ 3π; გ) 11თუ $3{,}5\pi$; დ) $\sqrt{2}$ თუ $\sqrt[5]{5}$.

7 იპოვე:

ა) 2-სა და 3-ს შორის მდებარე ირაციონალური რიცხვი;

ბ) $\sqrt{2}$ -სა და $\sqrt{3}$ -ს შორის მდებარე რაციონალური რიცხვი.

8 ორი კვადრატიდან ერთის გვერდი მეორის დიაგონალის ტოლია. რომელი კვადრატის ფართობია მეტი და რამდენჯერ?

9 გამოთვალე 1 მ-ის სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის დიაგონალი 1 მმ-ის სიზუსტით.

10 გამოთვალე წრეწირის რადიუსი 1 სმ-ის სიზუსტით, თუ წრეწირის სიგრძეა $3\frac{1}{7}$ მ.

11 დაამტკიცე, რომ:

ა) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ რაციონალური რიცხვია;

ბ) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ირაციონალური რიცხვია.

12 0-ის ტოლი მთელი ნაწილის მქონე უსასრულო ათწილადის წილადი ნაწილი $7^1, 7^2, \ldots, 7^n, \ldots$ მიმდევრობის წევრთა ერთეულის თანრიგის ციფრებია. რაციონალურია თუ ირაციონალური მიღებული რიცხვი? ჩაწერე ეს რიცხვი წილადის სახით.

შესაძლებელია თუ არა

ა) ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს ირაციონალური?
ბ) ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს რაციონალური?

აბა სცადე!

დაამტკიცე, რომ კვადრატული ფესვი ნებისმიერი მარტივი რიცხვიდან ირაციონალური რიცხვია.

2.3 ხარისხის თვისებები

მიზანი

ხარისხის თვისებების გამეორება და მათი გამოყენების უნარის განვითარება

პირველ რიგში, გავიხსენოთ, რომ თუ r რაციონალური რიცხვია, $r=\frac{m}{n}$, სადაც m მთელი, ხოლო n>1 ნატურალური რიცხვია, მაშინ ნებისმიერი a>0 რიცხვისთვის a^r განიმარტება ტოლობით:

$$a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

მაგალითად, $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=4$.

კიდევ ერთხელ ჩამოვწეროთ ხარისხის თვისებები და მოვიყვანოთ სათანადო მაგალითები. ვთქვათ, a და b დადებითი რიცხვები, ხოლო r, r_1 და r_2 ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია. მართებულია ტოლობები:

1. $(ab)^r=a^rb^r$;

მაგალითად, $(125\cdot27)^{\frac{2}{3}}=125^{\frac{2}{3}}\cdot27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}\cdot\sqrt[3]{27^2}=\left(\sqrt[3]{125}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=5^2\cdot3^2=225$;

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$;

მაგალითად, $\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{125^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{125^2}}{\sqrt[3]{27^2}}=\frac{\left(\sqrt[3]{125}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}$.

3. $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$;

მაგალითად, $7^{\frac{3}{4}}\cdot7^{\frac{1}{4}}=7^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=7$.

4. $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}=a^{r_1-r_2}$;

მაგალითად, $\frac{9^{\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}=9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$.

5. $\left(a^{r_1}\right)^{r_2}=a^{r_1\cdot r_2}$;

მაგალითად, $(125\cdot27)^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}\cdot(3^3)^{\frac{2}{3}}=5^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot3^{3\cdot\frac{2}{3}}=5^2\cdot3^2=225$;

მოცემული თვისებების გამოყენებით ნებისმიერი დადებითი a რიცხვისათვის გვაქვს:

$$a^0=a^{r-r}=\frac{a^r}{a^r}=1 \text{ და } a^{-r}=a^{0-r}=\frac{a^0}{a^r}=\frac{1}{a^r}.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{27}\cdot125^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}$;   ბ) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

ამოხსნა. ა) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{27}\cdot 125^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right)^{\frac{2}{3}}=$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=\frac{8}{27}-\frac{1}{225}=\frac{197}{675};$$

ბ) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{40}{9}\right)^{-2}=\frac{81}{1600}.$

მაგალითი 2. გავამარტივოთ გამოსახულება: $\frac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}}$.

ამოხსნა. $\frac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}}=\frac{\left(x^{0,5}\right)^{2}-\left(y^{0,5}\right)^{2}}{x^{0,5}+y^{0,5}}=\frac{\left(x^{0,5}-y^{0,5}\right)\cdot\left(x^{0,5}+y^{0,5}\right)}{x^{0,5}+y^{0,5}}=x^{0,5}-y^{0,5}=$

$$=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

პასუხი: $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

ხარისხის გამოსათვლელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ კალკულატორი:

1) შევიყვანოთ ხარისხის ფუძე;
2) დავაჭიროთ „xy“ კლავიშს;
3) შევიყვანოთ ხარისხის მაჩვენებელი;
4) დავაჭიროთ კლავიშს „=“ ან კლავიატურაზე კლავიშს „Enter“;
5) ეკრანზე დაიწერება ხარისხის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

მომდევნო პარაგრაფებში მოგვიწევს ისეთი ხარისხის განხილვა, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი ირაციონალური რიცხვია. მაგალითად, როგორ განვსაზღვროთ $2^{\sqrt{2}}$ ან როგორ გამოვთვალოთ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა?

ამ შემთხვევაში უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც ვიქცევით ირაციონალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებისას. კერძოდ, $\sqrt{2}$ ჩავანაცვლოთ მისი მიახლოებითი რაციონალური მნიშვნელობებით: $2^{\sqrt{2}}\approx 2^{r_k}$, სადაც r_k არის $\sqrt{2}$-ის 10^{-k} სიზუსტის მიახლოებითი მნიშვნელობა. მტკიცდება, რომ არსებობს ერთადერთი ნამდვილი a რიცხვი, რომელთანაც 2^{r_k} რიცხვი k-ს გაზრდის ხარჯზე ყველაზე ახლოს იქნება. $2^{\sqrt{2}}$ ამ a რიცხვს ეწოდება. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობები გამოითვლება კალკულატორით, თუ ხარისხის მაჩვენებელს მისი მახლობელი სასრული ათწილადით ჩავანაცვლებთ.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება $a^{\frac{m}{n}}$, სადაც $a>0$, $m\in Z$, $n\in N$?
2. რას უდრის a^{-r}, სადაც $a>0$?
3. რის ტოლია 7^{0}?
4. რა შემთხვევაში იკრიბება ხარისხის მაჩვენებლები?
5. რა შემთხვევაში მრავლდება ხარისხის მაჩვენებლები?

სავარჯიშოები

1 გამოსახულება ჩაწერე ფესვის სახით (იგულისხმება, რომ ყოველ გამოსახულებაში ხარისხის ფუძე დადებითია):

ა) $17^{\frac{2}{3}}$, $7^{\frac{1}{2}}$, $27^{-\frac{2}{3}}$, $16^{0,25}$, $7^{-0,75}$, 7;

ბ) $a^{\frac{1}{3}}$, $b^{-0,1}$, $x^{0,5}$, $y^{-0,3}$, $c^{-1,2}$, $z^{1,2}$, x;

გ) $(5a)^{\frac{1}{3}}$, $(3a)^{\frac{2}{3}}$, $(2a)^{-\frac{1}{3}}$, $(2x)^{\frac{1}{5}}$, $(2x)^{-\frac{1}{5}}$, $(a^2b^3)^{\frac{1}{5}}$, $(a^2x)^{-\frac{2}{5}}$;

დ) $(a-b)^{\frac{1}{2}}$, $(a-b)^{\frac{1}{4}}$, $(a+b)^{-\frac{3}{4}}$, $(a+b)^{\frac{1}{4}}$, $(1+x)^{-\frac{1}{3}}$.

2 წარმოადგინე კვადრატის სახით:

ა) $3^{\frac{1}{2}}$, $5^{-\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{2}{3}}$, $3^{-\frac{1}{4}}$, $7^{0,5}$, $2^{0,25}$, $(0,0001)^{0,75}$;

ბ) $7^{\frac{1}{2}}$, $8^{-\frac{2}{3}}$, $9^{\frac{3}{4}}$, $16^{-\frac{1}{4}}$, $5^{0,3}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$, $3^{\frac{1}{3}}$.

3 წარმოადგინე კუბის სახით:

ა) a^6, a^{12}, $a^{\frac{1}{6}}$, $b^{-\frac{1}{3}}$, b^{15}, $b^{0,9}$; $c^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{6}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;

ბ) a^9, a^2, $a^{-\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{4}}$, b^{-12}, $b^{0,3}$, $c^{\frac{1}{15}}$, $c^{-\frac{1}{5}}$, $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

4 წარმოადგინე ხარისხის სახით:

ა) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}}$, $\frac{\sqrt[5]{9}}{27}$, $\frac{3}{\sqrt[5]{81}}$, $\left(\sqrt[3]{9}\right)^5$, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

ბ) $\sqrt{\sqrt[5]{3^2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt{\sqrt[4]{3^5}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}}$;

გ) $\sqrt{\sqrt[5]{3^{\frac{2}{3}}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^{\frac{3}{5}}}}$, $\sqrt{\sqrt[4]{3^{\frac{1}{3}}}}$, $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\sqrt[3]{3}}$;

დ) $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{a^3b}$, $\sqrt[5]{2a}$, $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt{\sqrt[3]{x^7}}$, $\sqrt[5]{y\sqrt{x}}$, $\sqrt[7]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}$.

5 წარმოადგინე ფესვის სახით:

ა) $a^{\frac{1}{5}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}$; ბ) $b^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{12}}\sqrt{b}$; გ) $\left(c^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{8}}c^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

დ) $\sqrt[5]{a^{-2}\sqrt{a^3}}$; ე) $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}$; ვ) $\sqrt{\frac{x^5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}}$.

6 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{4}}$; ბ) $81^{\frac{2}{3}} : 81^{\frac{1}{6}}$; გ) $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}$; დ) $625^{\frac{2}{3}}$;

ე) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$; ვ) $\frac{\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^4}{\sqrt[3]{a^4}}$; ზ) $a^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$; თ) $a^{1,3} : \left(\frac{1}{a}\right)^{-0,7}$;

ი) $9^{\frac{1}{3}} \cdot 24^{\frac{1}{3}}$; კ) $a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$; ლ) $\sqrt[6]{x^{-3}}$; მ) $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$;

ნ) $a^{\frac{5}{12}} \cdot x^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$; ო) $\frac{\left(x^{-0,5}\right)^3 x^{\frac{6}{7}}}{\left(x^{-4}\right)^{\frac{2}{7}}}$.

7 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $0,5\left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^{-12}$; ბ) $36^{0,4} \cdot 2^{0,2} \cdot 3^{\frac{1}{5}}$; გ) $\left(5^{-2} \cdot 25\right)^{-3} \cdot \left(9 \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{7}}$;

დ) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; ე) $\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}\right)^{12}$; ვ) $\left(16^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{4}}$; ზ) $125^{\frac{2}{3}}$;

თ) $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; ი) $\left(512^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$; კ) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 81 \cdot 3^{-2\frac{1}{2}}$; ლ) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$;

მ) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$; ნ) $2^{1\frac{5}{12}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$; ო) $25^{\frac{2}{3}} \cdot 135^{\frac{2}{3}}$.

8 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left(100^{-0,5} \cdot 64^{\frac{2}{3}} \cdot 0,2^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{-\frac{3}{4}} \cdot 4^{-0,75}\right)^2$; ბ) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot 0,0081^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$;

გ) $\frac{12^{0,5} \cdot 8^{0,5}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 8} \cdot \frac{3^{0,5} \cdot 7^{\frac{4}{3}}}{8^{-\frac{1}{6}}}$; დ) $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1,5} + \left(0,125^0\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 4$.

9 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left(27^{-\frac{2}{3}} + 81^{\frac{3}{4}} - (0,25)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$; ბ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 0,0081^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$;

გ) $\left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$; დ) $\left[8^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

10 კალკულატორის გამოყენებით იპოვე რაციონალური რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის:

ა) $\left(\sqrt{15};4\right)$ შუალედს; ბ) $\left(\sqrt{2};\sqrt[3]{3}\right)$ შუალედს;

გ) $\left(2^{1,2};2^{1,3}\right)$ შუალედს; დ) $\left(2^{-1,3};2^{-1,2}\right)$ შუალედს.

11 გამოთვალე:

ა) $\left\{\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(25^{0,5}\cdot 25\right)^{2}\right]:\left(\frac{125^{\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{13}{8}}}{625^{-\frac{1}{4}}\cdot 32}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{16}};$

ბ) $\left[5\left(\sqrt{125}\right)^{-\frac{2}{3}}-25^{0,5}81^{-0,25}\right]\cdot\left[\left(5\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}+81^{-0,25}\right].$

12 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\frac{x-1}{x+x^{0,5}+1}\left(\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}\right)^{-1}+\frac{1}{x^{-0,5}\cdot 2^{-1}};$ ბ) $\frac{1-x^{-2}}{x^{0,5}+x^{-0,5}}+\frac{2}{x^{1,5}}+\frac{x^{-1}-x^{2}}{x^{1,5}-x^{0,5}}.$

13 გაამარტივე:

ა) $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2+8x+16}$, სადაც $-4<x<4;$

ბ) $\sqrt{25-10x+x^2}+\sqrt{x^2+10x+25}$, სადაც $x<-5;$

გ) $\sqrt{49-14x+x^2}+\sqrt{x^2+14x+49}$, სადაც $x>7;$

დ) $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2+8x+16}$, სადაც $x>4.$

14 იპოვე x და y, თუ:

ა) $\begin{cases}9^x\cdot 3^3\cdot 27^{2y}=81,\\ 9^y\cdot 3^4\cdot 27^x=243;\end{cases}$ ბ) $\begin{cases}8^x\cdot 4^4\cdot 4^{4y}=32,\\ 16^y\cdot 2^4\cdot 4^{3x}=64.\end{cases}$

15 გამოთვალე:

ა) 20-ის 10%; ბ) 10-ის 20%; გ) 5-ის 2%;
დ) 2-ის 5%; ე) 200-ის 150%.

16 იპოვე რიცხვი, თუ მისი:

ა) 5% უდრის 1-ს; ბ) 15% უდრის 12-ს;
გ) 7,5% უდრის 30-ს; დ) 1,2% უდრის 0,3-ს.

17 რა ხელფასი აქვს მანანას, თუ ხელფასის 20%-ით მან 600-ლარიანი ტელეფონი შეიძინა?

18 ლელამ 30% ფასდაკლებით შეძენილ ტელეფიზორში 1400 ლარი გადაიხადა. რა ღირდა ტელევიზორი ფასდაკლებამდე?

19 ნავთობის 10%-ით გაძვირების შემდეგ 1 ბარელი ნავთობის ფასი 78,1 დოლარს გაუტოლდა. რა ღირდა 1 ბარელი ნავთობი გაძვირებამდე ? (1 ბარელი ≈ 159 ლიტრია)

20 რამდენი პროცენტით უნდა გაიაფდეს 25%-ით გაძვირებული საქონელი, რათა საწყის ფასს დაუბრუნდეს?

21 მიმდევრობით დალაგებული 10 კვადრატიდან პირველზე დევს ხორბალი 1 მარცვალი, ხოლო ყოველ მომდევნოზე 2-ჯერ მეტი ვიდრე წინაზე. რამდენი ხორბლის მარცვალი დევს ათივე კვადრატზე ერთად?

2. 4 საფინანსო საქმიანობასთან დაკავშირებული ამოცანები

მიზანი

საფინანსო საქმიანობასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა

ამოცანა 1. რა თანხა დაგროვდება 6 წლის განმავლობაში ანაბარზე, ყოველწლიური 5%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით, თუ შეტანილი საწყისი თანხაა 2000 ლარი.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი რთული პროცენტის ფორმულით:

$$b_n = b\left(1+\frac{p}{100}\right)^n, \qquad (1)$$

სადაც b საწყისი თანხა, n წელთა რაოდენობა, p დასარიცხი პროცენტი, ხოლო b_n n წლის ბოლოს დაგროვილი თანხაა.

ჩვენს შემთხვევაში b=2000 ლარი, n=6, ხოლო p=5. ამიტომ

$$b_6=2000\cdot1{,}05^6\approx2000\cdot1{,}34=2680.$$

პასუხი. დაგროვდება 2680 ლარი.

რთული პროცენტის ფორმულა შეგვიძლია წლების არამთელი რაოდენობის შემთხვევაშიც გამოვიყენოთ.

ამოცანა 2. რა თანხა დაგროვდება ბანკში 3 წლისა და 3 თვის განმავლობაში ანაბარზე, ყოველწლიური 6%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით, თუ შეტანილი საწყისი თანხაა 5000 ლარი.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (1) ფორმულით იმ შემთხვევაში, როცა n=3,25, b=5000, p=6. კალკულატორის გამოყენებით და შედეგის 1 ლარამდე დამრგვალებით მივიღებთ:

$$5000\cdot1{,}06^{3{,}25}\approx5000\cdot1{,}20849279\approx6042.$$

პასუხი. დაგროვდება 6042 ლარი.

ამოცანა 3. სოფოს ბანკში შემნახველ ანაბარზე ყოველი წლის დასაწყისში შეაქვს 1000 ლარი. რა თანხა დაუგროვდება სოფოს 10 წლის განმავლობაში, თუ ანგარიშგება ყოველწლიური 4%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით ხორციელდება?

ამოხსნა. იმის გამო, რომ რთული პროცენტითაა დარიცხვა, პირველ წელს შეტანილი 1000 ლარი 10 წლის განმავლობაში მოგვცემს $1000\cdot(1{,}04)^{10}$ ლარს, მეორე წელს შეტანილი 1000 ლარი დარჩენილი 9 წლის განმავლობაში – $1000\cdot(1{,}04)^9$ ლარს, მესამე წელს შეტანილი 1000 ლარი დარჩენილი 8 წლის განმავლობაში – $1000\cdot(1{,}04)^8$ ლარს და ა.შ. მეათე წელს შეტანილი 1000 ლარი ერთ წლის განმავლობაში $1000\cdot1{,}04$ ლარს. 10 წლის ბოლოს სულ დაგროვდება $1000\cdot(1{,}04)^{10}+1000\cdot(1{,}04)^9+1000\cdot(1{,}04)^8+\ldots+1000\cdot1{,}04$ ლარი.

მიღებული ჯამი წარმოადგენს 10 შესაკრებისაგან შედგენილ გეომეტრიულ პროგრესიას. თუ ამ პროგრესიის პირველ წევრად ავიღებთ $b_1=1000\cdot1{,}04$-ს, მაშინ მისი მნიშვნელი იქნება q=1,04 . ვისარგებლოთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის გამოსათვლელი ფორმულით

$$S_n=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}.$$

ამ ფორმულაში შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ:

$$1000\cdot(1{,}04)^{10}+1000\cdot(1{,}04)^{9}+1000\cdot(1{,}04)^{8}+\ldots+1000\cdot1{,}04=\frac{1000\cdot1{,}04\left(1{,}04^{10}-1\right)}{1{,}04-1}.$$

მიღებული გამოსახულების კალკულატორის დახმარებით ერთეულამდე სიზუსტით გამოთვლილი რიცხვითი მნიშვნელობაა 12486.

პასუხი. 10 წლის განმავლობაში სოფოს დაუგროვდება 12486 ლარი.

თუ განხილული ამოცანის რიცხვით მონაცემებს ასოებით ჩავანაცვლებთ, ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

თუ ბანკში ყოველი წლის დასაწყისში შეტანილი თანხაა a ლარი, ხოლო ყოველწლიური რთული საპროცენტო დარიცხვა – p%, მაშინ ანგარიშზე n წლის ბოლოს დაგროვილი თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$$S_n=\frac{aq\left(q^n-1\right)}{q-1},\qquad (2)$$

სადაც $q=1+\dfrac{p}{100}$.

ამოცანა 4. ვთქვათ, წლის ბოლოს ანგარიშზე გაქვს b ლარი, ხოლო მომდევნო წლის დასაწყისიდან იმავე ანგარიშზე ყოველწლიურად შეგაქვს a ლარი. რა თანხა დაგროვდება ანგარიშზე n წლის შემდეგ, p%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით?

ამოხსნა. p%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით n წლის შემდეგ საწყისი b ლარიდან მიიღება bq^n ლარი, ხოლო ყოველწლიურად შეტანილი a ლარიდან, მე-2 ფორმულის თანახმად, მიიღება $\dfrac{aq\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ლარი, სადაც $q=1+\dfrac{p}{100}$. საბოლოოდ ანგარიშზე დაგროვილი S თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$$S=bq^n+\frac{aq\left(q^n-1\right)}{q-1},\qquad (3)$$

სადაც $q=1+\dfrac{p}{100}$.

ამოცანა 5. ლაშამ ბინის შესაძენად ბანკიდან 200000 ლარის იპოთეკური სესხი აიღო. რა თანხა უნდა გადაიხადოს ლაშამ ყოველწლიურად, რათა სესხი 15 წელიწადში დაფაროს, თუ სესხზე ყოველწლიური საპროცენტო დარიცხვაა 10%.

ამოხსნა: ვთქვათ ლაშამ ყოველწლიურად უნდა გადაიხადოს a ლარი. მე-2 ფორმულის თანახმად მის მიერ 15 წლის განმავლობაში გადახდილი თანხა 10%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვის გათვალისწინებით იქნება

$$\frac{a\cdot1{,}1\left(1{,}1^{15}-1\right)}{1{,}1-1}\approx11a\cdot3{,}18\approx35a \text{ ლარი.}$$

მიღებულმა თანხამ უნდა დაფაროს სესხად აღებული 200000 ლარიდან 15 წლის განმავლობაში რთული საპროცენტო დარიცხვით მიღებული თანხა, რაც $200000\cdot1{,}1^{15}\approx200000\cdot4{,}18=836000$ ლარს უდრის. მივიღეთ განტოლება

35a=836000, საიდანაც a≈23886.

პასუხი: ლაშამ ყოველწლიურად უნდა გადაიხადოს 23 886 ლარი.

მე-4 ამოცანის განზოგადებით ვღებულობთ:

თუ ბანკში n-წლითა და p- პროცენტით აღებული სესხია b ლარი, მაშინ მის დასაფარად საჭირო ყოველწლიური გადასახადი გამოითვლება ფორმულით:

$$a = \frac{bq^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}, \qquad (4)$$

სადაც $q = 1 + \frac{p}{100}$.

მე-4 ფორმულა, ისევე როგორც წინა ამოცანის შემთხვევაში, მიიღება p-პროცენტიანი რთული საპროცენტო დარიცხვით მიღებული იმ ორი თანხის გატოლებით, რომელთაგან ერთი a ლარის ყოველწლიურად გადახდის შედეგად (მე-2 ფორმულა), ხოლო მეორე სესხად აღებული b ლარის შედეგად დაგროვდება (1-ელი ფორმულა).

უპასუხე კითხვებს:

1. რაში მდგომარეობს რთული საპროცენტო დარიცხვა?
2. როგორ პროგრესიას წარმოადგენს (1) ფორმულით მოცემული მიმდევრობა?
3. როგორ გამოვიყენეთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა მე-2 ტოლობის მისაღებად?
4. რა სიდიდეთა გატოლებით მიიღება მე-4 ფორმულა?
5. როგორ გამოითვლი მე-4 ფორმულის დახმარებით ყოველთვიურ გადასახადს?
6. მე-4 ამოცანაში მოცემული პირობების მიხედვით, გამართლებულია თუ არა ლაშას მიერ სესხის აღება, თუ მისი საშუალო თვიური შემოსავალი 1800 ლარია?

სავარჯიშოები

1 მაისში მამუკამ ხელფასის სახით 2500 ლარი, ხოლო ივნისში 3000 ლარი მიიღო. რამდენი პროცენტით მოიმატა მამუკას ხელფასმა?

2 ქალის ლაბადა 2-ჯერ 30% -იანი ფასდაკლების შემდეგ 490 ლარად გაყიდეს. ა) რა ღირდა ლაბადა ფასდაკლებამდე? ბ) რამდენი პროცენტით დაიკლო ლაბადის ფასმა?

3 ბენზინი იანვრიდან მაისის ჩათვლით ყოველთვიურად საშუალოდ 3 პროცენტით ძვირდებოდა. რა ღირდა 1 ლიტრი ბენზინი მაისის ბოლოს, თუ იანვრის დასაწყისში მისი ფასი 3,2 ლარი იყო.

4 სურათი აუქციონზე 2-ჯერ ერთი და იმავე პროცენტით ფასის მატების შემდეგ საწყის ფასზე $2\frac{1}{4}$-ჯერ ძვირად გაიყიდა.

ა) რამდენი პროცენტით მატულობდა ფასი თითოეულ ჯერზე;
ბ) სულ რამდენი პროცენტით გაიზარდა ფასი?

5 ფასის 2-ჯერ ერთი და იმავე პროცენტით კლების შემდეგ ტელევიზორი საწყის ფასზე $1\frac{7}{9}$-ჯერ იაფად გაიყიდა. ა) რამდენი პროცენტით კლებულობდა ფასი თითოეულ ჯერზე; ბ) სულ რამდენი პროცენტით დაიკლო ფასმა?

6 ფეხსაცმელი 3-ჯერ ერთი და იმავე პროცენტით ფასდაკლების შემდეგ საწყის ფასზე $3\frac{3}{8}$-ჯერ იაფად გაიყიდა. ა) რამდენ პროცენტს შეადგენდა ფასდაკლება თითოეულ ჯერზე? ბ) სულ რამდენი პროცენტით დაიკლო ფასმა?

7 რა თანხა დაგროვდება 4 წლისა და 6 თვის განმავლობაში ანაბარზე ყოველწლიური 4%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით, თუ ანაბარზე შეტანილი საწყისი თანხაა 600 ლარი.

8 რა თანხა შეიტანა ანაბარზე ლელამ, თუ წლიური 5%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით, ანგარიშზე 2 წლის განმავლობაში 44100 ლარი დაგროვდა?

9 გიას ყოველი წლის დასაწყისში ბანკში შემნახველ ანაბარზე შეაქვს 500 ლარი. რა თანხა დაუგროვდება გიას 6 წლის განმავლობაში, თუ ანგარიშგება ყოველწლიური 5%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით ხორციელდება?

10 რა თანხა უნდა შევიტანოთ ბანკში ყოველი წლის დასაწყისში, რომ 10%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვის შემთხვევაში 3 წელიწადში ანგარიშზე 7282 ლარი დაგროვდეს?

11 კახას წლის ბოლოს ანგარიშზე ჰქონდა 400 ლარი, ხოლო მომდევნო წლის დასაწყისიდან იმავე ანგარიშზე ყოველწლიურად შეჰქონდა 200 ლარი. რა თანხა დაუგროვდება კახას ანგარიშზე 4 წლის განმავლობაში 8%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით?

12 ლიამ ბინის შესაძენად ბანკიდან 100000 ლარის იპოთეკური სესხი აიღო. რა თანხა უნდა გადაიხადოს ლიამ ყოველწლიურად, რათა სესხი 10 წელწადში დაფაროს, თუ სესხზე ყოველწლიური საპროცენტო დარიცხვაა 8%.

13 გამოთვალე, რა თანხის გადახდა იქნება საჭირო ყოველთვიურად, ბანკიდან 10000 ლარის 16%-იანი სესხის აღების შემთხვევაში, რათა სესხი 5 წელიწადში დაიფაროს.

14 კატომ ბანკიდან აღებული სესხი 5 წლის განმავლობაში დაფარა. რა თანხა ისესხა კატომ, თუ სესხზე ყოველწლიური საპროცენტო დარიცხვა იყო 8%, ხოლო კატო წლიურად 15000 ლარს იხდიდა?

15 A ბანკში წლიური საპროცენტო დარიცხვაა 8%, ხოლო B ბანკში – 10%. რამდენი პროცენტით მეტი ყოველთვიური გადასახადი მოგვიწევს B ბანკში A ბანკთან შედარებით 5 წლის განმავლობაში, ერთი და იმავე სესხის შემთხვევაში?

აბა, სცადე!

დაადგინე, რომელი წლის რომელ თვეში გაორმაგდება საბანკო ანგარიშზე 2024 წლის დასაწყისში შეტანილი თანხა, თუ წლიური საპროცენტო დარიცხვაა 5%.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №2

1 $\frac{37}{20}$-ის ათწილადი ჩანაწერია:

ა) 3,7; ბ) 0, 37; გ) 1,85; დ) 1,17.

2 მოცემული წილადებიდან რომელი ჩაიწერება სასრული ათწილადის სახით?

ა) $\frac{11}{6}$; ბ) $\frac{21}{30}$; გ) $1\frac{7}{9}$; დ) $\frac{12}{17}$.

3 წარმოადგინე ათწილადის სახით $\frac{13}{15}$.

ა) 0,8(6); ბ) 0,6(8); გ) 0,(13); დ) 0,(15).

4 წარმოადგინე პერიოდული ათწილადი წილადის სახით 3,42(5).

ა) $\frac{31}{9}$; ბ) $3\frac{21}{990}$; გ) $3\frac{5}{900}$; დ) $3\frac{383}{900}$.

5 მოცემული რიცხვებიდან რომელია ირაციონალური რიცხვი?

ა) 7,(7); ბ) 0,13(15); გ) $\sqrt{2,25}$; დ) $\sqrt{5}$.

6 $\sqrt{3}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეათედის სიზუსტის არის:

ა) 1,5; ბ) 1,3; გ) 1,7; დ) 1,17.

7 ქვემოთ მოცემული გამონათქვამებიდან რომელია მცდარი? შენი მოსაზრება დაასაბუთე კონტრმაგალითის მოყვანით.

ა) ყოველი ნატურალური რიცხვი მთელი რიცხვია;

ბ) ყოველი პერიოდული ათწილადი რაციონალური რიცხვია;

გ) ნებისმიერი ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი ირაციონალური რიცხვია;

დ) ნებისმიერი ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი რაციონალური რიცხვია.

8 თებერვალში პალტოს ფასი 40%-ით შემცირდა, ხოლო მარტში ფასს კიდევ 60% დააკლდა. სულ რამდენი პროცენტით შემცირდა პალტოს ფასი ორ თვეში?

ა) 76%-ით; ბ) 20%-ით; გ) 100%-ით; დ) 24%-ით.

9 რა თანხა დაგროვდება ბანკში 4 წლისა და 9 თვის განმავლობაში, თუ საწყისი შენატანია 1000 ლარი, ხოლო წლიური საპროცენტო დარიცხვა 4%? (პასუხი ჩაწერე 1 თეთრამდე სიზუსტით.)

10 რა ყოველწლიური თანხის გადახდა მოუწევს კლიენტს 10 წლის განმავლობაში, ბანკიდან 40000 ლარის 20%-იანი სესხის აღების შემთხვევაში? (პასუხი ჩაწერე 1 თეთრამდე სიზუსტით.)

ამ თავში ისწავლი:

- კუთხის რადიანულ ზომას;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტებას;
- ნებისმიერი რიცხვითი არგუმენტისთვის;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებებსა და გრაფიკს;
- დაყვანის ფორმულებს;
- უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას;
- კოსინუსების თეორემას;
- სინუსების თეორემას;
- მრავალკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკების აგებას;
- პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციების ამოცნობას;
- დაყვანის ფორმულების გამოთვლების საწარმოებლად გამოყენებას;
- სამკუთხედის ამოხსნას (სამკუთხედის სამი ელემენტით დანარჩენი ელემენტების პოვნას);
- სამკუთხედის სამი ელემენტით მედიანის, ბისექტრისის, სიმაღლის, ფართობის, ჩახაზულ და შემოხაზულ წრეთა რადიუსების პოვნას;
- მიუვალ ადგილამდე მანძილის, ორ ობიექტს შორის მანძილის, ობიექტის ზომების დადგენას ტრიგონომეტრიის გამოყენებით.

ჰერონ ალექსანდრიელი
ახ.წ. I საუკუნე
მათემატიკოსი და
ინჟინერ-გამომგონებელი

ჰერონი ყველა დროის ერთ-ერთ უდიდეს გამომგონებლადაა მიჩნეული. ინფორმაცია მისი მათემატიკური მიღწევებისა და საოცარი საინჟინრო გამოგონებების შესახებ შეგიძლია მოიძიო ინტერნეტში.

კომპლექსური დავალება
„გეომეტრიული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით“

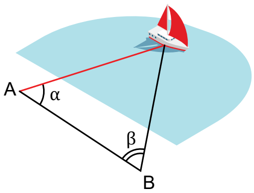
ტრიგონომეტრია ქართულად სამკუთხედის გაზომვას ნიშნავს. იგი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის მიმართებებს ადგენს. ტრიგონომეტრიული გამოთვლები გამოიყენება მათემატიკის, ფიზიკისა და საინჟინრო საქმის ყველა მიმართულებაში. ტრიგონომეტრიას იყენებენ ასტრონომები ვარსკვლავებამდე, ხოლო გეოგრაფები გეოგრაფიულ ობიექტებამდე მანძილის დასადგენად, მედიკოსები – კომპიუტერულ ტომოგრაფიაში, ნავიგაციის სპეციალისტები – საჰაერო და საზღვაო ნავიგაციაში და სხვ.

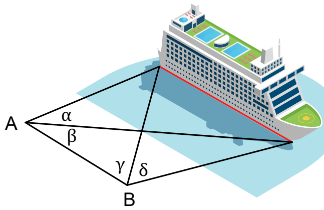
ტრიგონომეტრიას გარკვეული გაზომვების ჩასატარებლად წინა წლებშიც ვიყენებდით. ვადგენდით ხის ან შენობის სიმაღლეს, მანძილს ორ წერტილს შორის და ა.შ. მაგრამ ყველა ამ გამოთვლაში ვსარგებლობდით მხოლოდ მართკუთხა სამკუთხედში არსებული ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულებით.

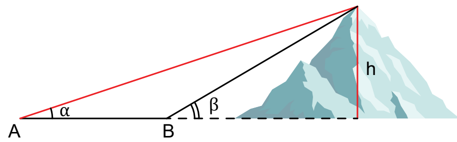
ამ თავში მოცემული მასალა, რომელიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების უფრო ღრმა ანალიზს ეთმობა, საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ნებისმიერი სამკუთხედი, ანუ სამკუთხედის მოცემული სამი ელემენტით, რომელთაგან ერთი მაინცაა გვერდი, ვიპოვოთ სამკუთხედის დანარჩენი ელემენტები.

სამკუთხედის ამოხსნის ამ თავში განხილული მეთოდები საშუალებას იძლევა პრაქტიკული გაზომვები ვაწარმოოთ გასაზომი ობიექტიდან დიდ მანძილზე ყოფნის შემთხვევაშიც. ასეთი გაზომვის რამდენიმე მაგალითი სახელმძღვანელოშია მოცემული.

ქვემოთ მოცემულია სამი სქემატური ნახაზი, რომელთაგან ერთზე ნაპირიდან ზღვაში მოდრეიფე გემამდე მანძილი, მეორე შემთხვევაში – გემის სიგრძე, ხოლო მესამე შემთხვევაში – მწვერვალამდე მანძილი და მწვერვალის სიმაღლეა გამოსათვლელი.







შენი დავალება:

1. ნახაზებზე მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის სიტყვიერად აღწერე საძიებელი სიდიდეების პოვნის ეტაპები და გამოსახე ეს სიდიდეები ნახაზზე მოცემული სიდიდეების საშუალებით (ნახაზებზე მოცემულად ითვლება AB მონაკვეთი და მასთან მდებარე კუთხეები);

2. მიღებული შედეგები გამოიყენე პრაქტიკული გაზომვებისათვის:

ა) გაზომვები ჩაატარე შენთვის მოხერხებული სხვადასხვა ობიექტის შემთხვევაში (მაგალითად გაზომე მანძილი, მახლობლად მდგომ ობიექტამდე, ხის ან შენობის სიმაღლე, უახლოესი გორაკის ან მთის სიმაღლე და სხვა). შეეცადე, რომ ჩატარებული გაზომვები მოიცავდეს მოცემული ნახაზების სამივე შემთხვევას;

ბ) გაითვალისწინე, რომ ნახაზებზე მოცემული AB მონაკვეთის სიდიდის შერჩევისას, რაც, ერთი შეხედვით, მხოლოდ შენზეა დამოკიდებული, რეალური შედეგის მისაღებად ეს სიდიდე გასაზომი ობიექტის თანაზომადი უნდა იყოს. მაგალითად, თუ ხის სიმაღლის გასაზომად საკმარისია AB-სთვის ავიღოთ 1-2 მეტრი, მყინვარის სიმაღლის გასაზომად ასეთი სიგრძის მონაკვეთი არ გამოდგება, რადგან ამ შემთხვევაში α და β კუთხეებს შორის განსხვავება პრაქტიკულად არ დაფიქსირდება. ამიტომაა, რომ მაგალითად, მახლობელ პლანეტებამდე მანძილის გასაზომად A-სა და B-ს როლში იღებენ დედამიწის ორ უშორეს წერტილთა წყვილს, ხოლო შორეულ ვარსკვლავებამდე მანძილის გასაზომად დედამიწაზე არსებული მანძილები გამოუსადეგარია;

გ) კუთხეთა გასაზომად კუთხის მზომი ხელსაწყო შეგიძლია თვითონ დაამზადო.

3. შეადარე შენ მიერ ჩატარებული გაზომვის შედეგები რეალურ ზომებს;

4. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ გაზომე საჭირო კუთხეები;
- როგორ გამოთვალე კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები;
- რა ნიშნით შეარჩიე გასაზომი მანძილები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად;

5. ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და იმ ობიექტების ფოტოები, რომელთა ზომებიც გამოთვალე.

3.1 პერიოდული ფუნქცია

მიზანი

პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრა და გრაფიკის აგება.

ამოცანა. გიგა ყოველ მე-3 დღეს დადის ცურვაზე, ლალი – ყოველ მე-4 დღეს.

1 ოქტომბერს გიგა და ლალი ერთად იყვნენ ცურვაზე. ოქტომბრის კიდევ რომელ რიცხვებში იქნებიან გიგა და ლალი ცურვაზე ერთად?

ამოხსნა. პირობის თანახმად გიგა ცურვაზე იქნება ოქტომბრის 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 და 31 რიცხვებში, ხოლო ლალი – 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 და 29 რიცხვებში. ამ ორ ჩამონათვალში საერთო დღეებია 1, 13 და 25. ე.ი. გიგა და ლალი ცურვაზე ერთად კიდევ 13 და 25 ოქტომბერს იქნებიან.

პასუხი. 13 და 25 რიცხვებში.

მოვლენას, რომელიც დროის ერთი და იმავე ინტერვალის შემდეგ მეორდება, **პერიოდული მოვლენა** ეწოდება. პერიოდული მოვლენებია: დედამიწის მზის გარშემო ბრუნვა, მთვარის დედამიწის გარშემო ბრუნვა, დღე-ღამის მონაცვლეობა და სხვ.

განხილულ ამოცანაში გიგას ცურვაზე ყოფნა მეორდება ყოველ 3 დღეში, ლალის ყოფნა – ყოველ 4 დღეში. სხვა სიტყვებით, გიგას ცურვაზე ყოფნის პერიოდია 3 დღე, ლალის – 4 დღე, ხოლო ორივესი ერთად – 3-ისა და 4-ის საერთო ჯერადი, ანუ 12 დღე.

პერიოდულობის თვისება ზოგიერთ რიცხვით ფუნქციასაც ახასიათებს. მოვიყვანოთ ამ თვისების ზუსტი განმარტება:

f რიცხვით ფუნქციას ეწოდება პერიოდული ფუნქცია T პერიოდით, თუ არსებობს ისეთი T არანულოვანი რიცხვი, რომ ყოველი x რიცხვისათვის f ფუნქციის განსაზღვრის არიდან, სრულდება ორი პირობა:

1. $x+T$ და $x-T$ რიცხვები ეკუთვნის f ფუნქციის განსაზღვრის არეს;
2. $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

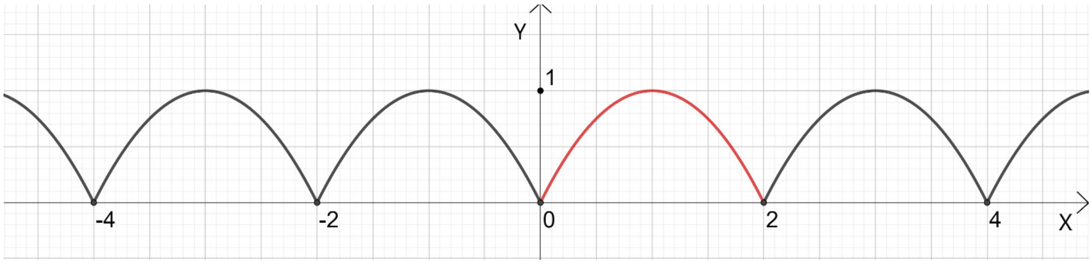
ადვილად შეგიძლია დარწმუნდე, რომ თუ T რიცხვი f ფუნქციის პერიოდია, მაშინ f ფუნქციის პერიოდი იქნება, აგრეთვე, T რიცხვის ნებისმიერი ჯერადი რიცხვი, ანუ kT სახის რიცხვი, სადაც k ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

პერიოდული ფუნქციის უმარტივესი მაგალითია მუდმივი ფუნქცია. ასეთი ფუნქციის პერიოდი იქნება ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვი (ახსენი, რატომ.)

მთელ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული T პერიოდის მქონე პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია, გრაფიკი ავაგოთ T სიგრძის რაიმე შუალედში, ხოლო შემდეგ ეს გრაფიკი $(kT;0)$, $k\in Z$, პარალელური გადატანით გავავრცელოთ მთელ ღერძზე.

მაგალითი. ავაგოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 2-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც $[0;2]$ შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x)=2x-x^2$.

ამოხსნა. როგორც ვხედავთ, [0;2] შუალედში f კვადრატული ფუნქციაა. ამიტომ ამ შუალედში მისი გრაფიკი იქნება პარაბოლის ნაწილი. ავაგოთ ეს ნაწილი და შემდეგ (±2; 0) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანის მრავალჯერადი გამოყენებით გავავრცელოთ მთელ ღერძზე (იხილე ნახაზი).



უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება პერიოდული ფუნქცია?
2. რას ეწოდება ფუნქციის პერიოდი?
3. რა პერიოდული ბუნებრივი მოვლენები იცი?
4. როგორ ააგებ პერიოდული ფუნქციის გრაფიკს?

სავარჯიშოები

1 ორი მაღვიძარა საათიდან ერთი ყოველ 2 საათში, ხოლო მეორე – ყოველ 3 საათში რეკავს. დილის 8 საათზე ორივე საათმა დარეკა. კიდევ რამდენჯერ დარეკავს ორივე საათი ერთდროულად მეორე დილის 7 საათამდე?

2 მაღვიძარა საათი ზარს ყოველ 5 საათში რეკავს. საათმა დარეკა დილის 6 საათზე. რამდენი დღის შემდეგ დარეკავს საათი ისევ დილის 6 საათზე?

3 f პერიოდული ფუნქციაა 1-ის ტოლი პერიოდით. ამასთან, $f(-0,3)=9$. იპოვე:
ა) $f(-2,3)$; ბ) $f(3,7)$.

4 f და g ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული პერიოდული ფუნქციებია. f ფუნქციის პერიოდია 3, g ფუნქციის პერიოდი – 5. ამასთან, $f(0)+g(0)=-3$. იპოვე:
ა) $f(3)+g(5)$; ბ) $f(-6)+g(-10)$; გ) $f(15)+g(15)$.

5 f და g ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული პერიოდული ფუნქციებია. f ფუნქციის პერიოდია 4, g ფუნქციის პერიოდი – 5. რა პერიოდი აქვს f+g ფუნქციას?

6 ააგე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 1-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც [0; 1] შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x)=x-x^2$.

7 ააგე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 4-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც $[-2;2]$ შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x)=2-|x|$.

8 ვთქვათ, f ფუნქციის პერიოდებია T_1 და T_2 დადებითი რიცხვები. იქნება თუ არა (T_1+T_2) რიცხვი ამავე ფუნქციის პერიოდი?

9 დაამტკიცე, რომ $f(x)=2x$ ფუნქცია არაა პერიოდული.

10 მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია მოცემულია ტოლობით:

$$f(m)=\begin{cases}1, & \text{თუ } |m| \text{ კენტია,}\\ 2, & \text{თუ } |m| \text{ ლუწია.}\end{cases}$$

დაამტკიცე, რომ f პერიოდული ფუნქციაა და იპოვე მისი უმცირესი დადებითი პერიოდი.

11 დირიხლეს ფუნქცია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე შემდეგი წესით განსაზღვრული ფუნქციაა:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,}\\ 0, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია.}\end{cases}$$

დაამტკიცე, რომ დირიხლეს ფუნქცია პერიოდული ფუნქციაა და დაადგინე მისი პერიოდი. აქვს თუ არა ამ ფუნქციას უმცირესი დადებითი პერიოდი?

12 ვთქვათ, f_1 და f_2 საერთო განსაზღვრის არის მქონე პერიოდული ფუნქციებია, შესაბამისად, T_1 და T_2 პერიოდებით. დაამტკიცე, რომ თუ $\frac{T_1}{T_2}$ შეფარდება რაციონალური რიცხვია, მაშინ f_1+f_2 პერიოდული ფუნქციაა.

13 გამოთვალე:

ა) $\sin30°+\sin60°$; ბ) $\cos30°+\cos60°$;

გ) $\mathrm{tg}30°+\mathrm{tg}60°$; დ) $\sin45°\cdot\mathrm{tg}45°\cdot\cos45°$.

14 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდებაა 5:12. გამოთვალე სამკუთხედის უმცირესი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

15 მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეებია α და β. გამოთვალე:

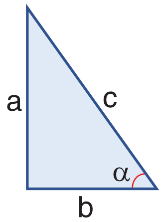
ა) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$; ბ) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$;

გ) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\sin^2\beta$; დ) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}$.

3.2 ერთეულოვანი წრეწირი

მიზანი

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით



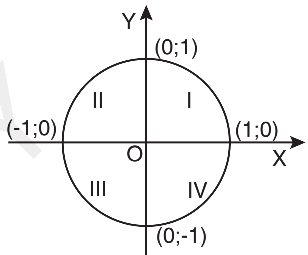
ნახ. 1

აქამდე ტრიგონომეტრიული ფუნქიების განმარტება ვიცოდით მახვილი კუთხის შემთხვევაში. ამ განმარტებაში ვიყენებდით მართკუთა სამკუთხედს. გავიხსენოთ ეს განმარტებები (ნახ.1):

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\ \cos\alpha=\frac{b}{c};\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

ჩვენი მიზანია ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განვმარტოთ ნებისმიერი გრადუსული ზომის არგუმენტისათვის.

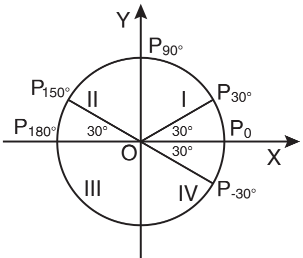
საკოორდინატო სიბრტყეზე დავხაზოთ 1-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 2). ასეთ წრეწირს **ერთეულოვანი წრეწირი** ეწოდება. ეს წრეწირი საკოორდინატო ღერძებს გადაკვეთს (1;0), (0;1), (–1;0) და (0;–1) კოორდინატების მქონე წერტილებში და ამ წერტილებით იყოფა 4 ღია რკალად, რომლებიც გადანომრილია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ნახ. 2

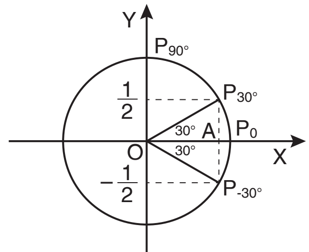
(1;0) კოორდინატების მქონე წერტილი აღვნიშნოთ P_0-ით (ნახ.3),

ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α-თი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი წრეწირის ის წერტილი, რომელიც მიიღება P_0 წერტილის α გრადუსით მობრუნებით კოორდინატთა სათავის მიმართ. ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ დადებითი α-სათვის მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო უარყოფითი α-სათვის – საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. მე-3 ნახაზზე ნაჩვენებია P_α წერტილის მდებარეობა, როცა $\alpha=30°$, 90°, 150° და –30°.



ნახ. 3

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ P_α წერტილის კოორდინატები, როცა: ა) $\alpha=30°$; ბ) $\alpha=-30°$; გ) $\alpha=390°$.



ნახ. 4

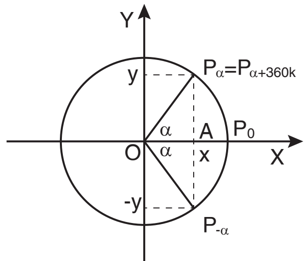
ამოხსნა. ა) იმის გამო, რომ $OAP_{30°}$ მართკუთხა სამკუთხედში OP_{30} ჰიპოტენუზა (ნახ.4) 1-ის ტოლია, $AP_{30°}$ კათეტი იქნება $\frac{1}{2}$-ის, ხოლო OA კათეტი $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ის ტოლი. მაშასადამე, $P_{30°}$ წერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$;

ბ) $P_{-30°}$ წერტილი $P_{30°}$ წერტილის სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, ამიტომ მისი პირველი კოორდინატი იგივეა, რაც $P_{30°}$-ის პირველი კოორდინატი, ანუ $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ხოლო მეორე კოორდინატი – მხოლოდ ნიშნით განსხვავებული, ანუ $-\frac{1}{2}$.

გ) 390°=30°+360°, ე.ი. $P_{390°}$ წერტილი მიიღება P_0 წერტილის ჯერ 30 გარადუსით, ხოლო შემდეგ 360 გრადუსით მობრუნებისას. მაგრამ 360 გრადუსით მობრუნება ერთი სრული ბრუნია, ანუ $P_{390°}=P_{30°}$.

პასუხი: ა) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; ბ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; გ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

ანალოგიური მსჯელობით ადვილად დარწმუნდები ქვემოთ მოცემული თეორემის მართებულობაში (იმსჯელე მე-5 ნახაზის მიხედვით):



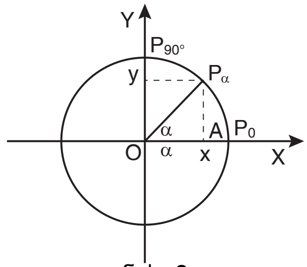
ნახ. 5

თეორემა 1. თუ P_α წერტილის კოორდინატებია (x; y), მაშინ $P_{-\alpha}$ წერტილის კოორდინატები იქნება (x; –y), ხოლო $P_{\alpha+360\cdot k}$ წერტილის კოოორდინატები, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია – ისევ (x;y).

ვთქვათ, 0°<α<90° და P_α წერტილის კოორდინატებია (x;y) (ნახ.6). თუ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების (1) ტოლობებით მოცემულ განმარტებებს დავწერთ OAP_α მართკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში, მივიღებთ:

$$\sin\alpha=\frac{AP_\alpha}{OP_\alpha}=\frac{y}{1}=y;\ \cos\alpha=\frac{AO}{OP_\alpha}=\frac{x}{1}=x;\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{AP_\alpha}{OA}=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

მივიღეთ, რომ თუ α მახვილი კუთხის ზომაა, მაშინ P_α წერტილის პირველი კოორდინატაა cosα, მეორე კოორდინატა – sinα, ხოლო მეორე კოორდინატის პირველ კოორდინატთან ფარდობა – tgα. ამ გარემოებაზე დაყრდნობით შეგვიძლია განვმარტოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნებისმიერი α-სთვის:



ნახ. 6

განმარტება. ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α წერტილის აბსცისას ეწოდება cosα, ხოლო ორდინატას – sinα. იმ შემთხვევაში, როცა აბსცისა განსხვავდება 0-ისგან, ორდინატის აბსცისასთან ფარდობას ეწოდება tgα.

მაშასადამე: ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α წერტილის კოორდინატებია (cosα; sinα).

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ა) sin0°, cos0°, tg 0°; ბ) sin90°, cos90°, tg90°.

ა) მე-6 ნახაზზე P_0 წერტილის კოორდინატებია (1;0), რაც, განმარტების თანახმად, ნიშნავს:

$\sin 0°=0,\ \cos 0°=1,\ \mathrm{tg}0°=\frac{0}{1}=0;$

ბ) მე-6 ნახაზზე P_{90} წერტილის კოორდინატებია (0;1), რაც, განმარტების თანახმად ნიშნავს: sin90°=1, cos90°=0, ხოლო tg90° არ არსებობს, რადგან 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება.

1-ელი თეორემიდან და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მოცემული განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ნებისმიერი α არგუმენტისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha; \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+360°\cdot k)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha+360°\cdot k)=\cos\alpha, \qquad (3)$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ sin (–750°) და cos(–750°).

ამოხსნა. მე-2 ტოლობების ძალით sin (–750°)=–sin 750° და cos(–750°)= cos750°, ხოლო მე-3 ტოლობების ძალით:

$\sin 750°=\sin(30°+2\cdot 360°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 750°=\cos(30°+2\cdot 360°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

პასუხი. $\sin(-750°)=-\frac{1}{2}$, $\cos(-750°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?
2. რას ეწოდება ერთეულოვანი წრეწირი?
3. რა კოორდინატების მქონე წერტილში კვეთს ერთეულოვანი წრეწირი აბსცისათა ღერძს? ორდინატთა ღერძს?
4. რა კოორდინატები აქვს: ა) $P_{0°}$; ბ) $P_{180°}$; გ) $P_{270°}$; დ) $P_{-90°}$ წერტილს?
5. P_α წერტილის რომელი კოორდინატია $\sin\alpha$? $\cos\alpha$?
6. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება არგუმენტის ნიშნის შეცვლით?
7. რა ნიშანი ექნება: ა) $\sin\alpha$-ს; ბ) $\cos\alpha$-ს, როცა $90°<\alpha<180°$?

სავარჯიშოები

1 დახაზე ერთეულოვანი წრეწირი და მონიშნე მასზე P_α წერტილი, სადაც:
ა) $\alpha=10°$; ბ) $\alpha=-45°$; გ) $\alpha=-90°$; დ) $\alpha=300°$; ე) $\alpha=120°$; ვ) $\alpha=270°$.

2 გაარკვიე, რომელ მეოთხედშია P_α წერტილი, თუ α არის:
$285°$; $-376°$; $204°$; $-172°$; $-12°$; $730°$; $-90°$; $800°$.

3 ვთქვათ, P_α წერტილის კოორდინატებია $(x;y)$. იპოვე P_β წერტილის კოორდინატები, თუ:
ა) $\beta=\alpha-360°$; ბ) $\beta=\alpha+720°$; გ) $\beta=\alpha+180°$.

4 დაადგინე, დადებითია თუ უარყოფითი:
ა) $\sin65°$; $\sin105°$; $\sin161°$; $\sin179°$; $\sin200°$; $\sin250°$; $\sin365°$; $\sin380°$;

ბ) $\cos40°$; $\cos87°$; $\cos100°$; $\cos192°$; $\cos200°$; $\cos250°$; $\cos339°$; $\cos380°$;

გ) $\mathrm{tg}40°$; $\mathrm{tg}80°$; $\mathrm{tg}100°$; $\mathrm{tg}102°$; $\mathrm{tg}185°$; $\mathrm{tg}250°$; $\mathrm{tg}286°$; $\mathrm{tg}320°$; $\mathrm{tg}368°$.

5 დაადგინე, რომელ მეოთხედებშია დადებითი: ა) სინუსი; ბ) კოსინუსი; გ) ტანგენსი.

6 რა ნიშანი აქვს ქვემოთ მოცემულ გამოსახულებას?
ა) $\sin145°$; ბ) $\sin(-92°)$; გ) $\cos145°$; დ) $\cos(-45°)$; ე) $\mathrm{tg}96°$; ვ) $\mathrm{tg}182°$.

7 რა ნიშანი აქვს ნამრავლს?
ა) $\sin85°\cdot\sin102°$; ბ) $\cos184°\cdot\cos172°$; გ) $\sin142°\cdot\sin142°\cdot\mathrm{tg}142°$;

დ) $\mathrm{tg}111°\cdot\mathrm{tg}172°$; ე) $\cos192°\cdot\mathrm{tg}255°$; ვ) $\sin80°\cdot\mathrm{tg}290°\cdot\cos170°$.

8 რომელია მეტი:
ა) $\sin20°$ თუ $\sin40°$? ბ) $\cos20°$ თუ $\cos40°$? გ) $\mathrm{tg}20°$ თუ $\mathrm{tg}40°$?

9 განსაზღვრე სხვაობის ნიშანი:
ა) $\sin25°-\sin26°$; ბ) $\sin130°-\sin240°$; გ) $\cos25°-\cos26°$;

დ) $\sin45°-\sin40°$; ე) $\sin62°-\sin70°$; ვ) $\cos40°-\cos42°$.

10 ჩაწერე ზრდის მიხედვით:

ა) sin 60°, sin 20°, sin 70°, sin 30°, sin 45°, sin 80°;

ბ) cos50°, cos60°, cos40°, cos30°, cos90°, cos45°.

11 იპოვე:

ა) sin180°, cos180°, tg180°; ბ) sin270°, cos270°, tg270°;

გ) sin360°, cos360°, tg360°.

12 გამოთვალე:

ა) sin 405°, cos405°, tg405°; ბ) sin (–405°), cos(–405°), tg(–405°);

გ) sin 420°, cos420°, tg420°; დ) sin (–420°), cos(–420°), tg(–420°);

ე) sin 720°, cos720°, tg720°; ვ) sin (–720°), cos(–720°), tg(–720°).

13 წარმოადგინე ტრიგონომეტრიული ფუნქცია 0°-სა და 360°-ს შორის მოთავსებული არგუმენტით:

ა) $\sin 585°$; ბ) $\cos(-860°)$; გ) $\mathrm{tg}506°$; დ) $\sin(-576°)$; ე) $\cos 770°$; ვ) $\mathrm{tg}(1810°)$.

14 იპოვე:

ა) sin13°, თუ sin 733°=a; ბ) cos55°, თუ cos 415°=b; გ) tg380°, თუ tg20°=c.

15 იპოვე:

ა) $\sin\alpha$, თუ $\sin(720°-\alpha)=a$; ბ) $\cos\alpha$, თუ $\cos(720°-\alpha)=b$;

გ) $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\mathrm{tg}(720°-\alpha)=c$.

16 დაასახელე ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე სინუსი $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ის ტოლია.

17 დაასახელე ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე ტანგენსი 1-ის ტოლია.

18 დაასახელე 0°-სა და 360°-ს შორის მოთავსებული ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე კოსინუსი 0-ის ტოლია.

19 გამოთვალე $\sin\alpha+\cos\alpha$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა:

ა) $\alpha=0°$; ბ) $\alpha=45°$; გ) $\alpha=60°$; ბ) $\alpha=90°$; გ) $\alpha=180°$; დ) $\alpha=270°$.

20 გამოთვალე:

ა) $5\sin 90°+2\cos 0°-2\sin 270°+10\cos 180°$; ბ) $13\sin 0°+12\cos 90°-3\mathrm{tg}30°$;

გ) $3\mathrm{tg}0°+2\cos 90°+3\sin 270°-3\cos 180°$; დ) $\sqrt{2}\cos 45°-\sqrt{3}\mathrm{tg}60°+2\,\mathrm{tg}45°$.

21 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4a\sin^2 45°-3(a\mathrm{tg}45°)^2-(2a\cos 45°)^2$;

ბ) $\dfrac{(a\sin 90°)^2-(b\mathrm{tg}45°)^2}{2a^2\sin 30°-2ab\cos 0°+(b\mathrm{tg}45°)^2}$;

გ) $\dfrac{(2a\cos60^\circ)^2-\left(\dfrac{b}{\operatorname{tg}45^\circ}\right)^2+(3ab\sin0^\circ)^2}{2a\sin30^\circ-2b\cos^2 45^\circ+(5a\cos0^\circ\cdot\operatorname{tg}0^\circ)^3}$; დ) $\dfrac{4-2\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}^2 60^\circ}{3\sin90^\circ-4\cos^2 30^\circ+\operatorname{tg}^2 30^\circ}$.

22 რა სიგრძის რკალს შემოწერს ერთეულოვან წრეწირზე P_α წერტილი:

ა) P_0 წერტილიდან P_{90° წერტილამდე მოძრაობისას?
ბ) P_0 წერტილიდან P_{180° წერტილამდე მოძრაობისას?
გ) P_{45° წერტილიდან P_{60° წერტილამდე მოძრაობისას?

23 გამოთვალე:
ა) sin 120°, cos120°, tg120°; ბ) sin 150°, cos150°, tg150°;
გ) sin 300°, cos300°, tg300°.

24 ვთქვათ, sin 20° =a. იპოვე α, რომლისთვისაც:
ა) sinα=a და 90°<α<180°; ბ) sinα=–a და 180°<α<270°.

25 ვთქვათ, cos 20° =a. იპოვე α, რომლისთვისაც:
ა) cosα=–a და 90°<α<180°; ბ) cosα=a და 0°<α<360°.

26 იპოვე ყველა α, რომლისთვისაც: ა) sinα=0; ბ) cosα=0.

27 რამდენჯერ აღემატება წრეწირის სიგრძე მის დიამეტრს? რადიუსს?

28 რა სიგრძისაა 1 სმ რადიუსის მქონე წრეწირის რკალი, თუ მისი გრადუსული ზომაა:
ა) 180°; ბ) 90°; გ) 60°; დ) 45°; ე) 30°; ვ) 15°.

29 გამოთვალე მანძილი საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე P(x;y) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, თუ:
ა) x=3, y=4;
ბ) $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$;
გ) $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

30 საკოორდინატო სიბრტყის მეორე მეოთხედში მდებარე A წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი 1-ის ტოლია. A წერტილის აბსცისა – 0,3-ის ტოლია. იპოვე A წერტილის ორდინატა.

აბა, სცადე!

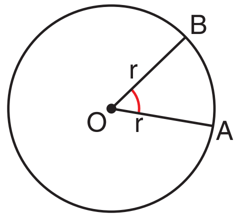
მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:
1. sinα+cosα>1;
2. P_α წერტილი ეკუთვნის I მეოთხედს.
დაამტკიცე ამ ორი გამონათქვამის ტოლფასობა და ჩამოაყალიბე თეორემის სახით.

3.3 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მიზანი

კუთხის რადიანული ზომის შემოღება და რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება.

წინა პარაგრაფში ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განვმარტეთ, როგორც გრადუსებში მოცემული არგუმენტის ფუნქციები. ჩვენი მიზანია იგივე ფუნქციები **რიცხვითი არგუმენტის ფუნქციებად**, ანუ ისეთ ფუნქციებად ვაქციოთ, რომელთა განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იქნება.



ნახ. 1

როგორც ვიცით, ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა განისაზღვრება მისი შესაბამისი რკალის გრადუსული ზომით: წრეწირი იყოფა 360 ტოლ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს 1-გრადუსიანი რკალი ეწოდება. ყოველი რკალი იმდენ გრადუსიანად ითვლება, რამდენ 1-გრადუსიან რკალსაც შეიცავს.

გავეცნოთ კუთხის ახალ საზომ ერთეულს – რადიანს.

კუთხის რადიანული ზომაც წრეწირთან არის დაკავშირებული:

განმარტება. 1 რადიანის ტოლი კუთხე ეწოდება ცენტრალურ კუთხეს, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია.

1-ელ ნახაზზე $\angle AOB=1$რად, რადგან $\overset{\smile}{AB}=AO=OB=r$.

დავადგინოთ კავშირი კუთხის რადიანულ და გრადუსულ ზომებს შორის. ვიცით, რომ r-რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე $2\pi r$-ის ტოლია, ანუ წრეწირის სიგრძე რადიუსს 2π-ჯერ აღემატება. ეს ნიშნავს, რომ სრული კუთხის გრადუსული ზომა, ანუ 360 გრადუსი, 2π რადიანის ტოლია. აქედან ვასკვნით, რომ π რადიანი 180 გრადუსის ტოლია, ე.ი.

$$1\text{რად}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ. \qquad (1)$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისთვის

$$\alpha\ \text{რად}=\alpha\cdot\frac{180^\circ}{\pi}. \qquad (2)$$

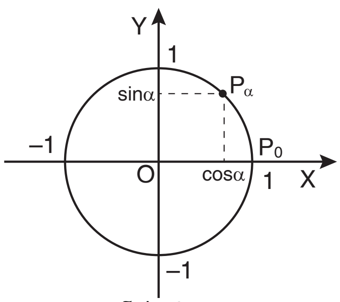
მაგალითად,

$$\frac{\pi}{2}\text{რად}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=90^\circ, \qquad \frac{\pi}{6}\text{რად}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=30^\circ,$$

ხოლო

$$5\ \text{რად}=5\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\approx 5\cdot 57^\circ=285^\circ.$$

ისევე, როგორც გრადუსული ზომის არგუმენტისთვის, რიცხვითი არგუმენტისთვისაც ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით განიმარტება. კერძოდ, ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისთვის P_α წერტილი მიიღება P_0 წერტილისგან კოორდინატთა სათავის მიმართ α რადიანით მობრუნებით, ხოლო $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ შესაბამისად, P_α წერტილის ორდინატას და აბსცისას წარმოადგენენ (ნახ. 2).



ნახ. 2

მაგალითი. გამოვთვალოთ: ა) $\sin\frac{\pi}{6}$; ბ) $\cos\frac{3\pi}{2}$; გ) $\mathrm{tg}\pi$.

ამოხსნა: ა) $\frac{\pi}{6}$ რად=30°, ამიტომ $\sin\frac{\pi}{6}=\sin30°=\frac{1}{2}$;

ბ) $\frac{3\pi}{2}$ რად=270°, ამიტომ $\cos\frac{3\pi}{2}=\cos270°=0$;

გ) $\mathrm{tg}\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{\sin180°}{\cos180°}=\frac{0}{1}=0.$

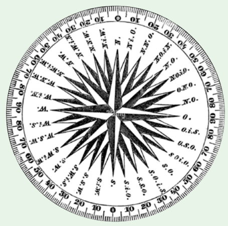
უპასუხე კითხვებს:

1. რა სიდიდის ცენტრალურ კუთხეს ეწოდება 1 რადიანის ტოლი?
2. წრეწირის რა ნაწილია 1 რადიანის ტოლი რკალი?
3. რამდენი გრადუსს უდრის ერთი რადიანი?
4. რას ეწოდება რიცხვითი არგუმენტის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?
5. დაახლოებით, რამდენ გრადუსს უდრის 2 რადიანი? 0,5 რადიანი?
6. რომელ მეოთხედშია P_3 წერტილი? P_5 წერტილი?

სავარჯიშოები

1 წრეწირი 15 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. იპოვე თითოეული რკალის რადიანული ზომა.

2 ზღვის კომპასის წრეწირი 32 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი, თითოეულს რუმბი ეწოდება. გამოთვალე რუმბის რადიანული ზომა.



3 რამდენი რადიანით შემობრუნდება საათის წუთების მაჩვენებელი ისარი:

ა) ნახევარ საათში? ბ) 2 სთ-ში?

4 რომელ მეოთხედშია P_α, თუ ა) $\alpha=1$; ბ) $\alpha=2$; გ) $\alpha=3$; დ) $\alpha=4$; ე) $\alpha=1{,}8\pi$.

5 დაადგინე მოცემული რიცხვის ნიშანი:

ა) $\sin\frac{4}{5}\pi$; $\sin\frac{3}{4}\pi$; $\sin\frac{2}{3}\pi$; $\sin\frac{2}{5}\pi$; $\sin\frac{2}{45}\pi$; $\sin\frac{5}{36}\pi$; $\sin\frac{14}{45}\pi$.

ბ) $\cos\frac{4}{5}\pi$; $\cos\frac{3}{4}\pi$; $\cos\frac{2}{3}\pi$; $\cos\frac{2}{5}\pi$; $\cos\frac{2}{45}\pi$; $\cos\frac{5}{36}\pi$; $\cos\frac{14}{45}\pi$.

გ) $\mathrm{tg}\frac{4}{5}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{3}{4}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{2}{3}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{2}{5}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{2}{45}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{5}{36}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{14}{45}\pi$.

6 დადებითია თუ უარყოფითი: sin4? cos1,5? tg0,3?

7 განსაზღვრე მოცემული რიცხვის ნიშანი, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right);\ \cos(\pi-\alpha);\ \mathrm{tg}(\pi+\alpha);\ \mathrm{tg}(2\pi-\alpha).$$

8 სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:4. სამკუთხედის კუთხეები გამოსახე რადიანებში.

9 სამკუთხედის ორი კუთხის ზომებია $\frac{\pi}{15}$ და $\frac{\pi}{5}$. გამოთვალე სამკუთხედის სამივე კუთხის გრადუსული ზომები.

10 ოთხკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:3:5:6. ოთხკუთხედის თითოეული კუთხე გამოსახე რადიანებში.

11 გამოსახე რადიანებში წესიერი: ა) სამკუთხედის; ბ) ოთხკუთხედის; გ) ექვსკუთხედის კუთხეები.

12 გამოთვალე:

ა) $3\sin 2\pi - 2\cos 1,5\pi + 4\sin\pi - \mathrm{tg}\pi$; ბ) $8 - 2\sin 2\pi - 3\cos\pi + 2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi$;

გ) $2\sin\frac{\pi}{4} + 3\cos 2\pi + 5\mathrm{tg}2\pi$; დ) $4\mathrm{tg}2\pi - 2\sin\frac{1}{2}\pi + 3\cos\frac{3\pi}{2} - 4\mathrm{tg}\pi$.

13 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4a\sin^2\frac{\pi}{4} + \left(2a\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 - 3\left(a\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2$; ბ) $2b\sin\frac{\pi}{4} - 3a\mathrm{tg}0 + a\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

გ) $2b\cos\frac{\pi}{4} - 3a\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + a\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; დ) $\dfrac{\left(a\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(b\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2}{2a^2\sin\frac{\pi}{6} - 2ab\cos 0 + \left(b\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2}$.

14 რომელია მეტი:

ა) $\sin 1^\circ$ თუ $\sin 1$? ბ) $\sin 0,5$ თუ $\sin 0,6$? გ) $\sin 6^\circ$ თუ $\sin 6$?

დ) $\cos 0,8$ თუ $\cos 0,9$? ე) $\cos 60^\circ$ თუ $\cos\frac{\pi}{6}$? ვ) $\cos 30^\circ$ თუ $\cos 3$?

15 იპოვე ყველა α, რომლისთვისაც: ა) $\sin\alpha = 1$; ბ) $\cos\alpha = 1$; გ) $\mathrm{tg}\alpha = 0$.

16 მარიამმა და ანიმ მოცემული α არგუმენტისათვის გამოთვალეს სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობები. მათგან ერთ-ერთმა დაუშვა შეცდომა. რომელმა დაუშვა შეცდომა, თუ მარიამმა მიიღო:

$\cos\alpha = 0,8$, $\sin\alpha = -0,6$ და

ანიმ მიიღო: $\cos\alpha = 0,7$, $\sin\alpha = 0,2$?

17 რომელია მეტი: ა) $\sin 0,5$ თუ 0,5?
ბ) $\cos 0,5$ თუ 0,5? გ) $\mathrm{tg}1$ თუ 1?

18 წრიული სექტორის ფართობი 36 კვ.სმ-ია, ხოლო ამ სექტორის რკალის შესაბამისი კუთხე – 0,5 რად. იპოვე წრის რადიუსი.

19 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისათვის $P_{-\alpha}$ წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ.

20 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის $P_{\pi-\alpha}$ წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

21 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის $P_{\pi+\alpha}$ წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

22 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის მართებულია ტოლობები:

ა) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; ბ) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

გ) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; დ) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$;

ე) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$; ვ) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$.

23 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის სრულდება ტოლობა:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

24 ქვემოთ მოცემული ფუნქციებიდან რომელი ფუნქციებია ლუწი? კენტი?

ა) $y=x^3+4x$; ბ) $y=3x^2+5$; გ) $y=\frac{7}{|x|}$;

დ) $y=x^2+5x$; ე) $y=\sqrt{x}$; ვ) $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

25 იპოვე ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\sqrt{x-20}$; ბ) $y=\frac{x-5}{x+4}$; გ) $y=\frac{1}{x}$; დ) $y=\sqrt{x^2+4}$.

26 ვთქვათ, $\sin 27° = a$. იპოვე:

ა) $\sin 387°$; ბ) $\sin(-27°)$; გ) $\sin 207°$; დ) $\sin(-207°)$.

3.4 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები

მიზანი

რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ჩამოყალიბება და გამოყენება.

წინა პარაგრაფში სინუსი და კოსინუსი განვმარტეთ ნებისმიერი რიცხვითი არგუმენტისათვის. ეს ნიშნავს, რომ სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე: $R=(-\infty;\ +\infty)$. ამ ფუნქციების განმარტებიდანვე გამომდინარეობს, რომ თითოეული მათგანის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-1;\ 1]$ ჩაკეტილი შუალედი (ახსენი, რატომ). ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin : R \to [-1;1],\ \ \cos : R \to [-1;1].$$

იმის გამო, რომ ნებისმიერი ნამდვილი α რიცხვისთვის P_α და $P_{-\alpha}$ წერტილები აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია (იხ. 1.1 პარაგრაფის ნახ.5), შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha. \qquad (1)$$

ეს ტოლობები ნიშნავს, რომ სინუსი კენტი, ხოლო კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა.

თუ 1.1 პარაგრაფში მოცემულ მე-3 ტოლობას ჩავწერთ რიცხვითი არგუმენტის შემთხვევაში და გავითვალისწინებთ, რომ $360°=2\pi$ რად, მივიღებთ:

$$\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha,\ k\in Z. \quad (2)$$

ეს ტოლობები ნიშნავს, რომ სინუსი და კოსინუსი **პერიოდული ფუნქციებია** და მათი პერიოდი 2π-ს ჯერადი რიცხვებია.

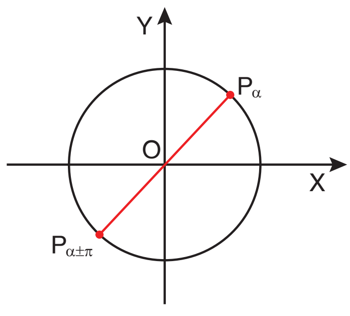
დავამტკიცოთ, რომ 2π სინუსისა და კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდია.

ის რომ, 2π ამ ფუნქციების პერიოდია, უკვე ვიცით. ვაჩვენოთ, რომ 2π-ზე მცირე დადებითი რიცხვი არ შეიძლება იყოს სინუსის პერიოდი. მართლაც, დავუშვათ, არსებობს ისეთი $0<T<2\pi$ რიცხვი, რომ ყოველი α არგუმენტისთვის $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$. თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ $\sin(\frac{\pi}{2}+T)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. მაგრამ სინუსი 1-ის ტოლი მხოლოდ $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ სახის არგუმენტისათვის ხდება (ახსენი, რატომ), რაც გამორიცხავს $0<T<2\pi$ პირობას.

ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება, რომ 2π-ზე მცირე დადებითი რიცხვი არ შეიძლება იყოს კოსინუსის პერიოდი. ამ შემთხვევაში $\cos(\alpha+T)=\cos\alpha$ ტოლობაში უნდა ჩავსვათ $\alpha=0$. მივიღებთ $\cos T=\cos 0=1$, ეს ტოლობა კი მხოლოდ მაშინ შესრულდება, როცა $T=2\pi k,\ k\in Z$.

განმარტების თანახმად $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. ამასთან, იმისათვის, რომ წილადს აზრი ჰქონდეს, უნდა მოვითხოვოთ $\cos\alpha\neq 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, სახის რიცხვები არ ეკუთვნის ტანგენსის განსაზღვრის არეს.

ცხადია, 2π და მისი ჯერადები ტანგენსისთვისაც იქნება პერიოდი. მაგრამ ტანგენსს აქვს უფრო მცირე პერიოდიც. კერძოდ, ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია π.



მართლაც, იმის გამო, რომ $P_{\alpha+\pi}=P_{\alpha-\pi}$ და ეს წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(\alpha\pm\pi)=-\sin\alpha, \qquad \cos(\alpha\pm\pi)=-\cos\alpha.$$

ე.ი. $$\mathrm{tg}(\alpha\pm\pi)=\frac{\sin(\alpha\pm\pi)}{\cos(\alpha\pm\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha.$$

ტანგენსი 0-ის ტოლი მხოლოდ π-ის ჯერად რიცხვებზე ხდება. ამიტომ, π ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია.

შევნიშნოთ, რომ ტანგენსი ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობას ღებულობს.

P_α წერტილი კოორდინატთა სათავიდან 1-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. ეს კი ნიშნავს, რომ ყოველი α არგუმენტისათვის პითაგორას თეორემიდან გამომდინარე, სრულდება ტოლობა:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (3)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\cos\alpha \neq 0$ და მე-3 ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $\cos^2\alpha$-ზე, მივიღებთ:

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z. \qquad (4)$$

მე-3 და მე-4 ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ერთ-ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მოცემული მნიშვნელობით გამოვთვალოთ დანარჩენი ორი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა.

მაგალითი1. ა) ვიპოვოთ $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$; ბ) ვიპოვოთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=2\sqrt{2}$.

ამოხსნა. ა) მე-3 ფორმულით $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=0{,}64$, აქედან $\cos\alpha=\pm0{,}8$; $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\pm0{,}75$;

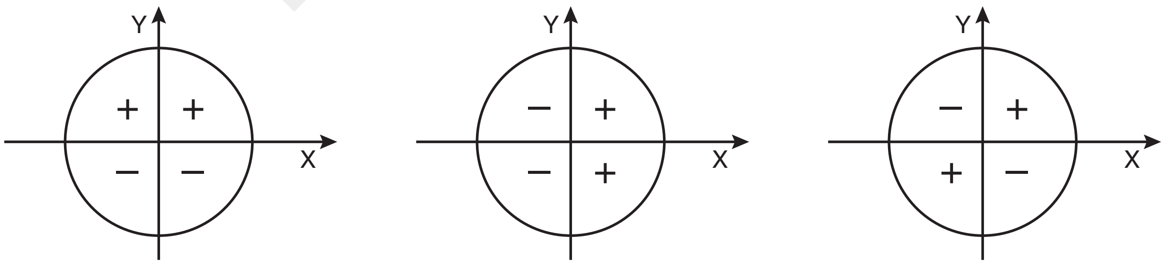
ბ) მე-4 ფორმულით $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\dfrac{1}{9}$, აქედან $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{3}$; $\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

პასუხი. ა) $\cos\alpha=\pm0{,}8$, $\mathrm{tg}\alpha=\pm0{,}75$; ბ) $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{3}$, $\sin\alpha=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

ამ მაგალითით დავრწმუნდით, რომ როგორც ა), ისე ბ) შემთხვევაში ნიშნით განსხვავებული ორ-ორი პასუხი მიიღება. იმისათვის, რომ ასეთ მაგალითებში ცალსახა პასუხები მივიღოთ, უნდა გვქონდეს დამატებითი ინფორმაცია, რომლის საშუალებითაც დავასკვნით ფუნქციის საძიებელი მნიშვნელობის ნიშანს.

მაგალითად, თუ ა) შემთხვევაში მოცემულ პირობასთან ერთად გვეცოდინება, რომ P_α წერტილი ეკუთვნის მე-2 მეოთხედს, იმის გამო, რომ მეორე მეოთხედში $\cos\alpha$ უარყოფითია, $\pm0{,}8$ ნაცვლად პასუხი იქნებოდა $-0{,}8$.

მსგავსი მაგალითების ამოსახსნელად სასარგებლოა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნების ცოდნა. ეს ნიშნები მოცემულია სქემებზე.



სინუსი კოსინუსი ტანგენსი

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y= f(x)$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, თუ:

ა) $f(x)=\sin2x$; ბ) $f(x)=\sin2x+\cos3x$.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ თუ $y= f(x)$ ფუნქციის პერიოდია T, მაშინ $y= f(ax+b)$ ფუნქციის პერიოდი, სადაც a და b მოცემული რიცხვებია, ამასთან $a\neq0$, იქნება $\dfrac{T}{a}$.

მართლაც,

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+b+T)=f(ax+b).$$

ა) როგორც ვიცით, y=sinx ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ამიტომ y=sin2x ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი იქნება 2π:2=π.

ბ) y=sin2x ფუნქციის პერიოდია π და მისი ჯერადი რიცხვები, ხოლო y=cos3x ფუნქციის – $\frac{2\pi}{3}$ და მისი ჯერადი რიცხვები. sin2x-ისა და cos3x-ის პერიოდის უმცირესი საერთო ჯერადი, ანუ უმცირესი დადებითი რიცხვი იქნება 2π. ე.ი. 2π არის, როგორც y=sin2x ფუნქციის, ისე y=cos3x ფუნქციის პერიოდი, ამიტომ 2π იქნება მათი ჯამის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ ფუნქციას ეწოდება ლუწი ფუნქცია? კენტი ფუნქცია?
2. რა სიმრავლეა სინუსის განსაზღვრის არე? ტანგენსის განსაზღვრის არე?
3. რა სიმრავლეა სინუსის მნიშვნელობათა სიმრავლე? ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლე?
4. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია კენტი? ლუწი?
5. რა არის კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდი? ტანგენსის?
6. რომელ მეოთხედებშია ტანგენსი დადებითი? კოსინუსი?

სავარჯიშოები

1 იპოვე:

ა) $\sin 2{,}5\pi$; ბ) $\sin 5\pi$; გ) $\sin(-2{,}5\pi)$; დ) $\sin 20\pi$;

ე) $\sin\frac{7\pi}{3}$; ვ) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; ზ) $\cos 4{,}5\pi$; თ) $\cos(-4{,}5\pi)$;

ი) $\cos\frac{13\pi}{6}$; კ) $\cos\frac{11\pi}{6}$; ლ) $\cos\frac{5\pi}{3}$; მ) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

ნ) $\mathrm{tg}3\pi$; ო) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$; პ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; ჟ) $\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}$;

რ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; ს) $\mathrm{tg}\frac{19\pi}{6}$.

2 მოცემული ფუნქციებიდან რომელია კენტი? ლუწი? არც კენტი და არც ლუწი?

ა) $y=x^3+\sin x$; ბ) $y=2\cos x+\sin^2 x$;

გ) $y=\frac{\cos x}{\sin^3 x}$; დ) $y=\frac{1+2\sin x}{1-2\cos x}$.

3 პერიოდულია თუ არა ფუნქცია:

ა) $y=x-\sin x$? ბ) $y=2\cos x+\sin x$?

გ) $y=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$? დ) $y=\frac{2-\sin x}{1+2\cos x}$?

4 იპოვე მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\sin 5x$; ბ) $y=\cos 4x$; გ) $y=\operatorname{tg} 3x$;
დ) $y=\sin 0{,}5x$; ე) $y=\operatorname{tg}(2x+3)$; ვ) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$.

5 იპოვე მოცემული ფუნქციის პერიოდი:

ა) $f(x)=\sin(5-7x)$; ბ) $f(x)=5\sin\frac{1-4x}{3}$; გ) $f(x)=\cos\left(5-\frac{x}{3}\right)$.

6 იპოვე $\cos\alpha$ და $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ და $\pi<\alpha<1{,}5\pi$.

7 იპოვე $\sin\alpha$ და $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ და $1{,}5\pi<\alpha<2\pi$.

8 იპოვე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\operatorname{tg}\alpha=-1$ და $0{,}5\pi<\alpha<\pi$.

9 იპოვე $\cos\alpha$, თუ $\sin\alpha=-0{,}4$ და $\operatorname{tg}\alpha>0$.

10 იპოვე $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, თუ $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{15}$.

11 დაადგინე $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, თუ:

ა) $f(x)=2\sin x-1$; ბ) $f(x)=\sin^2 x-1$; გ) $f(x)=2\sin^2 x-\cos^2 x$; დ) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$.

12 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; ბ) $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; გ) $(1-\sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$; დ) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;

ე) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; ვ) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$; ზ) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; თ) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

13 იპოვე ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\sin 5x+\cos 4x$; ბ) $y=\cos^2 x$; გ) $y=|\sin x|$; დ) $y=\sin 2x+\operatorname{tg} 4x$;

ე) $y=\sin^3 x$; ვ) $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; ზ) $f(x)=\frac{2}{\operatorname{tg} 3x}+4\operatorname{tg} 2x$; თ) $f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$.

14 დაადგინე $y=\sin^2 x-\sin x+1$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

15 მოცემულია $y=f(x)$ კენტი პერიოდული ფუნქცია 2-ის ტოლი პერიოდით, როცა $x\in[0;1]$, $f(x)=x^2-x$.

ა) გამოთვალე $f(-0{,}5)+f(1{,}5)$;
ბ) ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი $[-3;3]$ შუალედში.

შესაძლებელია თუ არა?

რაიმე α არგუმენტისათვის შესრულდეს უტოლობა $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha>1$?

აბა, სცადე!

დაადგინე $y=\sin x+\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №3

1 გამოთვალე: $\sin(-240°)$.

ა) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; დ) $-\sqrt{3}$.

2 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა: $(\mathrm{tg}30° + \mathrm{tg}60°)^2$.

ა) $6\frac{3}{4}$; ბ) $5\frac{1}{3}$; გ) $-6\frac{3}{4}$; დ) $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

3 ქვემოთ მოცემულთაგან რომელ გამოსახულებას აქვს აზრი?

ა) $\frac{12}{\sin 2\pi}$; ბ) $\sqrt{\mathrm{tg}145°}$; გ) $\sqrt{\cos 340°}$; დ) $4\mathrm{tg}\frac{3\pi}{2}$.

4 იპოვე $\sin\alpha$, თუ $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ და $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; დ) -1.

5 იპოვე გამოსახულების მნიშვნელობა: $\sin(-30°) + \cos(-60°) + \mathrm{tg}(-45°)$.

ა) -1; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $-\sqrt{3}$; დ) 1.

6 გაამარტივე გამოსახულება: $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

ა) $\sin\alpha$; ბ) $\cos\alpha$; გ) -1; დ) 0.

7 განსაზღვრე ნამრავლის ნიშანი.

$\sin 67° \cdot \cos 261° \cdot \cos 372° \cdot \sin(-75°) \cdot \cos(-72°)$

8 იპოვე ერთეულოვანი წრეწირის $P_{\frac{5\pi}{4}}$ წერტილის კოორდინატები.

9 იპოვე $y = 7 - 4\sin\alpha$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა.

10 შესაძლებელია თუ არა, რომ რაიმე α არგუმენტისთვის შესრულდეს ორივე ტოლობა:

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ და $\cos\alpha = \frac{2}{3}$? (პასუხი დაასაბუთე.)

3.5 დაყვანის ფორმულები

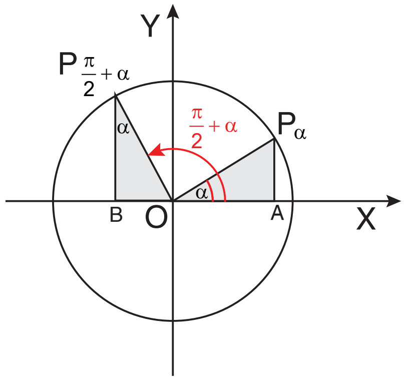
მიზანი

დაყვანის ფორმულების გაცნობა და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოსათვლელად გამოყენება.

შევისწავლოთ ფორმულები, რომელთა გამოყენებით ნებისმიერი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა შეიძლება $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოთავსებული არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლაზე დავიყვანოთ. ამ ფორმულებს **დაყვანის ფორმულები** ეწოდება. მოვიყვანოთ ეს ფორმულები:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha};$
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha};$
3. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\quad \mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha;$
4. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha;$
5. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha};$
6. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$

დავამტკიცოთ, მაგალითად 1-ელი ფორმულები იმ შემთხვევში, როცა α არგუმენტი აკმაყოფილებს $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ პირობას.



განმარტების თანახმად, ნახაზზე მოცემული P_α წერტილის კოორდინატებია cosα და sinα, ხოლო $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ წერტილის კოორდინატები – $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ და $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. $P_\alpha AO$ და $OBP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ სამკუთხედების ტოლობიდან მივიღებთ:

$OB=AP_\alpha$, ანუ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ და $BP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}=AO$, ანუ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

დაყვანის ფორმულაში ტოლობის მარცხენა ნაწილს დასაყვანი ფუნქცია ვუწოდოთ, ხოლო მარჯვენას – დაყვანილი. 1-6 ტოლობებზე დაკვირვების შედეგად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დასკვნა:

- თუ დასაყვანი ფუნქციის არგუმენტი $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ -ს ან $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ -ს შეიცავს (ანუ $\frac{\pi}{2}$ კენტჯერაა აღებული), მაშინ დასაყვანი ფუნქცია იცვლება: კოსინუსი იცვლება სინუსით, სინუსი – კოსინუსით;
- თუ დასაყვანი ფუნქციის არგუმენტია $\pi\pm\alpha$, მაშინ დასაყვანი ფუნქცია არ იცვლის სახელწოდებას;
- დაყვანილი ფუნქციის ნიშნის დასადგენად უნდა ჩავთვალოთ, რომ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ და დაყვანილ ფუნქციას დავუწეროთ დასაყვანი ფუნქციის ის ნიშანი, რომელიც მას აქვს მოცემული არგუმენტისთვის.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ: ა) $\cos\frac{7\pi}{6}$; ბ) $\sin 10{,}75\pi$; გ) $\operatorname{tg}23\frac{2}{3}\pi$.

ამოხსნა.

ა) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ბ) $\sin 10{,}75\pi=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

გ) $\operatorname{tg}23\frac{2}{3}\pi=\operatorname{tg}\left(23\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$.

დაყვანის ფორმულებით გრადუსებში მოცემული არგუმენტის შემთხვევაშიც შეგვიძლია ვისარგებლოთ. ამ დროს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ π რადიანი =180°.

მაგალითი 2. დავიყვანოთ მახვილი კუთხის ფუნქციაზე:

ა) $\cos1640°$; ბ) $\sin140°$; გ) $\operatorname{tg}280°$.

ამოხსნა.

ა) კოსინუსის პერიოდულობის თვისების თანახმად:

$\cos1640°=\cos(360°\cdot4+200°)=\cos200°$.

დაყვანის ფორმულის გამოყენებით ვწერთ: $\cos200°=\cos(180°+20°)=-\cos20°$.

ბ) $\sin140°=\sin(180°-40°)=\sin40°$.

გ) $\operatorname{tg}500°=\operatorname{tg}(2\cdot180°+140°)=\operatorname{tg}140°=\operatorname{tg}(180°-40°)=-\operatorname{tg}40°$.

როცა დასაყვანი ფუნქცია ლუწ ხარისხშია, მის ნიშანზე ზრუნვა აღარ გვიწევს.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ: ა) $\sin^2 240°$; ბ) $\sin^4(-1320°)$.

ამოხსნა. ა) $\sin^2 240°=\sin^2(180°+60°)=\sin^2 60°=\frac{3}{4}$

ბ) $\sin^4(-1320°)=\sin^4 1320°=\sin^4(360°\cdot3+240°)=\sin^4 240°=\sin^4(180°+60°)=\sin^4 60°=\frac{9}{16}$;

მაგალითი 4. გავამარტივოთ გამოსახულება: $\frac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)}$.

ამოხსნა. $\frac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)}=\frac{-\operatorname{tg}\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\cos\alpha}=1$.

პასუხი: 1.

უპასუხე კითხვებს:

1) რაში ვიყენებთ დაყვანის ფორმულებს?
2) რა შემთხვევაში არ შეიცვლება დასაყვანი ფუნქცია დაყვანის შემდეგ?
3) როგორ უნდა დავადგინოთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებისას ფუნქციის ნიშანი?

სავარჯიშოები

1 დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; ბ) $\sin(\pi-\alpha)$; გ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

დ) $\cos(3\pi+\alpha)$; ე) $\mathrm{tg}(3{,}5\pi+\alpha)$; ვ) $\mathrm{tg}(3\pi-\alpha)$.

2 დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin(360°-\alpha)$; ბ) $\sin(270°-\alpha)$; გ) $\cos(180°-\alpha)$;

დ) $\cos(90°+\alpha)$; ე) $\mathrm{tg}(360°-\alpha)$.

3 დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin(\alpha+90°)$; ბ) $\cos(\alpha-\pi)$; გ) $\mathrm{tg}(\alpha-360°)$;

დ) $\sin^2(\alpha-\pi)$; ე) $\mathrm{tg}^2(\alpha-270°)$.

4 გაამარტივე გამოსახულება: $\sin(\alpha-90°)-\cos(180°-\alpha)+\mathrm{tg}(180°-\alpha)$.

5 მოცემული ფუნქცია დაიყვანე $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში მოთავსებული არგუმენტის ფუნქციაზე:

ა) $\sin 0{,}8\pi$; ბ) $\cos 3{,}1\pi$; გ) $\mathrm{tg} 4{,}7\pi$; დ) $\mathrm{tg} 2{,}8\pi$.

6 დაიყვანე ფუნქცია 45°-ზე ნაკლები დადებითი კუთხის ფუნქციაზე:

ა) $\sin 485°$; $\sin 875°$; $\sin(-5108°)$;

ბ) $\cos 1025°$; $\cos(-1694°)$; $\cos(-815°)$;

გ) $\mathrm{tg} 869°$; $\mathrm{tg}(-1759)°$; $\mathrm{tg}(-917°)$.

7 იპოვე $[0;360°)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა სინუსია:

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) -1.

8 იპოვე $[0;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა კოსინუსია:

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) -1.

9 იპოვე $[0;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა ტანგენსია:

ა) $\sqrt{3}$; ბ) 0; გ) -1.

10 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)$; ბ) $\dfrac{\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)}$; გ) $\dfrac{\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ+\alpha)}$;

დ) $\sin(90^\circ-\alpha)+\sin(90^\circ+\alpha)+2\cos(180^\circ-\alpha)$; ე) $\dfrac{\cos^2(90^\circ-\alpha)-1}{\cos(180^\circ-\alpha)}$;

ვ) $\cos(90^\circ-\alpha)+\cos(90^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)$;

ზ) $\sin(180^\circ-\alpha)+\sin(270^\circ+\alpha)+2\cos(360^\circ-\alpha)$;

თ) $\cos(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)}$.

11 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha-3\pi)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$; ბ) $\sin(\alpha-15\pi)\cos(\alpha+\pi)\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

გ) $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}{\dfrac{1}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\sin(\pi-\alpha)}$; დ) $\dfrac{2\sin(-3825^\circ)-\sin1215^\circ}{\cos(-1260^\circ)}$.

12 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4\sin120^\circ\cdot\mathrm{tg}300^\circ$; ბ) $8\sin510^\circ\cdot\cos(-300^\circ)\cdot\mathrm{tg}240^\circ$;

გ) $2\sin^2 225^\circ-\dfrac{\mathrm{tg}405^\circ}{\mathrm{tg}330^\circ}$; დ) $\dfrac{10}{\mathrm{tg}315^\circ}\cdot\sin(-150^\circ)\cdot\cos225^\circ$;

ე) $\dfrac{\cos(-120^\circ)}{\cos300^\circ}-\dfrac{\mathrm{tg}210^\circ\sin315^\circ}{\cos180^\circ}$.

13 გამოთვალე გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{\mathrm{tg}(-150^\circ)\cdot\cos(-210^\circ)\cdot\cos(-60^\circ)}{\dfrac{1}{\mathrm{tg}(-240^\circ)}\cdot\sin(-330^\circ)}$; ბ) $\dfrac{2\sin660^\circ-\sin630^\circ}{\dfrac{3}{\mathrm{tg}1020^\circ}+2\cos(-660^\circ)}$;

გ) $\sin(450^\circ+\beta)-\sin(270^\circ-\beta)-\sin(450^\circ-\beta)+\sin(270^\circ+\beta)$.

14 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\dfrac{\cos(180^\circ-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)}$; ბ) $\dfrac{2\sin3290^\circ-\sin1490^\circ}{2\mathrm{tg}585^\circ}$.

15 დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(3\pi+\alpha)=0$;

ბ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\mathrm{tg}\alpha$;

გ) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\cos(360^\circ-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$;

დ) $\sin(\alpha-\pi)+\mathrm{tg}(\alpha-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha$; ე) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}}=-1$.

16 დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\sin(\beta-\pi)\mathrm{tg}(\beta+\pi)+\frac{1}{\cos(\beta-2\pi)}=\cos\beta$;

ბ) $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=1$;

გ) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(270^\circ-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}(270^\circ+\alpha)\cdot\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(360^\circ-\alpha)}=-\cos\alpha$;

დ) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}+\mathrm{tg}(\pi-\alpha)+\cos 0=0$;

17 გამოთვალე:

ა) $\cos^2\frac{77\pi}{4}$; ბ) $\sin^2\left(7\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; გ) $\mathrm{tg}^2\left(3{,}5\pi-\frac{\pi}{3}\right)$.

18 მოცემულია: $\sin(180^\circ+\alpha)=-\frac{1}{2}$, გამოთვალე:

ა) $\sin^2(270^\circ+\alpha)$; ბ) $\cos^2(90^\circ+\alpha)$.

19 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin^2(4\pi-\alpha)+\sin^2(4{,}5\pi+\alpha)$; ბ) $1+\cos(7\pi+\alpha)+\cos(\alpha-4\pi)$;

გ) $\sin^2(5\pi+\alpha)+2\sin(2{,}5\pi+\alpha)\cdot\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\cos^2(4\pi-\alpha)$;

დ) $\sin^2(\alpha-270^\circ)+\cos^2(270^\circ+\alpha)-2\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(90^\circ+\alpha)$.

20 იპოვე:

ა) $\sin 207^\circ$ თუ $\sin 27^\circ=a$; ბ) $\cos 304^\circ$ თუ $\sin 34^\circ=a$;

გ) $\mathrm{tg}106^\circ$ თუ $\sin 16^\circ=a$; დ) $\cos\alpha$ თუ $\cos(180^\circ-\alpha)=a$;

21 მოცემული ფუნქცია დაიყვანე შესაძლო უმცირესი დადებითი არგუმენტის ფუნქციაზე:

ა) $\sin\frac{10\pi}{9}$; ბ) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{10}$; გ) $\cos 10$; დ) $\sin 11$.

22 დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha)$; ბ) $\cos(45° + \alpha) = \sin(45° - \alpha)$;

გ) $\sin(60° + \alpha) = \cos(30° - \alpha)$.

23 დაამტკიცე უტოლობა: $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1$.

24 გამოთვალე:

ა) $\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}40° + ... + \operatorname{tg}160° + \operatorname{tg}180°$;

ბ) $\sin 395° \cdot \sin 505° - \cos 575° \cdot \cos 685° + \operatorname{tg}606° \cdot \operatorname{tg}1104°$;

გ) $\operatorname{tg}10° \cdot \operatorname{tg}20° \cdot \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}40° \cdot \operatorname{tg}50° \cdot \operatorname{tg}60° \cdot \operatorname{tg}70° \cdot \operatorname{tg}80°$.

25 რომელია მეტი:

ა) $\sin 25°$ თუ $\sin 27°$? ბ) $\sin 100°$ თუ $\sin 110°$?

გ) $\cos 15°$ თუ $\cos 25°$? დ) $\operatorname{tg}15°$ თუ $\operatorname{tg}55°$?

26 რომელ მეოთხედებში სრულდება უტოლობა:

ა) $\sin\alpha < 0$? ბ) $\operatorname{tg}\alpha > 0$? გ) $\cos\alpha > 0$? დ) $\cos\alpha < 0$?

3.6 y=sin x ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი

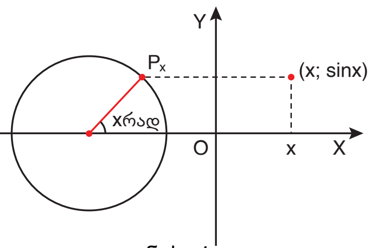
- **y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება;**
- **y=sinx ფუნქციის თვისებების შეჯამება**

როგორც ვიცით, y=sinx ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რაც ნიშნავს, რომ x არგუმენტს ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება შეუძლია.

y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება სხვადასხვა გზითაა შესაძლებელი.

როგორც აქამდე, სხვა ფუნქციების გრაფიკების აგებისას, ახლაც შესაძლებელია გრაფიკი ავაგოთ შემდეგი წესით: ვისარგებლებთ რა sinx-ის მნიშვნელობათა ცხრილით, საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგებთ (x; sinx) წერტილებს არგუმენტისა და ფუნქციის ჩვენთვის ცნობილი მნიშვნელობებისათვის და შემდეგ ამ წერტილებზე გავავლებთ გლუვ, უწყვეტ წირს.

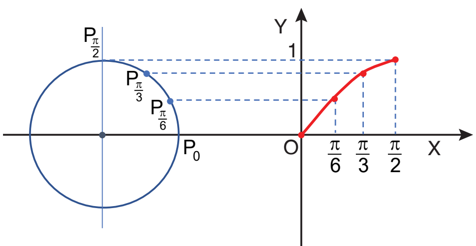
შედარებით მარტივია გრაფიკის აგების გეომეტრიული ხერხი. ეს ხერხი ემყარება სინუსის ჩვენ მიერ 1.2 პარაგრაფში ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით მოყვანილ განმარტებას. მის საილუსტრაციოდ ერთეულოვანი წრის ცენტრი მოვათავსოთ აბსცისათა ღერძის რაიმე წერტილში. ნებისმიერი x არგუმენტისათვის ერთეულოვან წრეწირზე მოვძებნოთ P_x წერტილი, რომელიც მიიღება P_0 წერტილის x რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით. ამ წერტილიდან გავატაროთ აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე x წერტილზე გამავალ ორდინატთა ღერძის პარალელურ წრფესთან გადაკვეთამდე (ნახ.1). მიღებული გადაკვეთის წერტილი, კოორდინატებით (x;sinx), იქნება y=sinx ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. როცა x წერტილს ვამოძრავებთ აბსცისათა ღერძზე, P_x იმოძრავებს ერთეულოვან წრეწირზე, ხოლო შესაბამისი (x;sinx) კოორდინატების მქონე წერტილი შემოწერს y=sinx ფუნქციის გრაფიკს.



ნახ. 1

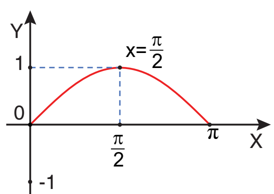
გრაფიკის პრაქტიკულად ასაგებად პირველ ეტაპზე ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით ავაგოთ იგი $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, ხოლო შემდეგ სინუსის თვისებების გამოყენებით განვავრცოთ მთელ რიცხვით ღერძზე.

ამისათვის $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში ავიღოთ რამდენიმე არგუმენტი, ზემოთ აღწერილი მეთოდით მოვნიშნოთ ამ არგუმენტების შესაბამისი გრაფიკის წერტილები და შევაერთოთ წირით. (გასაგებია, რომ, რაც მეტ წერტილს მოვნიშნავთ, მით ზუსტი იქნება გრაფიკი). მე-2 ნახაზზე $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედის შესაბამისი გრაფიკი მიღებულია გრაფიკზე მონიშნული 4 წერტილის შეერთებით.



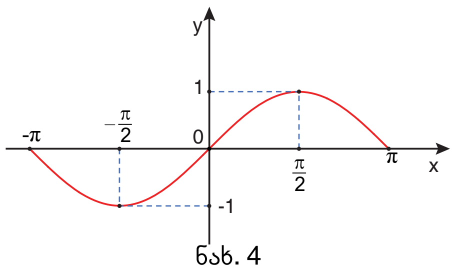
ნახ. 2

დაყვანის ფორმულის ძალით $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, საიდანაც ვასკვნით, რომ $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ შუალედში (ნახ.3) გრაფიკი სიმეტრიულია $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აგებული გრაფიკისა $x=\frac{\pi}{2}$ წრფის მიმართ.



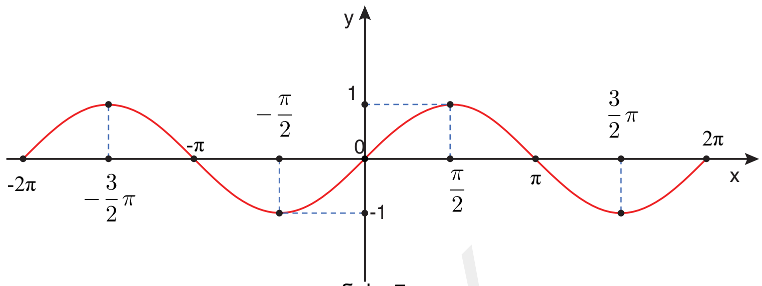
ნახ. 3

თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ სინუსი კენტი ფუნქციაა და ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, მაშინ ცენტრული სიმეტრიით მივიღებთ გრაფიკს $[-\pi;0]$ შუალედში (ნახ.4).



ნახ. 4

და ბოლოს, იმის გამო, რომ y=sinx პერიოდული ფუნქციაა 2π პერიოდით, $[-\pi;\pi]$ შუალედში მოცემული გრაფიკის $(2\pi k;0)$, $k \in Z$ კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანით მივიღებთ ფუნქციის გრაფიკს მთელ ღერძზე (ნახ.5).



ნახ. 5

მთელი გრაფიკი მოქცეულია ზოლში, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისათა ღერძის პარალელური y=1 და y=–1 წრფეებით.

გავიხსენოთ y=sinx ფუნქციის რა თვისებებიც ვიცით და გრაფიკზე დაკვირვებით ჩამოვაყალიბოთ მისი ძირითადი თვისებები:

1) y=sinx ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
2) მნიშვნელობათა სიმრავლეა [-1; 1] შუალედი;
3) ფუნქცია კენტია: $\sin(-x) = -\sin x$ ნებისმიერი $x \in R$-თვის. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;
4) ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ანუ $\sin(x+2\pi) = \sin x$ ნებისმიერი $x \in R$-თვის;
5) ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილებია $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,$ ხოლო მაქსიმუმია $y_{max} = 1$;
6) ფუნქციის მინიმუმის წერტილებია $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,$ ხოლო მინიმუმია $y_{min} = -1$;
7) $\sin x = 0$, როცა $x = \pi k,\ k \in Z$;
8) $\sin x > 0$, როცა $x \in (2\pi k,\ \pi + 2\pi k),\ k \in Z$;
9) $\sin x < 0$, როცა $x \in (\pi + 2\pi k,\ 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z$;
10) ფუნქცია ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$ შუალედებში და კლებადია $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$ შუალედებში.

უპასუხე კითხვებს:

1) როგორ გავარკვიოთ გრაფიკის მიხედვით ფუნქციის ლუწ-კენტობა?

2) $[0;2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=sinx კლებადი ფუნქცია? ზრდადი?

3) რამდენი ნული აქვს y=sinx ფუნქციას $[0;2\pi]$ შუალედში?

4) $[0;2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=sinx ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?

5) რა ზოლში იქნება მოთავსებული y=2sinx ფუნქციის გრფიკი?

6) აქვს თუ არა y=sinx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ცენტრი? სიმეტრიის ღერძი?

სავარჯიშოები

1 იპოვე y=2sinx ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

2 მოცემული ფუნქციებიდან რომელია ლუწი და რომელი კენტი?
ა) $y=\sin^2 x$; ბ) $y=\sin^3 x$; გ) y=2sinx–3x; დ) $y=x^2-\sin x$.

3 y=sinx ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით გაარკვიე, $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$ ინტერვალიდან რომელი რიცხვის სინუსია: ა) 0,5-ის ტოლი; ბ) –1-ის ტოლი; გ) 1-ის ტოლი.

4 y=sinx ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით იპოვე:
ა) sin15°-ის; ბ) sin50°-ის; გ) sin1-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა კალკულატორის გამოყენებით.

5 y=sinx ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით დაადგინე, რომელია მეტი:
ა) sin 1 თუ sin 2; ბ) $\sin\frac{\pi}{5}$ თუ $\sin\frac{\pi}{3}$;
გ) $\sin\frac{3\pi}{5}$ თუ $\sin\frac{4\pi}{5}$; დ) $\sin\frac{5\pi}{6}$ თუ $\sin\frac{6\pi}{5}$.

6 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი რომელიმე კომპიუტერული პროგრამის, მაგალითად Geogebra-ს გამოყენებით:
ა) y=sin2x; ბ) $y=\sin\frac{x}{2}$; გ) y=sin4x; დ) y=2sin2x.

7 ააგე y=sinx ფუნქციის გრაფიკი და მასზე მიუთითე გრაფიკის:
ა) სიმეტრიის ცენტრები; ბ) სიმეტრიის ღერძები.

8 ააგე y=–sinx ფუნქციის გრაფიკი.

9 ააგე ფუნქციის გრაფიკი: ა) $y=\sin(x+\pi)$; ბ) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

10 დაადგინე y=sin2x ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები.

11 მოძებნე $y=\sin 3x$ ფუნქციის $[-\pi; \pi]$ შუალედში მოთავსებული ნულები.

12 დაალაგე ზრდის მიხედვით: $\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$; $\sin\frac{\pi}{4}$; $\sin\frac{\pi}{6}$; $\sin\frac{\pi}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{2}$.

13 იპოვე $y=f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ:

ა) $f(x)=2+\sin x$; ბ) $f(x)=1-\sin^2 x$;

გ) $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$; დ) $f(x)=\frac{1}{2-\cos^2 x}$.

14 გამოთვალე $y=\sin \pi x$ ფუნქციის $(0;10)$ შუალედში არსებული ნულების ჯამი.

15 მოძებნე: $y=4\sin^2 x-5\cos^2 x+1$ ფუნქციის:

ა) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები; ბ) ექსტრემუმის წერტილები.

16 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=|\sin x|$; ბ) $y=\sin|x|$;

17 იპოვე $\sin x=0,5$ განტოლების $[-2\pi; 2\pi]$ შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნი.

18 იპოვე: ა) $f(x)=\cos(3x+7)$; ბ) $f(x)=\cos\left(5-\frac{x}{3}\right)$ ფუნქციის პერიოდი.

19 იპოვე $\cos\alpha$, თუ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=a$.

20 მოცემულია $\cos 27^\circ=a$. იპოვე:

ა) $\cos(-27^\circ)$; ბ) $\cos 153^\circ$; გ) $\sin 117^\circ$; დ) $\cos 207^\circ$; ე) $\sin 153^\circ$.

3.7 y=cosxფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

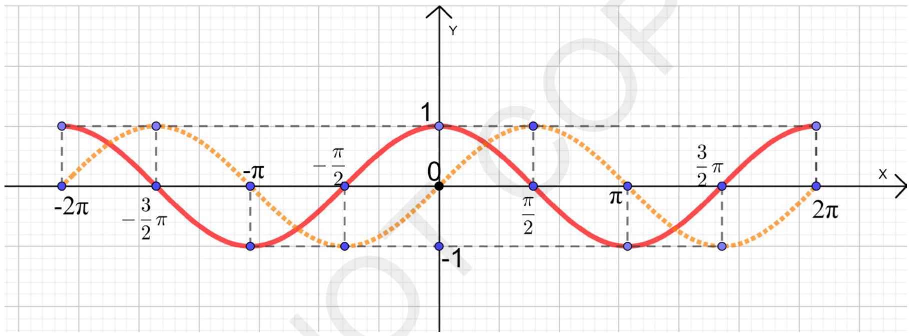
მიზანი

- **y=cosx ფუნქციის თვისებების შესწავლა;**
- **y=cosx ფუნქციის გრაფიკის აგება**

ვიცით y=cosx ფუნქციის ზოგიერთი თვისება და $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება. ამ ცოდნაზე დაყრდნობითა და $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ y=cosx ფუნქციის გრაფიკს.

დაყვანის ფორმულის თანახმად, x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

მაშასადამე, $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს აბსცისათა ღერძზე $\dfrac{\pi}{2}$ -ით მარცხნივ გადაწეული სინუსოიდა. $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკს **კოსინუსოიდა** ეწოდება (ნახ.1)



ნახ. 1

ცხადია, $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება შესაძლებელია საერთო წესითაც, ანუ cosx -ის ცხრილის გამოყენებით ისე, როგორც სინუსოიდის აგებისას. შესაძლებელია აგრეთვე, ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებითაც.

ჩამოვაყალიბოთ $y=\cos x$ ფუნქციის თვისებები.

1) განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

2) მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1; 1] შუალედი;

3) ლუწი ფუნქციაა, ნებისმიერი $x\in R$ -თვის cos(–x)=cosx. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ;

4) ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ანუ $\cos(x+2\pi)=\cos x$, ნებისმიერი $x\in R$ -თვის;

5) ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილებია $x_{max}=2\pi k,\ k\in Z$, ხოლო მაქსიმუმია $y_{max}=1$; ფუნქციის მინიმუმის წერტილებია $x_{min}=\pi+2\pi k,\ k\in Z$, ხოლო მინიმუმია $y_{min}=-1$;

6) cosx=0, როცა $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

7) cosx>0, როცა $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$;

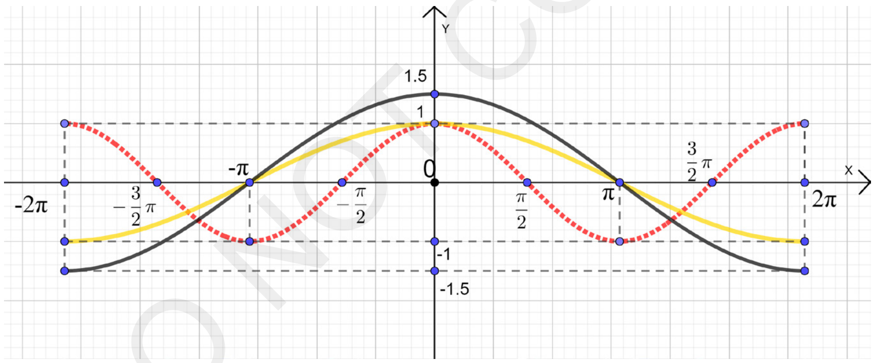
8) cosx<0, როცა $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$;

9) ფუნქცია ზრდადია $[-\pi+2\pi k; 2\pi k], k \in Z$ შუალედებში და კლებადია $[2\pi k; \pi+2\pi k], k \in Z$ შუალედებში.

მაგალითი 1. ავაგოთ $y=1,5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ვიცით როგორ ავაგოთ y=cosx ფუნქციის გრაფიკი. იმის გამო, რომ $y=\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის პერიოდი 2-ჯერ მეტია y=cosx ფუნქციის პერიოდზე, მისი „ტალღის“ სიგრძე იქნება 2-ჯერ მეტი. ამიტომ, თუ y=cosx ფუნქციის გრაფიკს გავჭიმავთ აბსცისათა ღერძის გასწვრივ 2-ჯერ, მივიღებთ $y=\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს.

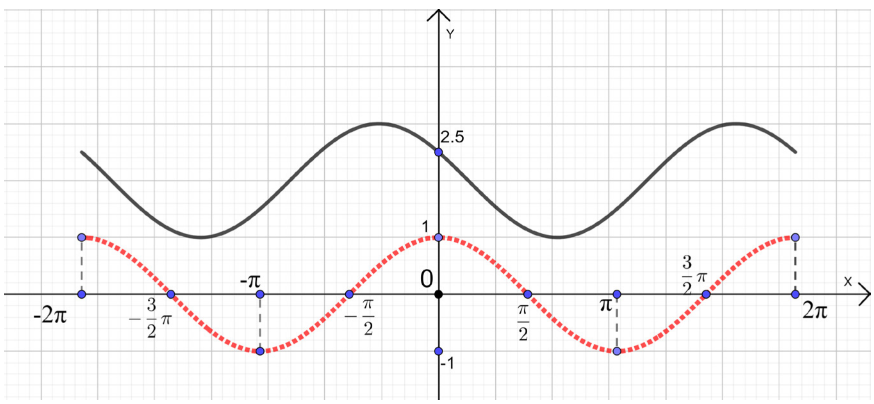
$y=1,5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-1,5;1,5]$, ამიტომ $y=\cos\frac{x}{2}$-ის მიღებული გრაფიკი უნდა გავჭიმოთ 3-ჯერ ორდინატთა ღერძის გასწვრივ და მივიღებთ $y=1,5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს.



ნახ. 2

მაგალითი 2. ავაგოთ $y=2+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ავაგოთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი. შემდეგ გრაფიკი გადავიტანოთ $\frac{\pi}{3}$-ით მარცხნივ და 2 -ით ზემოთ.



ნახ. 3

უპასუხე კითხვებს:

1) რომელი საკოორდინატო ღერძის მიმართ არის სიმეტრიული y=cosx ფუნქციის გრაფიკი?
2) რა კავშირია y=sinx და y=cosx ფუნქციების გრაფიკებს შორის?
3) $[0;\ 2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=cosx ზრდადი ფუნქცია? კლებადი?
4) რამდენი ნული აქვს y=cosx ფუნქციას $[0;\ 2\pi]$ შუალედში?
5) აქვს თუ არა y=cosx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ცენტრი?
6) $[0;\ 2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=cosx ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?
7) რა არის y=cosx ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა? უმცირესი მნიშვნელობა?
8) რა ზოლში იქნება მოთავსებული y=3cosx ფუნქციის გრაფიკი?

სავარჯიშოები

1 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:
ა) $y = 0,5\cos x$; ბ) $y = 3\cos x$.

2 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:
ა) $y = -\cos x$; ბ) $y = \cos x + 1$.

3 ააგე პროგრამა „Geogebra"-ს გამოყენებით $y = \cos 2x$ და $y = \cos 0,5x$ ფუნქციების გრაფიკები და იმსჯელე მათს მსგავსება-განსხვავებაზე.

4 ააგე $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ და $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციების გრაფიკები და იმსჯელე მათს მსგავსება-განსხვავებაზე/

5 ააგე $y = 1 + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი და შეადარე $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკს.

6 ააგე $y = |\cos x|$ და $y = \cos|x|$ ფუნქციების გრაფიკები რომელიმე კომპიუტერული პროგრამის გამოყენებით და შეადარე ერთმანეთს. შედეგად ჩამოაყალიბე შესაბამისი დასკვნა.

7 $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით განსაზღვრე, $[0;2\pi]$ შუალედის რომელი არგუმენტებისთვის არის $y = \cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{1}{2}$; ბ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; გ) -1; დ) 0.

8 $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით დაადგინე, რომელია მეტი:

ა) $\cos 1$ თუ $\cos 2$; ბ) $\cos\frac{\pi}{5}$ თუ $\cos\frac{\pi}{3}$;

გ) $\cos\frac{3\pi}{5}$ თუ $\cos\frac{4\pi}{5}$; დ) $\cos\frac{5\pi}{6}$ თუ $\cos\frac{7\pi}{3}$.

9 დაალაგე კლების მიხედვით: $\cos\frac{\pi}{3}$; $\cos\frac{4\pi}{3}$; $\cos\frac{\pi}{4}$; $\cos\frac{\pi}{6}$; $\cos\frac{\pi}{2}$; $\cos\frac{3\pi}{2}$.

10 დაადგინე $y = \cos 2x$ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები.

11 გრაფიკის მიხედვით დაადგინე, $(-\pi;\pi)$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზე სრულდება $\cos x>0$ უტოლობა.

12 იპოვე $y=f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ:

ა) $f(x)=1+2\cos x$; ბ) $f(x)=2-\cos^2 x$;

გ) $f(x)=\frac{1}{3-\cos x}$; დ) $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$.

13 მოძებნე $y = \cos 3x$ ფუნქციის $[-\pi;\pi]$ შუალედში მოთავსებული ნულები.

14 მოძებნე: $y = 3\cos^2 x - 4\sin^2 x + 2$ ფუნქციის:

ა) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები;
ბ) ექსტრემუმის წერტილები.

15 იპოვე $\cos x=0,5$ განტოლების $[-2\pi;2\pi]$ შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნი.

16 იპოვე $\cos\pi x=1$ განტოლების $[0;10]$ შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნის ჯამი.

17 მოცემულია $\mathrm{tg}\alpha=5$. გამოთვალე:

ა) $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)$; ბ) $\mathrm{tg}(\pi-\alpha)$;

გ) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; დ) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

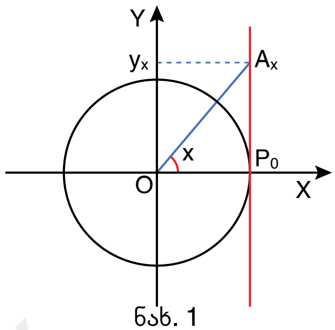
18 არგუმენტის რა მნიშვნელობებისთვის არაა განსაზღვრული $y=\mathrm{tg}x$ ფუნქცია $(0;2\pi)$ შუალედში?

3.8 y=tgx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

y=tgx ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

მიზანი

განმარტების თანახმად $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$. ამ განმარტებაში იგულისხმება, რომ $\cos x \neq 0$, ანუ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. ე.ი. ტანგენსის განსაზღვრის არე არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს გამოკლებული $\frac{\pi}{2} + \pi k$ სახის რიცხვების სიმრვალე, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.



ნახ. 1

ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლის დასადგენად ერთეულოვანი წრეწირის P_0 წერტილზე გავავლოთ ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე (1-ელ ნახაზზე A_xP_0 წრფე). ამ წრფეს **ტანგენსების წრფე** ეწოდება.

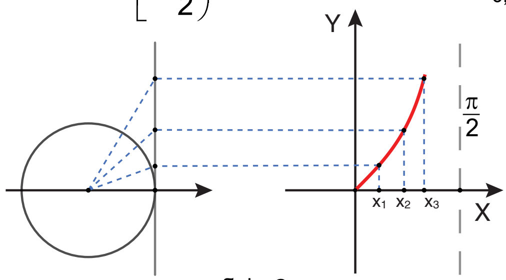
ნახაზიდან ვასკვნით, რომ ნებისმიერი $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ არგუმენტისათვის

$tgx = \frac{A_xP_0}{OP_0} = \frac{A_xP_0}{1} = y_x$, სადაც y_x არის A_x წერტილის ორდინატა.

თუ x არგუმენტს ვამოძრავებთ $-\frac{\pi}{2}$-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ A_x წერტილი გაირბენს ტანგენსების წრფეს, ხოლო მისი y_x კოორდინატი – მთელ რიცხვით ღერძს $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. აქედან ვასკვნით, რომ y=tgx ზრდადი ფუნქციაა $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში და ამ შუალედში მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეა.

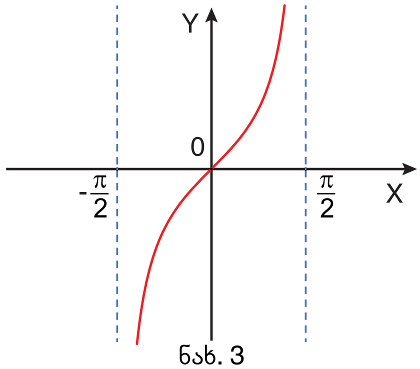
იმის გამო, რომ y=tgx კენტი ფუნქციაა, მისი გრაფიკის $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში ასაგებად საკმარისია გრაფიკი ავაგოთ $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში და კოორდონატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით გავავრცოთ $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ შუალედზე.

გრაფიკის ასაგებად ვიყენებთ ტანგენსების წრფეს (ნახ.2). $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში ვიღებთ x_0, x_1, . . . x_n რიცხვებს, ერთეულოვან წრეზე P_0 წერტილის x_0, x_1, . . . x_n რადიანებით მობრუნებით მიღებულ წერტილებს, ხოლო ტანგენსების წრფეზე მათი შესაბამისი წერტილებიდან ვავლებთ აბსცისთა ღერძის პარალელურ წრფეებს, x_0, x_1, . . . x_n წერტილებიდან ორდინატთა ღერძის პარალელურად გავლებული წრფეების გადაკვეთამდე. კვეთაში მიღე-



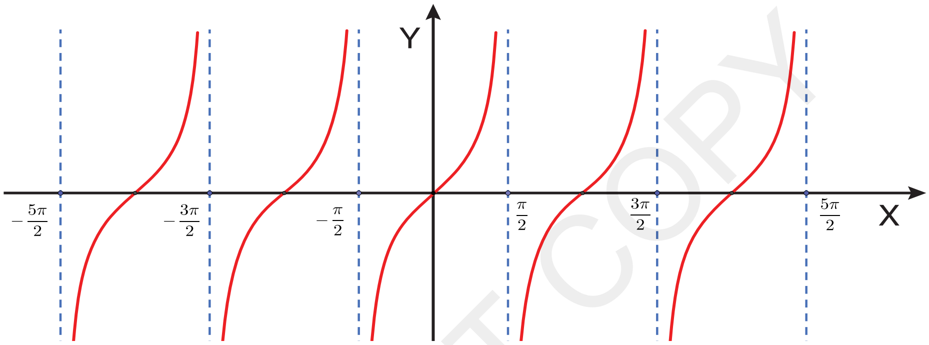
ნახ. 2

ბული წერტილები იქნება გრაფიკის წერტილები. ამ წერტილების გლუვი უწყვეტი წირით შეერთებისას მივიღებთ ტანგენსის გრაფიკს $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში. ამ გრაფიკის ცენტრული სიმატრიით მივიღებთ გრაფიკს $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში (ნახ.3), რომელსაც ტანგენსის გრაფიკის **მთავარი შტო** ეწოდება.



ნახ. 3

იმის გამო, რომ გრაფიკი π სიგრძის შუალედში უკვე აგებული გვაქვს და π რიცხვი ტანგენსის პერიოდია, მიღებული გრაფიკის (πk;0) კოორდინატებიანი პარალელური გადატანებით, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, მივიღებთ ტანგენსის გრაფიკს მთელ მის განსაზღვრის არეში (ნახ. 4).



ნახ.4

ჩამოვაყალიბოთ y=tgx ფუნქციის თვისებები:

1) განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ სახის რიცხვებისა;

2) მნიშვნელობათა სიმრავლეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R;

3) კენტი ფინქციაა, tg(–x)=–tgx, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;

4) პერიოდული ფუნქციაა. უმცირესი დადებითი პერიოდია π;

5) ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმის წერტილები;.

6) tgx=0, როცა $x=\pi k,\ k\in Z$;

7) tgx>0, როცა $x\in\left(\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in Z$;

8) tgx<0, როცა $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi k\right),\ k\in Z$;

9) ფუნქცია ზრდადია $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$ შუალედებში. კლებადი არაა განსაზღვრის არის არცერთ შუალედში.

უპასუხე კითხვებს:

1) რა ცენტრის მიმართაა სიმეტრიული ტანგენსის გრაფიკი?
2) რა არის ტანგენსის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა სიმრავლე?
3) როგორ ავაგოთ ტანგენსების წრფე?
4) $[0;\ 2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეებზეა y=tgx ზრდადი ფუნქცია? კლებადი?
5) რამდენი ნული აქვს y=tgx ფუნქციას $[-2\pi;\ \pi]$ შუალედში?
6) აქვს თუ არა y=tgx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ღერძი?
7) $[-\pi;\ \pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=tgx ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?
8) აქვს თუ არა y=tgx ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა? უმცირესი მნიშვნელობა?

სავარჯიშოები

1 ააგე y=tgx ფუნქციის გრაფიკი რომელიმე კომპიუტერული პროგრამის გამოყენებით და მისი დახმარებით დაადგინე, რომელია მეტი:
ა) tg1 თუ tg0,5?; ბ) $tg10^o$ თუ tg0,5; გ) $tg\dfrac{\pi}{4}$ თუ $tg\dfrac{\pi}{6}$; დ) $tg10^o$ თუ $tg15^o$.

2 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით დაადგინე ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა, როცა:
ა) x=1; ბ) x=0,3; გ) $x=\dfrac{\pi}{5}$; დ) x=2; ე) x=0,3; ვ) $x=\dfrac{2\pi}{3}$; ზ) x=1,5.

3 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tgx=1 განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომლებიც მოთავსებულია: ა) $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; ბ) $\left(-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$შუალედში.

4 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tgx=0 განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომლებიც მოთავსებულია $[-2\pi;2\pi]$შუალედში.

5 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tgx<0 უტოლობის ყველა ის ამონახსნი, რომლებიც $(-\pi;\ \pi)$ შუალედს ეკუთვნის.

6 გაარკვიე, მოცემული ფუნქციებიდან რომელია ლუწი და რომელი კენტი:
ა) $y=tg^2x+3$; ბ) y=3sin2x+2tg3x; გ) $y=|tgx|$; დ) $y=tg(\pi-x)$; ე) y=cosx+tgx.

7 იპოვე tgx=tg(–x) განტოლების ყველა ამონახსნი.

8 ააგე ა) $y=|tgx|$; ბ) $y=tg|x|$ ფუნქციის გრაფიკი.

9 გაამარტივე გამოსახულება:
ა) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; ბ) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;
გ) $(tg\alpha+tg^{-1}\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

10 იპოვე x არგუმენტი $(-90^o;90^o)$ შუალედიდან, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:
ა) sinx=0,5; ბ) sinx=–0,5; გ) sinx=0; დ) tgx=0; ე) $tgx=\sqrt{3}$; ვ) $tgx=-\sqrt{3}$.

11 იპოვე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $tg\alpha=0,75$.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №4

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, მათი თვისებები და გრაფიკები

1 ლუწია თუ კენტი $f(x)=2-4\cos\frac{x}{3}$ ფუნქცია?

ა) ლუწია; ბ) კენტია; გ) არც ლუწია და არც კენტი; დ) გაურკვეველია.

2 $f(x)=-0,5\cos x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა:

ა) $(-0,5;\ 0,5)$; ბ) $(-\infty;\ +\infty)$; გ) $(0;+\infty)$; დ) $(-\infty;\ 0,5)$.

3 $f(x)=\sin^2 x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა:

ა) $(0;\ 1)$; ბ) $(-\infty;\ +\infty)$; გ) $[0;1]$; დ) $(-\infty;\ 1)$.

4 იპოვე $f(x)=\cos 2x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ა) π; ბ) 2π; გ) 3π; დ) $\frac{\pi}{2}$.

5 თუ $\cos\alpha=a$, მაშინ რის ტოლია $\sin(270^\circ-\alpha)$?

ა) $\sqrt{1-a^2}$; ბ) $-\sqrt{1-a^2}$; გ) a; დ) $-a$.

6 რომელი უტოლობაა მართებული?

ა) $\sin\frac{\pi}{12}>\sin\frac{\pi}{6}$; ბ) $\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{6}$; გ) $\cos\frac{\pi}{12}<\cos\frac{\pi}{6}$; დ) $\sin\frac{\pi}{12}\geq\cos\frac{\pi}{6}$.

7 იპოვე $f(x)=2\sin x+1$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები.

8 გამოთვალე: $\mathrm{tg}40^\circ\cdot\mathrm{tg}50^\circ+\sin 20^\circ:\cos 70^\circ$.

9 გაამარტივე: $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

10 მოცემულია, $y=f(x)$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ლუწი პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით 3. f(8)=11. გამოთვალე f(1)+f(11).

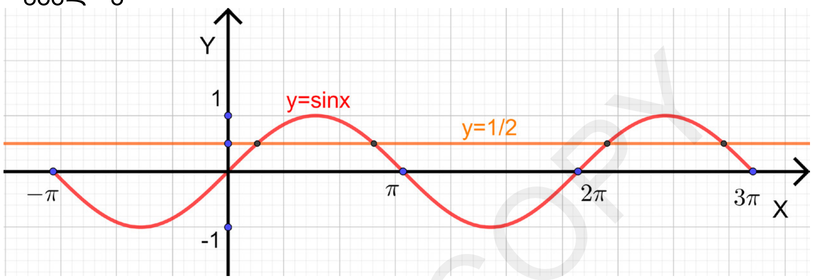
3.9 უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა

მიზანი

დავადგინოთ sinx=a, cosx=a და tgx=a განტოლებათა ამონახსნები

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ყველა ამონახსნი.

ამოხსნა: ავაგოთ y=sinx და $y=\frac{1}{2}$ ფუნქციათა გრაფიკები. ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები იქნება მოცემული განტოლების ამონახსნები. როგორც პირველი ნახაზიდან ვრწმუნდებით, განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს. ჩვენი მიზანია, რაიმე ფორმულით აღვწეროთ ყველა ეს ამონახსნი.



ნახ. 1

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, $x=\frac{\pi}{6}$. დაყვანის ფორმულის ძალით $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში გვექნება კიდევ ერთი ამონახსნი: $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. სინუსის პერიოდულობის გამო თითოეული ეს ამონახსნი წარმოშობს ამონახსნთა სიმრავლეს:

$$A=\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\} \text{ და } B=\left\{\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$$

როგორც 1-ელი ნახაზიდან ვრწმუნდებით, მოცემულ განტოლებას მხოლოდ ამ ორი სახის ამონახსნი აქვს. შევეცადოთ, ამონახსნთა ორი სიმრავლე ერთი ფორმულით ჩავწეროთ. ამისათვის B სიმრავლე გადავწეროთ შემდეგაირად:

$$B=\left\{\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}=\left\{-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi,\ k\in Z\right\}.$$

თუ A და B სიმრავლეებს შევადარებთ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ A სიმრავლის ელემენტები მიღებულია $\frac{\pi}{6}$-სთვის π-ს ლუწი ჯერადების დამატებით, ხოლო B სიმრავლის ელემენტები $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$-ისთვის π-ს კენტი ჯერადების დამატებით. ამ ორი სიმრავლის გაერთიანება შეგვიძლია ჩავწეროთ ტოლობით:

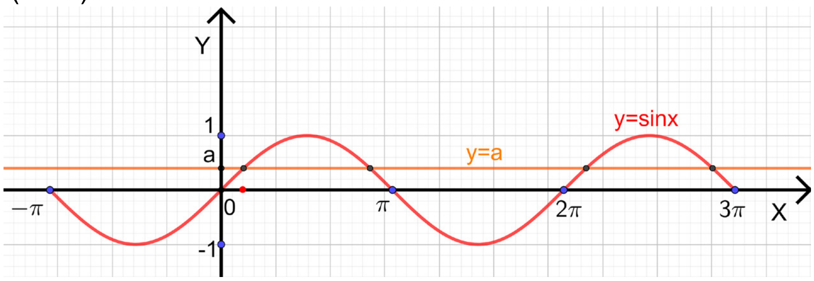
$$A\cup B=\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z\right\}.$$

პასუხი. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

განვიხილოთ sinx=a განტოლება ნებიმიერი a რიცხვის შემთხვევაში:

თუ a>1 ან a<–1 მოცემულ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, რადგან სინუს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1; 1] შუალედი.

ვთქვათ, $|a| \le 1$. ისევე, როგორც განხილულ მაგალითში, ავაგოთ y=sinx და y=a ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ.2).



ნახ. 2

როგორც ამ ნახაზიდან ვრწმუნდებით, sinx=a განტოლებას $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნს arcsina ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკსინუს a“). მაგალითად, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, რადგან $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ და $\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$, ანუ $\frac{\pi}{6}$ არის $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნი.

საზოგადოდ, ნებისმიერი a რიცხვისთვის [–1; 1] შუალედიდან arcsina არის $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოთავსებული ის რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

$$\sin(\arcsin a)=a.$$

ყველა დანარჩენი ამონახსნი იმავე მსჯელობით მიიღება, როგორც ეს 1-ელ მაგალითში იყო ნაჩვენები. კერძოდ, დაყვანის ფორმულის ძალით $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში გვექნება კიდევ ერთი ამონახსნი: π-arcsina, ხოლო სინუსის პერიოდულობის გამო თითოეული ეს ამონახსნი წარმოშობს ამონახსნთა სიმრავლეს:

$$A=\{\arcsin a+2\pi k, k\in Z\},\quad B=\{-\arcsin a+(2k+1)\pi, k\in Z\}.$$

ამ ორი სიმრავლის გაერთიანებით მივიღებთ sinx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნის ფორმულას:

$$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z. \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ ტრიგონომეტრიული განტოლების ამონახსნები საჭიროების შემთხვევაში შეგვიძლია გრადუსებში ჩავწეროთ. მაგალითად, განხილულ $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნები გრადუსებში ასე ჩაიწერება:

$$x=(-1)^n\cdot 30^\circ+180^\circ\cdot n,\ \ n\in Z.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება: $2\sin^2x-3\sin x-2=0$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: sinx=y. ამოვხსნათ მიღებული კვადრატული განტოლება:

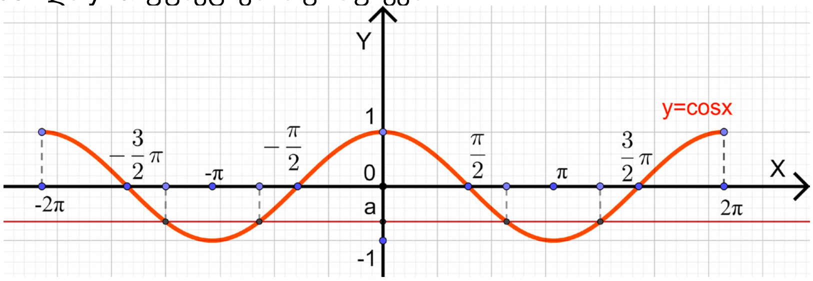
$$2y^2-3y-2=0\Rightarrow y_1=-\frac{1}{2},\ y_2=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n, n\in Z\\ \sin x=2\Rightarrow\varnothing\end{array}\right..$$

პასუხი: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

განვიხილოთ cosx=a განტოლება. ისევე, როგორც sinx=a შემთხვევაში, აქაც, როცა |a|>1, განტოლებას არა აქვს ამონახსნი.

განვიხილოთ cosx=a, როცა |a|≤1.

ავაგოთ y=cosx და y=a ფუნქციების გრაფიკები.



ნახ. 3

როგორც მე-3 ნახაზიდან ჩანს $[0;\pi]$ შუალედში მოცემულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნს arccosa ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკკოსინუს ა“).

მაგალითად, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, რადგან $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$ და $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, ანუ $\frac{\pi}{3}$ არის $\cos x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნი.

საზოგადოდ, ნებისმიერი a რიცხვისთვის [–1; 1] შუალედიდან, arccosa არის [0; π] შუალედში მოთავსებული ის რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

$$\cos(\arccos a)=a.$$

იმის გამო, რომ კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა arccosa-თან ერთად cosx=a განტოლებას დააკმაყოფილებს აგრეთვე –arccosa, ხოლო პერიოდულობის გამო – ამ ორ ამონახსნს დამატებული 2π-ს ნებისმიერი ჯერადები. ამიტომ cosx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z. \qquad (2)$$

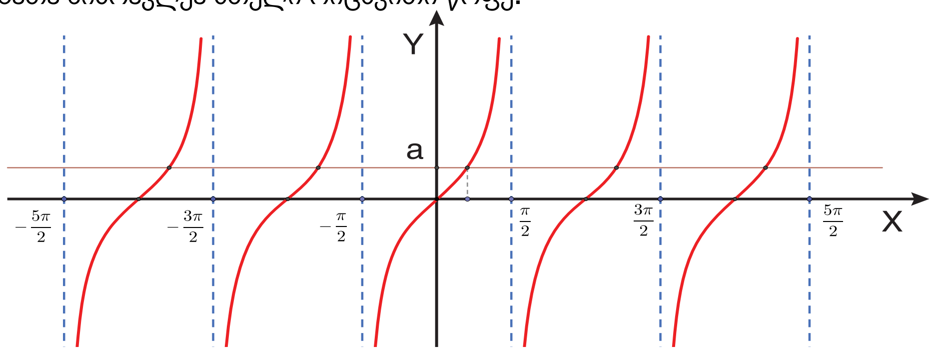
მაგალითი 2. ამოვხსნათ $\cos(2x+10^o)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ განტოლება.

ამოხსნა. იმის გამო, რომ არგუმენტში გრადუსებში მოცემული შესაკრები მონაწილეობს ამონახსნიც გრადუსებში უნდა ჩაიწეროს. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=180^o-45^o=135^o$. მე-2 ფორმულით:

$$2x+10^o=\pm135^o+360^o\cdot n,\ n\in Z\Rightarrow x=-5^o\pm67{,}5^o+180^o\cdot n,\ n\in Z.$$

პასუხი. ა) $x=-5^o\pm67{,}5^o+180^o\cdot n,\ n\in Z$.

tgx=a განტოლებას ნებისმიერი a რიცხვისათვის აქვს ამონახსნი, რადგან ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლეა მთელი რიცხვითი წრფე.



ნახ.4

როგორც მე-4 ნახაზზე ჩანს, მოცემულ განტოლებას $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. თუ ამ ამონახსნს arctga ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკტანგენს ა“) და ტანგენსის პერიოდსაც გავითვალისწინებთ, მივიღებთ tgx=a განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$x=\mathrm{arctg}a+\pi k,\ k\in Z. \qquad (3)$$

განმარტების თანახმად $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}a<\frac{\pi}{2}$ და tg(arctga)=a.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება arcsina? arccosa? arctga?
2. რამდენი ამონახსნი აქვს sinx=0,5 განტოლებას $(0;2\pi)$ შუალედში?
3. როგორი a-რიცხვისთვის აქვს ამოხსნა cosx=a განტოლებას? tgx=a განტოლებას?
4. რამდენი ამონახსნი აქვს tgx=a განტოლებას $(0;\pi)$ შუალედში?

სავარჯიშოები

1

იპოვე arcsina, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=-1; ზ) a=0.

2

იპოვე arccosa, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=-1; ზ) a=0.

3

იპოვე arctga, თუ:

ა) a=1; ბ) a=–1; გ) $a=\sqrt{3}$; დ) $a=-\sqrt{3}$; ე) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$; ვ) $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ზ) a=0.

4

მოცემული გამოსახულებებიდან რომელს არა აქვს აზრი?

ა) arcsin0,7; ბ) arccos(–0,3); გ) arctg13; დ) arccos3.

5

იპოვე:

ა) sin(arcsin1); ბ) cos(arccos0,13); გ) tg(arctg7); დ) cos(arccos0,5).

6

იპოვე sinx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

7

იპოვე cosx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) $a=\frac{1}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

8

იპოვე tgx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) a=1; ბ) a=-1; გ) $a=\sqrt{3}$; დ) $a=-\sqrt{3}$; ე) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$; ვ) $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ზ) a=0.

9 ამოხსენი განტოლება:

ა) $\sin 2x=0$; ბ) $\sin 3x=\frac{1}{2}$; გ) $\cos(x+3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

დ) $\cos(2x+30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x-3=0$.

10 იპოვე $2\sin x+1=0$ განტოლების $(\pi;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი.

11 იპოვე $\sqrt{2}\cos x-1=0$ განტოლების $(1{,}5\pi;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი.

12 გამოთვალე $\sqrt{12}\,\mathrm{tg}x-2=0$ განტოლების $(-\pi;\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნების ჯამი.

13 ამოხსენი განტოლება:

ა) $\sin^2x+2\sin x+1=0$; ბ) $2\cos^2x-5\cos x+2=0$; გ) $\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}=2$; დ) $1-\cos^2x=2\sin x$.

14 მოცემულია $\sin x=\mathrm{tg}x$ განტოლება.

ა) ამოხსენი განტოლება გრაფიკულად კომპიუტერული პროგრამის დახმარებით;
ბ) ამოხსენი იგივე განტოლება ალგებრულად.

15 მოცემულია $\cos x=\mathrm{tg}x$ განტოლება.

ა) ამოხსენი განტოლება გრაფიკულად კომპიუტერული პროგრამის დახმარებით;
ბ) ამოხსენი იგივე განტოლება ალგებრულად.

16 დაადგინე გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა:

ა) $\arcsin(\sin\pi)$; ბ) $\arccos(\cos 4)$; გ) $\sin(\mathrm{arctg}1)$;

დ) $\sin(\mathrm{arctg}2)$; ე) $\cos(\arcsin(-\frac{1}{3}))$.

17 ამოხსენი განტოლება:

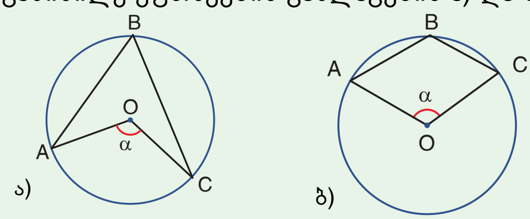
ა) $\sin x-\cos x=0$; ბ) $\cos^2x-\sin^2x=0$; გ) $\cos^4x-\sin^4x=1$; დ) $\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$.

18 მოცემულია $\cos 55°=a$. იპოვე:

ა) $\sin 35°$; ბ) $\cos 125°$; გ) $\sin 145°$; დ) $\cos 35°$; ე) $\sin 55°$.

19 მოცემულია ABC სამკუთხედი. $\angle A=45°$, $\angle C=60°$, $CB=a$ სმ. იპოვე AB და AC გვერდები.

20 გამოთვალე წრეწირში ჩახაზული ABC კუთხის ზომა, თუ AOC ცენტრალური კუთხე α-ს ტოლია. განიხილე კუთხეების განლაგების ა) და ბ) შემთხვევები:



ტესტი თვითშემოწმებისათვის №5

უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

1 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=$

ა) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; ბ) $\frac{\pi}{6}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

2 $\cos\arccos 1=$

ა) 1; ბ) $\frac{5\pi}{6}$; გ) 0; დ) π.

3 $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=$

ა) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; გ) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; დ) $\frac{\pi}{3}$.

იპოვე განტოლების ზოგადი ამონახსნი: №[4-6]

4 $\sin 2x=0$.

ა) $\pi n,\ n\in Z$; ბ) $\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$;

გ) $2\pi n,\ n\in Z$; დ) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

5 $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

ა) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$;

გ) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi,\ n\in Z$; დ) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$.

6 $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}=-\sqrt{3}$.

ა) $-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in Z$; ბ) $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in Z$;

გ) $-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{2},\ n\in Z$; დ) $-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

ამოხსენი განტოლება №7, №8:

7 $\cos^2 x=3\cos x$.

8 $3\operatorname{tg}(3x+1)-\sqrt{3}=0$.

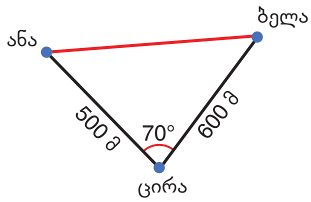
9 იპოვე $\sin x=-0,5$ განტოლების უმცირესი დადებითი ამონახსნი.

10 იპოვე $2\sin 2x=-1$ განტოლების უდიდესი უარყოფითი ამონახსნი.

3.10 კოსინუსების თეორემა

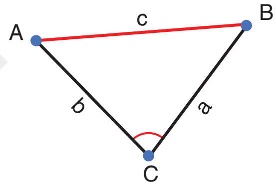
მიზანი კოსინუსების თეორემისა და მისი შედეგების გაცნობა და გამოყენება

ამოცანა 1. ცირას სახლი ორი ქუჩის გადაკვეთაზე მდებარეობს. ეს ქუჩები 70°-იანი კუთხით იკვეთება. ერთ ქუჩაზე, ცირას სახლიდან 500 მეტრში, ცხოვრობს ანა, ხოლო მეორე ქუჩაზე, ცირას სახლიდან 600 მეტრში – ბელა. დავადგინოთ, რა მანძილია ანას სახლიდან ბელას სახლამდე.



როგორც სქემატური ნახაზიდან ჩანს, ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა ვიცოდეთ, როგორ გამოვთვალოთ მოცემული ორი გვერდითა და მათ შორის კუთხით სამკუთხედის მესამე გვერდი. ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა **კოსინუსების თეორემა:**

სამკუთხედის ყოველი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამავე გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი.

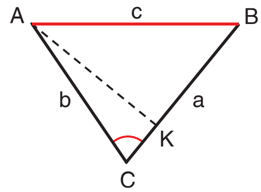


ნახ. 1

ჩამოყალიბებული თეორემა 1-ელი ნახაზის მიხედვით ასე ჩაიწერება:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C. \qquad (1)$$

დამტკიცება. იმ შემთხვევაში, როცა C მართი კუთხეა, (1) ტოლობა გამომდინარეობს პითაგორას თეორემიდან, რადგან $\cos 90°=0$.



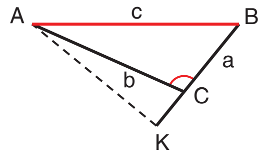
ნახ. 2

ვთქვათ, C მახვილი კუთხეა (ნახ.2). A წვეროდან BC გვერდზე დავუშვათ AK სიმაღლე. პითაგორას თეორემის ძალით:

$$c^2=AK^2+BK^2. \qquad (2)$$

მეორე მხრივ,

$$AK^2=b^2-CK^2=b^2-(b\cos\angle C)^2,\ BK=a-CK=a-b\cos\angle C. \qquad (3)$$



ნახ. 3

1-ელი ტოლობა მე-3 ტოლობების მე-2 ტოლობაში ჩასმით მიიღება (შეამოწმე დამოუკიდებლად).

თუ C ბლაგვი კუთხეა (ნახ.3), მაშინ

$$AK^2=b^2-CK^2=b^2-(b\cos(180°-\angle C))^2,$$

ხოლო

$$BK=a+CK=a+b\cos(180°-\angle C).$$

თუ უკანასკნელ ორ ტოლობას ჩავსვამთ მე-2 ტოლობაში და ამასთან გავითვალისწინებთ, რომ $\cos(180°-\angle C)=-\cos\angle C$, ისევ მივიღებთ 1-ელ ტოლობას (შეამოწმე დამოუკიდებლად). თეორემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ 1-ელ ამოცანას. კალკულატორის დახმარებით ვადგენთ, რომ $\cos 70°\approx 0{,}342$. ამოცანის მონაცემების 1-ელ ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\sqrt{500^2+600^2-2\cdot 500\cdot 600\cdot 0{,}342}\approx 780.$$

პასუხი. ანას სახლიდან ბელას სახლამდე მანძილი, დაახლოებით, 780 მეტრია.

1-ელი ტოლობიდან ვიღებთ C კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \qquad (4)$$

მიღებული ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ სამკუთხედის კუთხეები მოცემული სამი გვერდის მიხედვით.

ამოცანა 2. სამკუთხედის გვერდებია: ა) 8სმ, 15სმ, 17სმ; ბ) 1სმ, 2სმ, $\sqrt{7}$ სმ. გამოვთვალოთ სამკუთხედის უდიდესი კუთხის სიდიდე.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ სამკუთხედის ყოველი კუთხე (0°; 180°) შუალედს ეკუთვნის. ამ შუალედში კი კუთხე ცალსახად განისაზღვრება მისი კოსინუსის მნიშვნელობით (ახსენი, რატომ). მაშასადამე, საკმარისია გამოვთვალოთ მოცემული სამკუთხედის უდიდესი კუთხის კოსინუსი და მისი საშუალებით ვიპოვოთ კუთხის მნიშვნელობა.

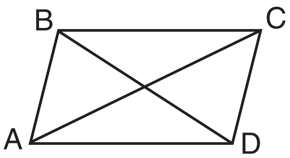
სამკუთხედის უდიდესი კუთხე უდიდესი გვერდის მოპირდაპირეა, ამიტომ საძიებელი კუთხის კოსინუსი მე-4 ფორმულის ძალით იქნება:

ა) $\dfrac{8^2+15^2-17^2}{2\cdot 8\cdot 15}=0$, ე.ი. საძიებელი კუთხის სიდიდეა 90°, რადგან (0°; 180°) შუალედში კოსინუსი 0-ის ტოლი მხოლოდ 90°-ზე ხდება.

ბ) $\dfrac{1^2+2^2-7}{2\cdot 1\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$, ე.ი. საძიებელი კუთხის სიდიდეა 120°, რადგან (0°; 180°) შუალედში კოსინუსი $-\dfrac{1}{2}$-ის ტოლი მხოლოდ 120°-ზე ხდება.

პასუხი: ა) 90°; ბ) 120°.

კოსინუსების თეორემიდან გამომდინარეობს პარალელოგრამის შემდეგი თვისება:



ნახ. 4

პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი ოთხივე გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია.

ჩამოყალიბებული თვისება მე-4 ნახაზის მიხედვით ასე ჩაიწერება:

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2. \qquad (5)$$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ კოსინუსების თეორემა ABD და ADC სამკუთხედებში:

$$BD^2= AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A, \qquad (6)$$

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle D. \qquad (7)$$

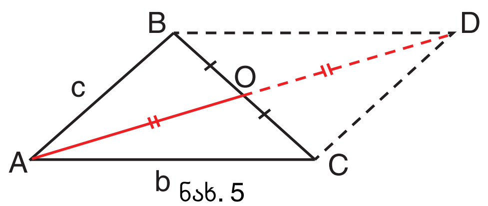
თუ მე-7 ტოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ CD=AB, ხოლო $\cos\angle D=\cos(180°-\angle A)=-\cos\angle A$, მივიღებთ:

$$AC^2=AD^2+AB^2+2AD\cdot AB\cdot\cos\angle A \qquad (8)$$

მე-6 და მე-8 ტოლობების შეკრებით მივიღებთ მე-5 ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 3. სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. გამოვთვალოთ a გვერდისადმი გავლებული სამკუთხედის მედიანა.

ამოხსნა. ვთქვათ ΔABC-ში AB=C, AC=b და BC=a. მე-5 ნახაზზე AO მედიანაა. AO სხივზე გადავდოთ AO მონაკვეთის ტოლი OD მონაკვეთი და D წერტილი შევაერთოთ B და C წერტილებთან. მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, რადგან O წერტილი მის AD და BC დიაგონალებს შუაზე ყოფს.



ნახ. 5

დამტკიცებულ თვისებაზე დაყრდნობით ვწერთ:

$$(2AO)^2+BC^2=2(AB^2+AC^2), \text{ ანუ}$$

$$(2AO)^2=2(c^2+b^2)-a^2.$$

თუ a გვერდზე დაშვებულ მედიანას m_a-თი აღვნიშნავთ, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$m_a=\frac{\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}}{2}.$$

უპასუხე კითხვებს:

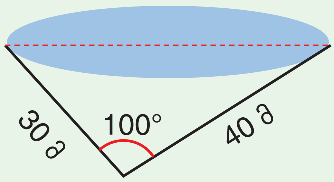
1. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის გვერდს მისი მოპირდაპირე კუთხითა და ამ კუთხის მიმდებარე გვერდებით?
2. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის კუთხეებს მოცემული სამი გვერდით?
3. როგორია სამკუთხედი, თუ მისი უდიდესი გვერდის კვადრატი: ა) მეტია, ბ) ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე?
4. როგორია სამკუთხედი, თუ მისი ერთ-ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია?
5. რა თვისება აქვს პარალელოგრამს?
6. როგორ გამოითვლი სამკუთხედის მედიანას მოცემული სამი გვერდის მიხედვით?
7. რომელი კუთხის კოსინუსი მიიღებს მონაწილეობას ABC სამკუთხედში BC გვერდის დანარჩენი ორი გვერდის საშუალებით გამოთვლაში?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე სამკუთხესდის c გვერდი, თუ $a=3$სმ, $b=4$სმ, ხოლო a და b გვერდებს შორის კუთხეა: ა) 90°; ბ)120°; გ) 60°.

2 გამოთვალე ABC სამკუთხედის AC გვერდი, თუ $AB=5$სმ, $BC=12$სმ, ხოლო B კუთხის სიდიდეა: ა) 30°; ბ) 90°; გ) 150°.

3 გამოთვალე გუბურის სიგრძე მე-6 ნახაზის მიხედვით.



ნახ. 6

4 გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი 6სმ-ის, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე 30°-ის ტოლია.

5 გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი 10სმ-ის, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხის კოსინუსი –0,25-ის ტოლია.

6 გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი 10სმ-ის, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხის: ა) კოსინუსი 0,6-ის ტოლია; ბ) სინუსი 0,8-ის, ტოლია.

7 გამოთვალე სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი გვერდებია:
ა) 3სმ, 3სმ და $3\sqrt{2}$ სმ; ბ) 3სმ, 3სმ და $3\sqrt{3}$ სმ.

8 გამოთვალე სამკუთხედის უდიდესი კუთხის სიდიდე, თუ სამკუთხედის გვერდებია:
ა) 5სმ, 6სმ და $\sqrt{61}$ სმ; ბ) 1მ, $\sqrt{3}$ მ და $\sqrt{7}$ მ.

9 დაადგინე, მოცემული გვერდების მიხედვით რომელი სამკუთხედია მახვილკუთხა, რომელი მართკუთხა და რომელი ბლაგვკუთხა:
ა) 7სმ, 10სმ, 14სმ; ბ) 7მ, 24მ, 25მ; გ) 10დმ, 11დმ, 13დმ.

10 ABCD პარალელოგრამში $AB=9$სმ, $BC=7$სმ, $AC=14$სმ. იპოვე BD.

11 პარალელოგრამის დიაგონალებია 6სმ და 10სმ, ხოლო ერთი გვერდი – 4სმ. იპოვე პარალელოგრამის დანარჩენი გვერდები.

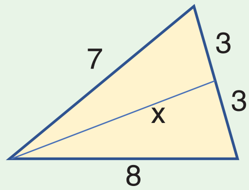
12 იპოვე პარალელოგრამის გვერდები, თუ დიაგონალებია 8სმ და 12სმ, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე – 60°.

13 იპოვე პარალელოგრამის გვერდები, თუ დიაგონალებია 4სმ და 6სმ, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხის კოსინუსი უდრის $\frac{1}{3}$-ს.

14 სამკუთხედის გვერდებია: 7სმ, 8სმ და 9სმ. იპოვე სამივე მედიანის სიგრძე.

15 ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 8სმ-ის, ხოლო ფერდისადმი გავლებული მედიანა 5სმ-ის ტოლია. იპოვე ფუძე.

16 მე-7 ნახაზის მიხედვით იპოვე x.

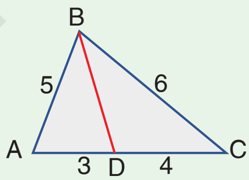


ნახ. 7

17 სამკუთხედის ერთი მედიანა 9სმ-ია, მეორე მედიანა – 12სმ, ხოლო ამ მედიანებს შორის კუთხე – 60°. იპოვე სამკუთხედის გვერდები.

18 ჩამოაყალიბე და დაამტკიცე პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა.

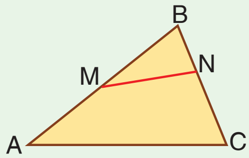
19 მე-8 ნახაზის მიხედვით იპოვე BD მონაკვეთის სიგრძე.



ნახ. 8

20 სამკუთხედის გვერდებია 5 მ, 7მ და 8მ. გამოთვალე სამკუთხედის იმ ბისექტრისის სიგრძე, რომელიც უდიდესი კუთხის წვეროზეა გავლებული.

21 ABC სამკუთხედში (ნახ. 9) AB=8სმ, BC=5სმ, AC=7სმ. გამოთვალე MN მონაკვეთის სიგრძე, სადაც M წერტილი AB მონაკვეთის შუა წერტილია, ხოლო N∈BC და BN=2სმ.



ნახ. 9

22 ABC სამკუთხედში AB=13სმ, BC =20სმ, ხოლო BK სიმაღლე 12სმ-ია. გამოთვალე B კუთხის სიდიდე. განიხილე ორი შესაძლო შემთხვევა.

23 გამოთვალე სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი, თუ მისი გვერდებია: 13სმ, 14სმ და 15სმ.

24 იპოვე x-ის ყველა რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ x, x+1, x+2 ბლაგვკუთხა სამკუთხედის გვერდებია.

25 მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეა α, ხოლო ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტი – a. გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი.

აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ თუ ABC სამკუთხედში BD ბისექტრისაა, მაშინ $BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$

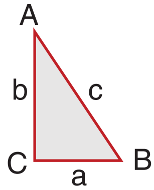
3.11 სინუსების თეორემა

მიზანი

სინუსების თეორემისა და მისი შედეგების გაცნობა/გამოყენება

ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, ABC სამკუთხედის A, B და C კუთხეების მოპირდაპირე გვერდები აღვნიშნოთ a, b და c ასოებით. როგორც ვიცით, სამკუთხედში დიდი გვერდის მოპირდაპირედ დიდი კუთხე ძევს. ნიშნავს თუ არა ეს, რომ რადენჯერაც a გვერდი მეტია b გვერდზე, იმდენჯერ A კუთხე მეტი იქნება B კუთხეზე? ანუ, არის თუ არა სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება?

პასუხია – არა. მაგალითად, განვიხილოთ მართკუთხა ABC სამკუთხედი, რომლის $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. ამ სამკუთხედში $c=2a$, $b=a\sqrt{3}$. გამოდის, რომ კუთხეები 1-ის, 2-ისა და 3-ის პროპორციულია, ხოლო გვერდები – 1-ის, $\sqrt{3}$-ის და 2-ის პროპორციული.



მაგრამ, თუ კუთხეების ნაცვლად ამ კუთხეების სინუსებს შორის პროპორციას განვიხილავთ, მივიღებთ: $\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$, ანუ მოცემული სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.

ეს თვისება ნებისმიერი სამკუთხედისთვისაა დამახასიათებელი. კერძოდ, მართებულია:

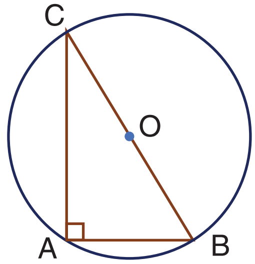
სინუსების თეორემა. ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პირდაპირპროპორციულია და მათი შეფარდება ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია. ანუ

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდები, ხოლო A, B, C ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეებია.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდის შეფარდება მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის დიამეტრის ტოლია.

1ა, 1ბ და 1გ ნახაზებზე მოცემულია ΔABC-ს სამი განსხვავებული შემთხვევა. სამივე შემთხვევაში უნდა დავამტკიცოთ $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$ ტოლობა.



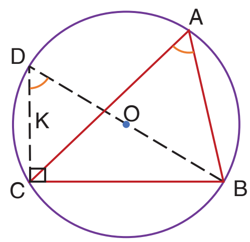
ნახ. 1ა

I. $\angle A=90°$ (ნახ.1ა). ამ შემთხვევაში BC=2R, ამიტომ

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{2R}{\sin 90°} = 2R;$$

II. $\angle A<90°$ (ნახ.1ბ). ნახაზზე O შემოხაზული წრეწირის ცენტრია, BD – დიამეტრი. $\angle CDB = \angle A$, რადგან CDB და A ერთსა და იმავე რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეებია. $\angle DCB=90°$, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე. ამიტომ:

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{BC}{\sin\angle CDB} = BD = 2R;$$



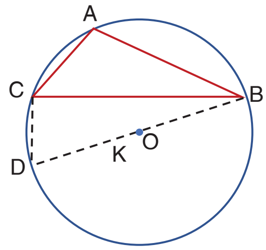
ნახ. 1ბ

III. $\angle A>90°$ (ნახ.1გ). ნახაზზე O შემოხაზული წრეწირის ცენტრია,

BD – დიამეტრი. $\angle A=180°-\angle CDB$, რადგან CDB და A დამატებით რკა-ლებზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეებია.

$\angle DCB=90°$, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე. ამიტომ:

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{BC}{\sin(180°-\angle CDB)}=\frac{BC}{\sin\angle CDB}=BD=2R.$$



ნახ. 1გ

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემოხაზული წრის რადიუსის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}. \qquad (1)$$

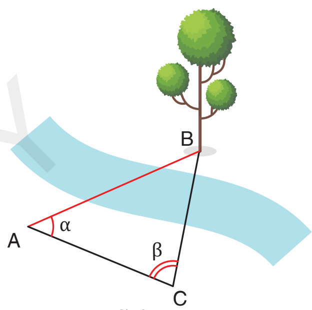
სინუსებისა და კოსინუსების თეორემებს დიდი გამოყენება აქვს პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნაში. მოვიყვანოთ სინუსების თეორემის პრაქტიკული გამოყენების ერთი მაგალითი.

ვთქვათ, იმყოფები მდინარის ერთ მხარეს A წერტილში და გინდა გაიგო მდინარის მეორე მხარეს B წერტილში მდგომ ხემდე AB მანძილი (ნახ.2).

ამ მიზნის მისაღწევად შეგიძლია ასე იმოქმედო:

1. გადაზომო შენსავე ნაპირზე მანძილი რაიმე C წერტილამდე;
2. დაადგინო α და β კუთხეთა ზომა;
3. დაწერო სინუსების თეორემიდან გამომდინარე პროპორცია:

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin(180°-\alpha-\beta)},$$



ნახ. 2

საიდანაც, დაყვანის ფორმულის გათვალისწინებით, მიიღებ საძიებელი მანძილის გამოსთვლელ ფორმულას:

$$AB=\frac{AC\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ ვიცით სამკუთხედის ერთი გვერდი და ორი კუთხე, სინუსების თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია გავიგოთ დანარჩენი გვერდები.

მაგალითი. ABC სამკუთხედში AB=10სმ, $\angle A=30°$, $\angle B=50°$. ვიპოვოთ AC და BC.

ამოხსნა. სინუსების თეორემით ვწერთ:

$$\frac{AC}{\sin50°}=\frac{AB}{\sin100°}\Rightarrow AC=\frac{10\sin50°}{\sin100°}\approx\frac{10\cdot0,766}{0,9848}\approx7,778;$$

$$\frac{BC}{\sin30°}=\frac{AB}{\sin100°}\Rightarrow BC=\frac{10\sin30°}{\sin100°}\approx\frac{10\cdot0,5}{0,9848}\approx5,077.$$

შევნიშნოთ, რომ 50° და 100° არგუმენტებისათვის სინუსის მნიშვნელობის დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად გამოვიყენეთ კალკულატორი.

უპასუხე კითხვებს:

1. არის თუ არა სამკუთხედის გვერდები შესაბამისი კუთხეების პროპორციული? შესაბამის კუთხეთა სინუსების პროპორციული?
2. როგორ გამოთვლი სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსს მოცემული გვერდითა და მოპირდაპირე კუთხით?
3. როგორ გამოთვლი მიუვალ ადგილამდე მანძილს სინუსების თეორემის გამოყენებით?
4. საკმარისია თუ არა სამკუთხედის კუთხეებისა და შემოხაზული წრის რადიუსის ცოდნა სამკუთხედის გვერდების საპოვნელად?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის დიამეტრი, თუ:
ა) AB=5 სმ და $\angle C = 30°$; ბ) BC= 8 დმ და $\angle A = 45°$; გ) AC= 6 მ და $\angle B = 60°$.

2 იპოვე ABC სამკუთხედის AB გვერდი თუ შემოხაზული წრის რადიუსია 6 სმ, ხოლო: ა) $\angle C = 30°$; ბ) $\angle C = 45°$; გ) $\angle C = 60°$; დ) $\angle C = 90°$; ე) $\angle C = 120°$.

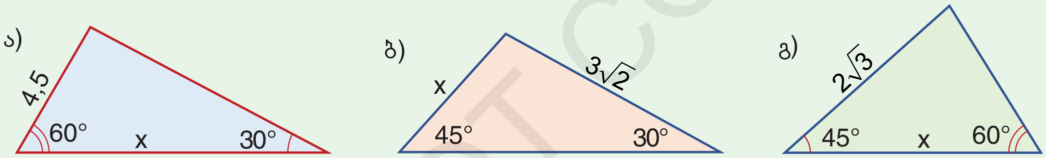
3 გამოთვალე ABC სამკუთხედის A კუთხის სინუსი, თუ შემოხაზული წრის რადიუსი 6 სმ-ის, ხოლო BC გვერდი: ა)12 სმ-ის; ბ) 6 სმ-ის; გ) 5 სმ-ის ტოლია.

4 გამოთვალე A წერტილიდან ხემდე მანძილი პარაგრაფში მოცემული მაგალითის მიხედვით (ნახ.2), თუ α=15°, β=45°, AC=6 მ.

5 იპოვე ABC სამკუთხედის C კუთხის გრადუსული ზომა, თუ შემოხაზული წრის რადიუსი 8 სმ-ის, ხოლო AB გვერდი $8\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია. რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?

6 ABC სამკუთხედში AB=10 სმ, $\angle A = 55°$, $\angle B = 95°$. გამოთვალე შემოხაზული წრის რადიუსი.

7 ნახაზის მიხედვით იპოვე x:



8 მოცემულია a=3 სმ, b=5 სმ, ხოლო $\angle C = 120°$. იპოვე შემოხაზული წრის რადიუსი.

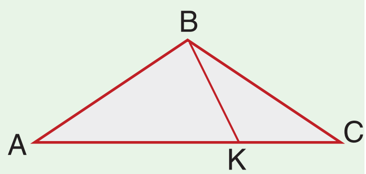
9 მოცემულია a=8 სმ, $\angle B = 40°$, $\angle C = 80°$. იპოვე სამკუთხედის დანარჩენი გვერდები.

10 მოცემულია a=5 სმ, b=6 სმ, c=7 სმ. იპოვე სამკუთხედის კუთხეები.

11 ABC სამკუთხედში AB=2, AC=$2\sqrt{3}$, $\angle B = 60°$. იპოვე მესამე გვერდი და დანარჩენი კუთხეები.

12 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. გამოთვალე იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც გადის მახვილი კუთხეების წვეროებსა და დიდი კათეტის შუა წერტილზე.

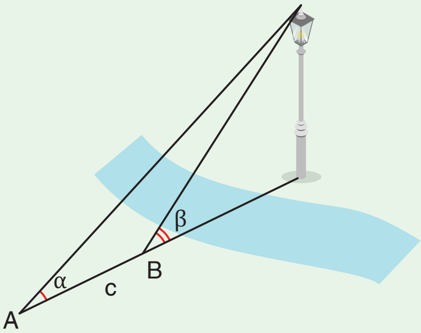
13 ნახაზზე მოცემულ სამკუთხედში AB=BC. დაამტკიცე, რომ ABK და BKC სამკუთხედებზე ტოლი წრეწირები შემოიხაზება.



14 პარალელოგრამის დიაგონალი, რომლის სიგრძე d-ს ტოლია, გვერდებთან α და β კუთხეებს ადგენს. იპოვე პარალელოგრამის გვერდები.

15 გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ მისი გვერდებია: 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ.

16 გამოთვალე მდინარის გაღმა მდგომი ბოძის სიმაღლე, თუ A წერტილიდან ბოძი მოჩანს α კუთხით, B წერტილიდან – β კუთხით, ხოლო A-დან B-მდე მანძილი c მეტრია.

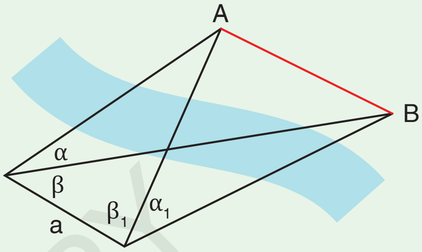


17 გამოთვალე სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ჩახაზული წრის რადიუსია r, შემოხაზული წრის რადიუსი – R, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე – α.

18 მოცემულია მდინარის გაღმა მდებარე A და B წერტილებს შორის მანძილის გამოსათვლელად საჭირო სქემატური ნახაზი და სიდიდეები.

ა) აღწერე ეტაპები, რომლებიც საჭიროა A და B წერტილებს შორის მანძილის გამოსათვლელად;

ბ) შეარჩიე a მონაკვეთისა და α, β, α_1, β_1 კუთხეთა კონკრეტული მნიშვნელობები და ამ მნიშვნელობებისათვის გამოთვალე AB მანძილი.



19 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდია 17 სმ, ხოლო ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე – 8 სმ.

20 გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი გვერდია 17 სმ, ხოლო ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე – 8 სმ.

21 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 9 და 12, ხოლო ამ გვერდებს შორის კუთხე – 30°.

22 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსია 3 სმ, ხოლო სამკუთხედის პერიმეტრი – 16 სმ.

23 გამოთვალე რომბის ფართობი, თუ მისი დიაგონალებია 8 სმ და 13 სმ.

24 ABC სამკუთხედის ფართობია 24 სმ^2. AC გვერდებზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ AM:MC=1:2. გამოთვალე ABM სამკუთხედის ფართობი.

წყვილებში სამუშაო

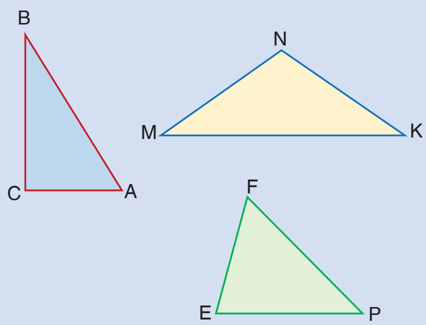
ნახაზზე მოცემულია სამი სამკუთხედი.
თითოეული სამკუთხედის შემთხვევაში:

ა) სახაზავისა და ტრანსპორტირის გამოყენებით დაადგინეთ კუთხეებისა და გვერდების ზომები;

ბ) გამოთვალეთ კუთხეთა სინუსები;

გ) გამოთვალეთ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეთა სინუსებთან შეფარდებები;

დ) გამოიტანეთ დასკვნა.



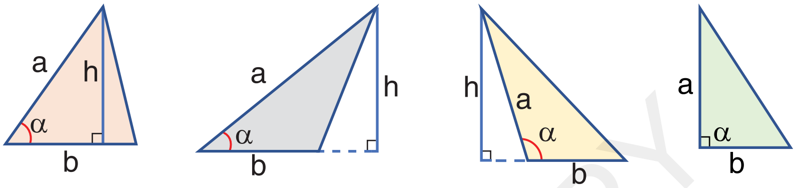
3.12 ფართობის გამოთვლა ტრიგონომეტრიის გამოყენებით

მიზანი

ამოცანების ამოხსნა ფართობის ფორმულების გამოყენებით.

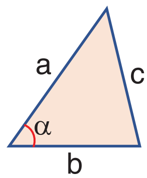
ამოცანა 1. გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი a და b გვერდებითა და ამ გვერდებს შორის მდებარე α კუთხით.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, სამკუთხედის ფართობი გვერდისა და ამ გვერდზე ან მის გაგრძელებაზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია: $S_{\Delta}=\frac{1}{2}bh$.



მეორე მხრივ, მოცემული ნახაზებიდან ჩანს, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის შემთხვევაში $h=a\cdot\sin\alpha$ (ახსენი, რატომ), საიდანაც მივიღებთ ფორმულას:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha. \qquad (1)$$



1-ელი ფორმულიდან სინუსების თეორემის გამოყენებით მიიღება სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა სამი გვერდითა და შემოხაზული წრის რადიუსით. ამისათვის საკმარისია, $\sin\alpha$ გამოვსახოთ $\frac{c}{\sin\alpha}=2R$ ტოლობიდან $\sin\alpha=\frac{c}{2R}$ და ჩავსვათ 1-ელ ფორმულაში. მივიღებთ:

$$S_{\Delta}=\frac{abc}{4R}. \qquad (2)$$

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი მისი მოცემული სამი გვერდით.

ამოხსნა. ვთქვათ, a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო A, B, C ამ გვერდების შესაბამისი კუთხეები. კოსინუსების თეორემის თანახმად

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

ხოლო 1-ელი ფორმულიდან

$$\sin\angle C=\frac{2S}{ab}.$$

თუ ამ ტოლობებს შევიტანთ $\sin^2\angle C+\cos^2\angle C=1$ იგივეობაში, მივიღებთ:

$$\left(\frac{2S}{ab}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=1.$$

ამ ტოლობიდან კვადრატების სხვაობის ფორმულის სამჯერადად გამოყენებით

$$16S^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=$$
$$((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $p=\frac{a+b+c}{2}$. ამ აღნიშვნით გვექნება ტოლობები:

$$a+b+c=2p,\ a+b-c=2(p-c),\ a-b+c=2(p-b),\ c-a+b=2(p-a),$$

რომელთა ზემოთ მიღებულ ტოლობაში ჩასმით და 16-ზე შეკვეცით მიიღება $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, ანუ

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (3)$$

მიღებულ ტოლობას **ჰერონის ფორმულა** ეწოდება.

ჰერონის ფორმულა საშუალებას იძლევა სამი გვერდით გამოვთვალოთ სამკუთხედის სიმაღლეები, ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსები.

ამოცანა 3. სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. გამოვთვალოთ მასში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები.

ამოხსნა. ჩახაზული წრეწირის რადიუსის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფართობის გამოსათვლელი ფორმულით $S=pr$, სადაც $p=(13+14+15):2=21$ და $r=\frac{S}{21}$, ხოლო S გამოვთვალოთ ჰერონის ფორმულით: $S=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=84$. მივიღეთ, რომ $r=4$.

შემოხაზული წრეწირის R რადიუსი მეორე ტოლობიდან გამოვსახოთ: $R=\frac{abc}{4S}$.

თუ მიღებულ ფორმულაში ჩავსვამთ რიცხვით მონაცემებს, მივიღებთ:

$$R=\frac{13\cdot14\cdot15}{4\cdot84}=\frac{65}{8}=8{,}125.$$

პასუხი. r=4 სმ, R=8,125 სმ.

ანალოგიურად შეგვიძლია სამი გვერდით გამოვთვალოთ სამკუთხედის სიმაღლე. მაგალითად, მე-3 ამოცანის მონაცემებით 14 სმ-ის ტოლ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე გამოითვლება $S=\frac{1}{2}ah$ ფორმულაში შესაბამისი რიცხვების ჩასმით:

$$84=\frac{1}{2}\cdot14h\Rightarrow h=12.$$

პასუხი. 12 სმ.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის ფართობს ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით?
2. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის ფართობს სამი გვერდით?
3. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის სამი გვერდით:

ა) ჩახაზული წრეწირის რადიუსს?

ბ) შემოხაზული წრეწირის რადიუსს? გ) სიმაღლეს?

დ) კუთხის სინუსს? ე) კუთხის კოსინუსს? ვ) ბისექტრისას? ზ) მედიანას?

4. გვერდებს შორის რა სიდიდის კუთხის შემთხვევაში იქნება სამკუთხედის ფართობი უდიდესი?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი a და b გვერდებითა და მათ შორის მდებარე α კუთხით, თუ:
ა) $a=3$ სმ, $b=4$ სმ, $\alpha=30°$; ბ) $a=5$ სმ, $b=8$ სმ, $\alpha=45°$; გ) $a=6$ სმ, $b=10$ სმ, $\alpha=60°$;
დ) $a=14$ სმ, $b=7$ სმ, $\alpha=90°$; ე) $a=11$ სმ, $b=8$ სმ, $\alpha=150°$; ვ) $a=16$ სმ, $b=5$ სმ, $\alpha=15°$.

2 გამოთვალე $\sin\alpha$, სადაც α სამკუთხედის a და b გვერდებს შორის კუთხეა, ხოლო S სამკუთხედის ფართობი, თუ:
ა) $a=4$ სმ, $b=5$ სმ, $S=10$ სმ^2; ბ) $a=7$ სმ; $b=9$ სმ; $S=21$ სმ^2;
გ) $a=\sqrt{5}+1$ სმ; $b=\sqrt{5}-1$ სმ; $S=0{,}25$ სმ^2.

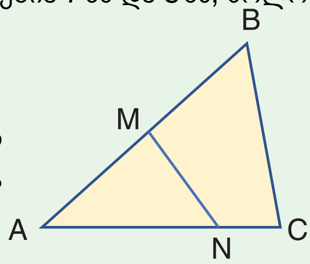
3 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდებია:
ა) 3 სმ, 4 სმ, 5 სმ; ბ) 4 სმ, 5 სმ, 7 სმ;
გ) 26 სმ, 28 სმ, 30 სმ; დ) $3+\sqrt{2}$ სმ, $3-\sqrt{2}$ სმ, 4 სმ.

4 სამკუთხედის გვერდებია:
ა) 8 სმ, 15 სმ, 17 სმ; ბ) 5 სმ, 5 სმ, 6 სმ; გ) 7 სმ, 11 სმ, 12 სმ; დ) 7 სმ, 6 სმ, 5 სმ.
გამოთვალე:
1) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი;
2) ჩახაზული წრის რადიუსი;
3) უდიდეს გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

5 დაამტკიცე პარალელოგრამის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა: $S=ab\cdot\sin\alpha$, სადაც a და b პარალელოგრამის გვერდები, ხოლო α ამ გვერდებს შორის კუთხეა.

6 გამოთვალე რომბის ფართობი, თუ მისი გვერდი 10 სმ, ხოლო გვერდებს შორის კუთხეა:
ა) 30°; ბ) 60°; გ) 120°; დ) 40°.

7 გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი გვერდებია 7 სმ და 8 სმ, ხოლო გვერდებს შორის კუთხე:
ა) 30°; ბ) 45°; გ) 90°; დ) 50°.



8 გამოთვალე სამკუთხედის მესამე გვერდი, თუ ფართობი 8 სმ^2, ერთი გვერდი 4 სმ, მეორე 5 სმ, ხოლო ამ გვერდებს შორის: ა) მახვილი კუთხეა; ბ) ბლაგვი კუთხეა.

9 ABC სამკუთხედის ფართობია 18 სმ^2. AB და AC გვერდებზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $AM=MB$, $AN:NC=2:1$. გამოთვალე AMN სამკუთხედის ფართობი.

10 ABC სამკუთხედის ფართობია 60 სმ^2. AB, AC და BC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M, N და K წერტილები ისე, რომ $AM:MB=1:2$, $AN:NC=2:3$, $BK:KC=1:3$. გამოთვალე MNK სამკუთხედის ფართობი.

11 გამოთვალე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $AB=10$ სმ, $\angle A=45°$, $\angle B=60°$.

12 დაამტკიცე ABC სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$S_\Delta = \frac{AB^2 \cdot \sin\angle A \cdot \sin\angle B}{2\sin(\angle A + \angle B)}.$$

13 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია a და b, ხოლო ამ გვერდებს შორის მოთავსებული მედიანა m.

14 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი 6სმ და 9სმ სიგრძის მედიანები ურთიერთმართობულია.

15 დაამტკიცე, რომ ამოზნექილი ოთხკუთხედის ფართობი დიაგონალებისა და დიაგონალებს შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

16 დაამტკიცე სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$S_\Delta = \frac{2}{3} m_1 m_2 \cdot \sin\alpha,$$

სადაც m_1 და m_2 მედიანები, ხოლო α მედიანებს შორის კუთხეა.

17 გამოთვალე წესიერი ექვსკუთხედის:
ა) შიგა კუთხე; ბ) დიაგონალების რაოდენობა.

18 წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი a-ს ტოლია. იპოვე:
ა) დიდი დიაგონალი;
ბ) მცირე დიაგონალი;
გ) შემოხაზული წრის რადიუსი;
დ) ჩახაზული წრის რადიუსი;
ე) ფართობი.

19 წესიერი n-კუთხედის შიგა კუთხე 170 გრადუსია. იპოვე n.

წყვილებში სამუშაო

1. დაამტკიცეთ წესიერი n-კუთხედის ფართობის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა:

$$S_n = \frac{n}{2} R_n^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n},$$

სადაც R_n წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

2. ისარგებლეთ დამტკიცებული ფორმულით და გამოიყვანეთ ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა შემოხაზული წრის რადიუსით:
ა) ტოლგვერდა სამკუთხედის;
ბ) კვადრატის;
გ) წესიერი ექვსკუთხედის შემთხვევაში.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №6
სინუსების და კოსინუსების თეორემები
შეარჩიე სწორი პასუხი (№1-6):

1 ვთქვათ, სამკუთხედის გვერდებია a, b, c, ხოლო მათი მოპირდაპირე კუთხეები – α, β, γ. ქვემოთ მოცემული ტოლობებიდან რომელია მართებული?

ა) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$; ბ) $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$;

გ) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$; დ) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$.

2 ვთქვათ, სამკუთხედის გვერდებია a, b, c, ხოლო მათი მოპირდაპირე კუთხეები – α, β, γ. ქვემოთ მოცემული ტოლობებიდან რომელია მართებული?

ა) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$; ბ) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

გ) $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$; დ) $\cos\beta = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

3 რომელი სამკუთხედია მახვილკუთხა მოცემული გვერდების მიხედვით?

ა) 5, 12, 13; ბ) 2, 3, 4; გ) 5, 6, 7; დ) 4, 5, 7.

4 გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ გვერდია 5სმ, ხოლო მოპირდაპირე კუთხე – 30°.

ა) 5სმ; ბ) 2,5სმ; გ) 10სმ; დ) 1,25სმ.

5 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 8სმ და 11სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე – 45°.

ა) 44სმ²; ბ) $44\sqrt{3}$ სმ²; გ) 10სმ²; დ) $22\sqrt{2}$ სმ².

6 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდებია 7სმ, 8სმ, 9სმ.

ა) $12\sqrt{5}$ სმ²; ბ) $24\sqrt{3}$ სმ²; გ) 24სმ²; დ) $12\sqrt{2}$ სმ².

ამოხსენი ამოცანა N7-10.

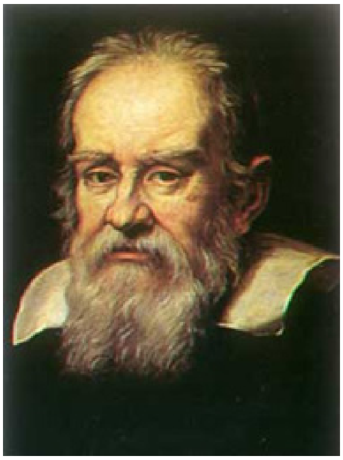
7 გამოთვალე სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 3სმ, 4სმ, 5სმ.

8 გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 5სმ, 6სმ, 7სმ.

9 გამოთვალე სამკუთხედის უდიდესი გვერდის მედიანა, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 2სმ, 3სმ, 4სმ.

10 გამოთვალე სამკუთხედის უმცირესი კუთხის ბისექტრისა, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 5სმ, 6სმ, 9სმ.

თავი 4. სტერეომეტრიის საწყისები



„სამყარო დაწერილია მათემატიკური ენით, ხოლო სიმბოლოები გეომეტრიული ფიგურებია“.

გალილეო გალილეი

1564-1642 წწ.

იტალიელი მეცნიერი, თანამედროვე ფიზიკისა და ასტრონომის ერთ-ერთი ფუძემდებელი

ამ თავში ისწავლი:

❖ სტერეომეტრიის ძირითად ცნებებსა და მათ შორის მიმართებებს;
❖ წრფეთა ურთიერთმდებარეობას სივრცეში;
❖ წრფისა და სიბრტყის პარალელობისა და მართობულობის პირობებს;
❖ პარალელური დაგეგმილების თვისებებს;
❖ სიბრტყეთა პარალელობისა და მართობულობის პირობებს;
❖ ორწახნაგა კუთხეს და კუთხეს გადამკვეთ სიბრტყეთა შორის;
❖ ობიექტებს შორის მანძილს სივრცეში.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

❖ სტერეომეტრიის აქსიომების თეორემათა დასამტკიცებლად გამოყენებას;
❖ პარალელური და ორთოგონალური დაგეგმილების თვისებათა სტერეომეტრიული ნახაზების შედგენაში გამოყენებას;
❖ სივრცეში წრფეთა განლაგების შემთხვევათა დახასიათებას;
❖ სიბრტყის პარალელური, მართობული და დახრილი წრფეების ამოცნობასა და დახასიათებას;
❖ წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვას;
❖ სამი პერპენდიკულარის თეორემის მართი კუთხის ამოსაცნობად გამოყენებას;
❖ პარალელურ, გადამკვეთ და მართობულ სიბრტყეთა ამოცნობასა და დახასიათებას;
❖ ორწახნაგა კუთხის გაზომვას;
❖ ორ გადამკვეთ სიბრტყეს შორის კუთხის დადგენას;
❖ სივრცეში მდებარე ფიგურებს შორის მანძილის გაზომვას;
❖ პრაქტიკულ ამოცანებში სტერეომეტრიის ცნებათა და დებულებათა გამოყენებას.

კომპლექსური დავალება
„სტერეომეტრია არქიტექტურაში“
სამიზნე ცნება/ცნებები. წრფე, სიბრტყე და სივრცე

ჩვენი სამყარო სამგანზომილებიანია. ყველა ის ობიექტი, რომლებიც ჩვენ გარშემოა, სამგანზომილებიანი, ანუ სივრცითი ფიგურაა. მათ შორის სივრცითი ფიგურებია შენობა-ნაგებობები, რომელთა პროექტირება-მშენებლობა სივრცეში დაგეგმარებასა და ოპერირებას გულისხმობს. ეს კი გეომეტრიის, კერძოდ, მისი მნიშვნელოვანი ნაწილის, სტერეომეტრიის საფუძვლიან ცოდნას მოითხოვს, რადგან სწორედ სტერეომეტრია შეისწავლის სივრცით ფიგურებს შორის მიმართებებსა და მათს ზომებს.

იმას, რომ ჩვენი წინაპრები კარგად ფლობდნენ სივრცეში ობიექტთა ჰარმონიულად განლაგებისა და მყარი კონსტრუქციების აგების ხელოვნებას, ნათლად ადასტურებს მათ მიერ შექმნილი არქიტექტურული შედევრები, რომლებიც ასე მრავლადაა შემორჩენილი ჩვენს ქვეყანაში თუ მის ფარგლებს გარეთ.

დიდებული ტაძრებისა და სასახლეების გარდა, სამეურნეო საჭიროებიდან გამომდინარე, უხსოვარი დროიდან აშენებდნენ და დღესაც აშენებენ მარტივი კონსტრუქციის სხვადასხვა დანიშნულების შენობებს: ბოსლებს ცხოველებისთვის, საქათმეებს ფრინველებისთვის და სხვ.

ერთ-ერთი ასეთი მარტივი კონსტრუქციის ფართოდ გავრცელებული ნაგებობაა ქოხი, რომელსაც ბაღ-ვენახებში ავდრის ან შესვენების დროს თავშესაფრად და შრომის იარაღების შესანახად იყენებდნენ და დღესაც იყენებენ.

დავუშვათ, ერთ-ერთმა მუნიციპალიტეტმა გამოაცხადა კონკურსი ბაღ-ვენახის ქოხის პროექტზე. პროექტის მოთხოვნებია:

ა) პროექტი წარმოდგენილი უნდა იყოს მაკეტის სახით;

ბ) პროექტს უნდა დაერთოს შენობის სქემატური ნახაზი, რომელზეც უნდა მიეთითოს:

- შენობისა და მისი შემადგენელი ნაწილების გრძივი ზომები;
- ბრტყელი და ორწახნაგა კუთხეების ზომები;
- პარალელური სიბრტყეები;
- მართობული სიბრტყეები;
- პარალელური, მართობული და აცდენილი წრფეები;
- სიბრტყისადმი მართობული და დახრილი წრფეები.

გ) ცალკე ინტერიერის სქემატური ნახაზი, ავეჯის (მაგიდა, სკამი, საწოლი ან სავარძელი და სხვ.) განლაგებით, მათი ზომებისა და მათ შორის მანძილების მითითებით.

დ) დასაშვები ზომები: ქოხის ფართობი – 15 მ^2-იდან 18 მ^2-მდე, სიმაღლე – არაუმეტეს 2,5 მ;

ე) თანდართული საჭირო მასალის სახეობა, რაოდენობა, ფასები;

ვ) მთლიანი ხარჯთაღრიცხვა.

შენიშვნა: უპირატესობა მიენიჭება მსუბუქი კონტრუქციის, მაგრამ მდგრად და იაფ პროექტებს.

შენი დავალება

1. მიიღე მონაწილეობა გამოცხადებულ კონკურსში და გაითვალისწინე ყველა მისი მოთხოვნა;
2. პროექტი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ შეარჩიე პროექტი;
- რა მასალა გამოიყენე პროექტისთვის, მაკეტისათვის;
- როგორ იზრუნე შენობის მდგრადობისთვის;
- როგორ შეარჩიე საჭირო სამშენებლო მასალა და როგორ დაადგინე მისი რაოდენობა;
- როგორ დაადგინე ხარჯთაღრიცხვა;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად, ნახაზების შესადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად.

4.1 სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები

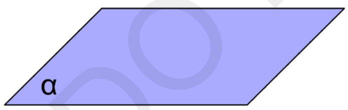
მიზანი

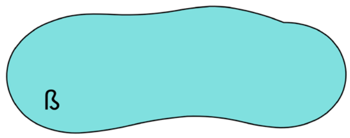
სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებებისა და აქსიომების გაცნობა და მათი შედეგების დასაბუთება

აქამდე ძირითადად ბრტყელ ფიგურებს და მათს თვისებებს განვიხილავდით. ბრტყელი ეწოდება ფიგურას, რომლის ყოველი წერტილი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული. მაგრამ არსებობს ფიგურები, რომელთა ერთ სიბრტყეში მოთავსება შეუძლებელია. ასეთებია, მაგალითად: კუბი, პირამიდა, მართკუთხა პარალელეპიპედი, ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი. ასეთ ფიგურებს არაბრტყელი, ანუ **სივრცითი ფიგურები** ეწოდება. ბრტყელ ფიგურებს და მათს თვისებებს შეისწავლის პლანიმეტრია, არაბრტყელ ფიგურებს და მათს თვისებებს კი – სტერეომეტრია (სტერეომეტრია ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს: სტერეო-სივრცითი, მოცულობითი, მეტრიო-ვზომავ). სიბრტყე სივრცის ნაწილია, ამიტომ ყველა ის განმარტება, თვისება და აღნიშვნა, რაც პლანიმეტრიაში გვქონდა, უცვლელად შეგვიძლია გადმოვიტანოთ სტერეომეტრიაში.

სტერეომეტრიის შესწავლა ხდება იმავე სქემით, რომლითაც შევისწავლეთ პლანიმეტრია შემოგვაქვს: 1. ძირითადი ცნებები (ისინი არ განიმარტება); 2. აქსიომები, დებულებები, რომლებიც მიღებულია ჭეშმარიტ გამონათქვამებად (მათ არ ვამტკიცებთ); 3. გეომეტრიული ცნებები (განიმარტება ძირითად ცნებებზე დაყრდნობით); 4. თეორემები (დებულებები, რომლებსაც ვამტკიცებთ).

სტერეომეტრიის ძირითდი ცნებებია: წერტილი, წრფე და სიბრტყე. სიბრტყეს სივრცეში გამოსახავენ პარალელოგრამის ან მარტივი შეკრული წირის სახით. სიბრტყე აღინიშნება პატარა ბერძნული ასოებით α, β, γ, ...

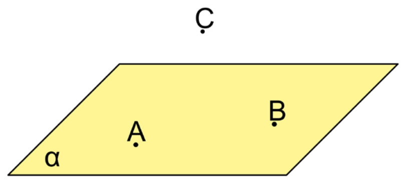




წერტილები აღინიშნება ლათინური დიდი ასოებით A, B, C, ... ; წრფეებს აღნიშნავენ ერთი პატარა ლათინური ან ორი დიდი ასოთი (AB), (BC) ... .

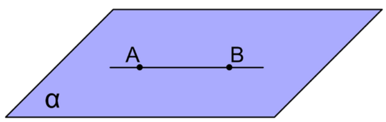
აქსიომა 1. არსებობს სიბრტყე. არსებობს წერტილები, რომლებიც სიბრტყეს ეკუთვნის და წერტილები, რომლებიც სიბრტყეს არ ეკუთვნის.

1-ელ ნახაზზე მოცემული A და B წერტილები სიბრტყეს ეკუთვნის, ხოლო C წერტილი – არა. მათემატიკური სიმბოლოებით ეს ასე ჩაიწერება: $A \in \alpha$; $B \in \alpha$; $C \notin \alpha$; სიბრტყეზე მდებარე და არამდებარე წერტილთა სიმრავლე სივრცეს წარმოადგენს.



ნახ. 1

აქსიომა 2. თუ ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ამ ორ წერტილზე გაივლება ერთადერთი წრფე, რომლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ამავე სიბრტყეს.



ნახ. 2

a წრფის ყოველი წერტილი ეკუთვნის α სიბრტყეს,

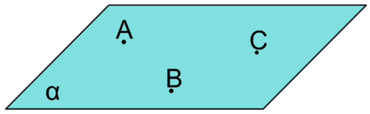
ჩაიწერება ასე: $a \subset \alpha$ და ვამბობთ: „a წრფე მდებარეობს α სიბრტყეში“ ან „α სიბრტყე გადის a წრფეზე“. (ნახ. 2)

$$A \in \alpha \text{ და } B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha.$$

აქსიომა 3. ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

ამ აქსიომიდან გამომდინარე, სიბრტყეს სამი დიდი ლათინური ასოთიც აღნიშნავენ. (ნახ. 3)

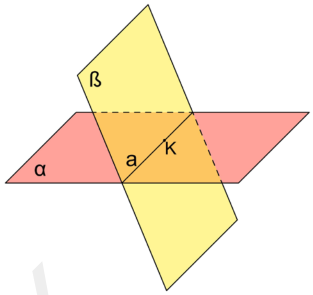
$$\alpha = (ABC).$$



ნახ. 3

აქსიომა 4. თუ ორ α და β სიბრტყეს (ნახ. 4) გააჩნია საერთო K წერტილი, მაშინ ეს სიბრტყეები იკვეთება K წერტილზე გამავალ a წრფეზე. სიმრავლეთა თეორიის ენაზე ეს ასე ჩაიწერება:

$$K \in \alpha \cap \beta \Rightarrow K \in a \text{ და } a = \alpha \cap \beta.$$

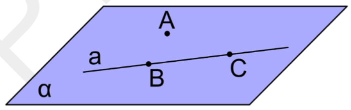


ნახ. 4

მოვიყვანოთ მოცემული აქსიომებიდან გამომდინარე ზოგიერთი შედეგი:

შედეგი 1. წრფესა და მის გარეთ აღებულ წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულია a წრფე და A წერტილი (ნახ. 5). a წრფეზე ავიღოთ ორი წერტილი B და C. A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. მე-3 აქსიომის თანახმად, ამ სამ წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე, ხოლო მე-2 აქსიომის თანახმად, a წრფეც ამ სიბრტყეში იქნება.

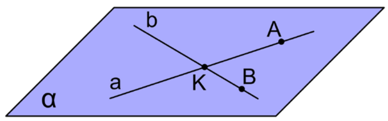


ნახ. 5

შედეგი 2. ორ გადამკვეთ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

ვთქვათ, მოცემულია ორი a და b წრფე. (ნახ. 6).

$a \cap b = K$. ამ წრფეებზე ავიღოთ K-სგან განსხვავებული A და B წერტილები ... (დამოუკიდებლად გააგრძელე დამტკიცება.)



ნახ. 6

შედეგი 3. ორ პარალელურ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე. (ნახ. 7) (გამომდინარეობს უშუალოდ პარალელურ წრფეთა განმარტებიდან.)

ნახ. 7

განმარტება: ორ წრფეს ეწოდება პარალელური, თუ ორივე ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. აღინიშნება a||b.

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b \neq \varnothing \end{array}\right\} \Leftrightarrow a \parallel b.$$

შევაჯამოთ: ერთადერთი სიბრტყე გაივლება:

1. ნებისმიერ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობს;
2. წრფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე;
3. ორ გადამკვეთ წრფეზე;
4. ორ პარალელურ წრფეზე.

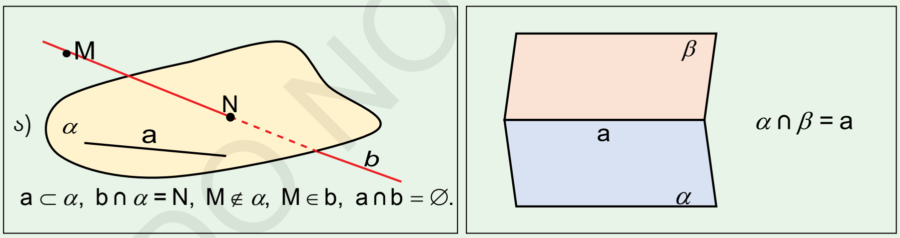
უპასუხე კითხვებს:

1. რომელია სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები?
2. რამდენი წრფე გაივლება ორ წერტილზე?
3. რა მდებარეობა უნდა ჰქონდეს სამ წერტილს, რომ შესაძლებელი იყოს მათზე ერთზე მეტი სიბრტყის გავლება?
4. რამდენი სიბრტყე გაივლება ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე?
5. შეიძლება თუ არა წრფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე სიბრტყის გავლება? დადებითი პასუხის შემთხვევაში ახსენი, რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება?
6. A და B წერტილები ეკუთვნის სიბრტყეს. ამავე სიბრტყეს ეკუთვნის თუ არა მათზე გამავალი წრფის სხვა წერტილები?
7. რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება მოცემულ წრფეზე?
8. რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება მოცემულ წერტილზე?
9. შესაძლებელია თუ არა, რომ ორ სიბრტყეს ჰქონდეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი?

სავარჯიშოები

1 საკლასო ოთახში კედლები წარმოიდგინე, როგორც სიბრტყეები და აჩვენე: ა) გადამკვეთი წრფეები; ბ) გადამკვეთი სიბრტყეები; გ) საერთო წერტილის მქონე სამი წრფე; დ) არაგადამკვეთი წრფეების წყვილი.

2 წაიკითხე ნახაზი:



3 დახაზე და ჩაწერე სიმბოლოებით:

ა) α სიბრტყე და A წერტილი, რომელიც ეკუთვნის α-ს;

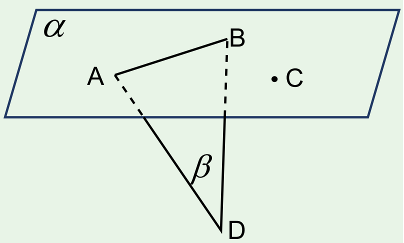
ბ) α სიბრტყე და B წერტილი, რომელიც არ ეკუთვნის α-ს;

გ) β სიბრტყე, რომელიც გადის a წრფეზე;

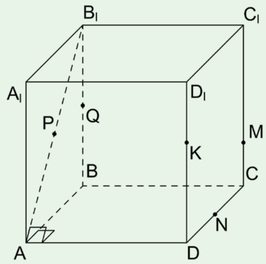
დ) γ სიბრტყე და b წრფე, რომელიც არ ძევს γ სიბრტყეში;

ე) α და β ორი სიბრტყე იკვეთება c წრფეზე.

4 ნახაზის მიხედვით დაადგინე, რა წრფეზე კვეთენ ერთმანეთს A, B, C და A, B, D წერტილებზე გამავალი სიბრტყეები?



5



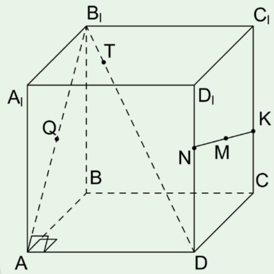
მოცემულია P, Q, K, M, N წერტილები. ჩამოთვლილთაგან რომელი წერტილები ეკუთვნის:

ა) (ABC) სიბრტყეს?

ბ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის BB_1 წიბოს?

გ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის AA_1B_1B წახნაგს?

6



ნახაზის მიხედვით რომელი გამონათქვამებია ჭეშმარიტი?

ა) $T \in (AB_1D)$;   ბ) $NK \subset (DCC_1)$;

გ) $Q \notin (ABC)$;   დ) $M \in (DCC_1)$;

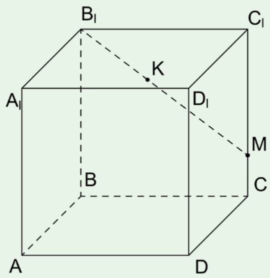
ე) A, D, K წერტილებზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

ვ) A, Q, B_1 წერტილებზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

ზ) AA_1-ზე და CC_1-ზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

თ) $T \in (A_1B_1C_1)$.

7



გაივლება თუ არა ერთადერთი სიბრტყე ნახაზის მიხედვით:

ა) B, D, D_1 წერტილებზე?

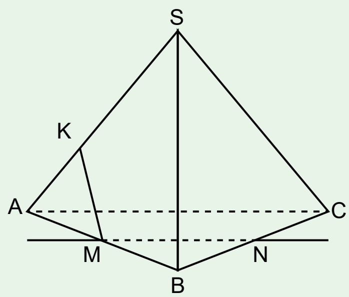
ბ) A_1D და C_1D წრფეებზე?

გ) D, B, B_1 წერტილებზე?

დ) AA_1 წრფესა და K წერტილზე?

ე) B_1, K, M წერტილებზე?

8



ისარგებლე ნახაზით და დაასახელე:

ა) ოთხი წერტილი, რომლებიც ეკუთვნის SAB სიბრტყეს;

ბ) ოთხი წერტილი, რომლებიც ეკუთვნის ABC სიბრტყეს;

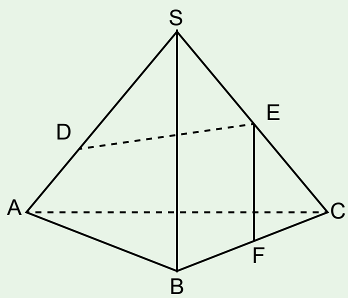
გ) სიბრტყე, რომელშიც ძევს MN წრფე;

დ) სიბრტყე, რომელშიც ძევს KM წრფე;

ე) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება ASC და BSC სიბრტყეები;

ვ) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება ASC და ABC სიბრტყეები.

9



ისარგებლე ნახაზით და დაასახელე:

ა) ორი სიბრტყე, რომლებიც შეიცავს DE წრფეს;

ბ) ორი სიბრტყე, რომლებიც შეიცავს EF წრფეს;

გ) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება DEF და SBC სიბრტყეები;

დ) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება DEF და ACS სიბრტყეები;

ე) ორი სიბრტყე, რომელთაც კვეთს BS წრფე;

ვ) ორი სიბრტყე, რომელთაც კვეთს AC წრფე.

10 შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელი გამონათქვამებია ჭეშმარიტი?

ა) თუ წრეწირის ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ წრეწირის ყველა წერტილი ეკუთვნის ამავე სიბრტყეს;

ბ) თუ წრეწირის სამი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ წრეწირის ყველა წერტილი ეკუთვნის ამავე სიბრტყეს;

გ) თუ სამკუთხედის ორი წვერო და ჩახაზული წრის ცენტრი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ სამკუთხედის მესამე წვეროც ეკუთვნის ამავე სიბრტყეს;

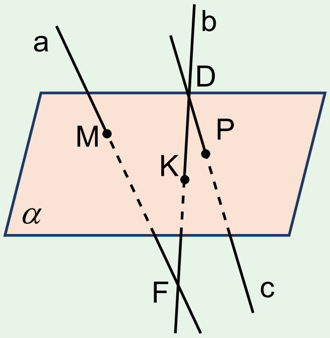
დ) თუ სამკუთხედის ორი წვერო და შემოხაზული წრის ცენტრი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ სამკუთხედის მესამე წვეროც ეკუთვნის ამავე სიბრტყეს;

11 თავახდილი როიალის სახურავს ერთი საყრდენი ჯოხი აქვს შედგმული. სიბრტყის რა თვისების გამო ჩერდება სახურავი უძრავად?

12 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. M წერტილი აღებულია C_1C წიბოზე. $C_1M=CM$. ააგე B_1M და BC წრფის გადაკვეთის წერტილი. იპოვე მიღებულ წერტილსა და A წვეროს შორის მანძილი, თუ კუბის წიბო a სმ-ია.

13 მოცემულია კუბი. M წერტილი აღებულია C_1C წიბოზე ისე, რომ $C_1M:MC=2:3$. $(B_1M)\cap(ABC)=N$. იპოვე AN მონაკვეთის სიგრძე, თუ კუბის წიბოს სიგრძეა a სმ.

14 a, b და c წრფეები α სიბრტყეს M, K და P წერტილებში კვეთენ. a და b წრფეები F წერტილში, ხოლო b და c წრფეები D წერტილში იკვეთება. ნახაზის მიხედვით გაარკვიე, ძევს თუ არა a, b და c წრფეები ერთ სიბრტყეში?



15 დაამტკიცე, რომ ყველა წრფე, რომლებიც მოცემულ ორ გადამკვეთ წრფეს კვეთს და არ გადის მათი კვეთის წერტილზე, ერთსა და იმავე სიბრტყეში ძევს.

შესაძლებელია თუ არა?

პარალელოგრამის ორი წვერო და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი ეკუთვნოდეს რაიმე სიბრტყეს, რომელსაც არ ეკუთვნის პარალელოგრამის დანარჩენი ორი წვერო?

4.2 წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა

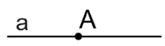
მიზანი — **წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევების ანალიზი**

როგორ შეიძლება განლაგდნენ სივრცეში ერთმანეთის მიმართ წერტილი, წრფე და სიბრტყე? განვიხილოთ ყველა შემთხვევა:

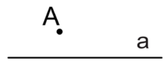
1. წერტილი და წრფე

ა) წერტილი მდებარეობს წრფეზე: $A \in a$ (ნახ. 1ა);

ბ) წერტილი არ მდებარეობს წრფეზე: $A \notin a$ (ნახ. 1ბ).



ნახ. 1ა

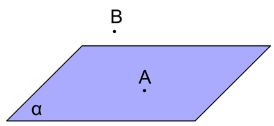


ნახ. 1ბ

2. წერტილი და სიბრტყე

ა) წერტილი მდებარეობს სიბრტყეზე: $A \in \alpha$ (ნახ. 2);

ბ) წერტილი არ მდებარეობს სიბრტყეზე (ან წერტილი მდებარეობს სიბრტყის გარეთ): $B \notin \alpha$ (ნახ. 2).



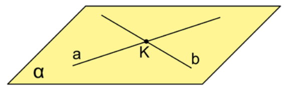
ნახ. 2

3. წრფე და წრფე

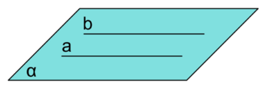
ა) წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში: $a \cap b = K$. ასეთ წრფეებს ურთიერთმკვეთი წრფეები ეწოდება (ნახ. 3ა);

ბ) წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. $a \cap b = \varnothing$. $a \subset \alpha$; $b \subset \alpha$ ასეთ წრფეებს პარალელური წრფეები ეწოდება და ასე ჩაიწერება: $a \parallel b$ (ნახ. 3ბ);

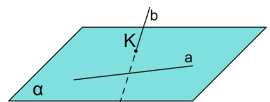
გ) წრფეები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. ასეთ წრფეებს აცდენილი წრფეები ეწოდება. აცდენილი წრფეები აღინიშნება „$\dot{-}$" სიმბოლოთი. $a \dot{-} b$ ჩანაწერი ნიშნავს, რომ a და b აცდენილი წრფეებია (ნახ. 3გ).



ნახ. 3ა



ნახ. 3ბ

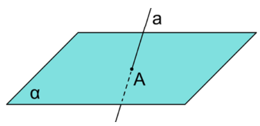


ნახ. 3გ

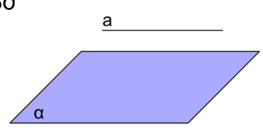
4. წრფე და სიბრტყე

ა) a წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში. $a \cap \alpha = A$. a წრფეს ეწოდება α სიბრტყის მკვეთი წრფე (ნახ. 4ა);

ბ) a წრფესა და α სიბრტყეს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. $a \cap b = \varnothing$. ამ შემთხვევაში წრფესა და სიბრტყეს ურთიერთპარალელური ეწოდება. აღინიშნება: $a \parallel \alpha$ (ნახ. 4ბ).



ნახ. 4ა

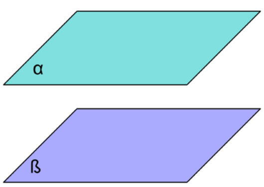


ნახ. 4ბ

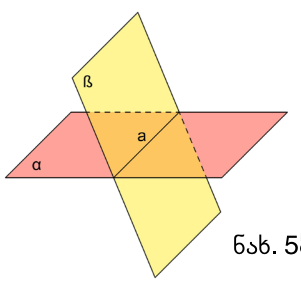
5. სიბრტყე და სიბრტყე

ა) სიბრტყეებს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. $\alpha \cap \beta = \varnothing$. ასეთ სიბრტყეებს პარალელური სიბრტყეები ეწოდება. აღინიშნება: $\alpha \parallel \beta$ (ნახ. 5ა);

ბ) მკვეთი სიბრტყეები. (აქსიომის თანახმად, იკვეთებიან წრფეზე). $\alpha \cap \beta = a$ (ნახ. 5ბ).



ნახ. 5ა



ნახ. 5ბ

განვიხილოთ წრფეთა ურთიერთმდებარეობის შემთხვევები. რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ წრფეს?

როცა წრფეები ემთხვევა, მაშინ საერთო წერტილთა რაოდენობა უსასრულოა. ამ შემთხვევაში, ფაქტობრივად, გვაქვს ერთი წრფე.

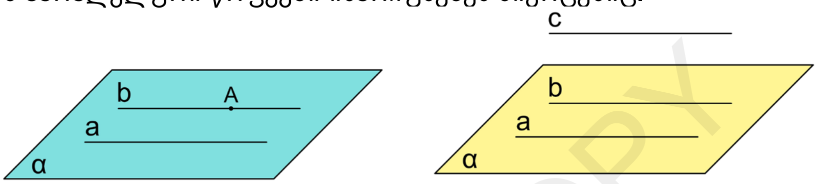
თუ ორ წრფეს აქვს ერთი საერთო წერტილი, მათ მკვეთი წრფეები ვუწოდეთ. მათ სხვა გადამკვეთი წერტილი ვერ ექნებათ, რადგან ორ განსხვავებულ წერტილზე გაივლება მხოლოდ ერთი წრფე.

გავიხსენოთ პარალელურ წრფეთა თვისებები:

ა) წრფის გარეთ აღებულ წერტილზე შეიძლება მოცემული წრფის ერთადერთი პარალელური წრფის გავლება;

ბ) თუ ორი წრფიდან თითოეული მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.

ამ თვისებებს პარალელური წრფეები ინარჩუნებენ სივრცეშიც.

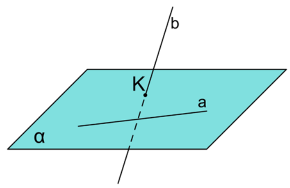


რაც შეეხება აცდენილ წრფეებს, ისინი ერთმანეთის პარალელური ვერ იქნება, რადგან ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ.

გავეცნოთ აცდენილ წრფეთა ნიშანს (დამტკიცების გარეშე).

თეორემა. თუ b წრფე კვეთს α სიბრტყეს K წერტილში, რომელიც α სიბრტყეში მდებარე a წრფეზე არ მდებარეობს, მაშინ a და b აცდენილი წრფეებია.

$$\left.\begin{array}{l} b \cap \alpha = K \\ a \subset \alpha \\ K \notin a \end{array}\right\} \Rightarrow a \dot{-} b$$

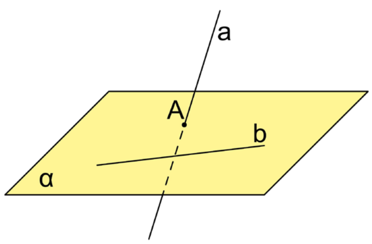


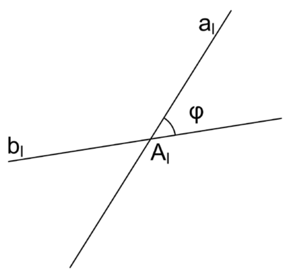
დამტკიცება. დავუშვათ a და b წრფეები არაა აცდენილი. მაშინ ამ წრფეებზე გაივლება სიბრტყე. ეს სიბრტყე a და b წრფესთან ერთად შეიცავს K წერტილს. მაგრამ a წრფის და K წერტილის შემცველი ერთადერთი სიბრტყეა α. გამოდის, რომ b წრფე α სიბრტყეში მდებარეობს, რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

როგორც პლანიმეტრიიდანაა ცნობილი, ორ გადამკვეთ წრფეს შორის კუთხე გადაკვეთისას მიღებულ კუთხეებს შორის უმცირესს ეწოდება. თუ წრფეები ემთხვევა ან პარალელურია, მათ შორის კუთხე 0^o-ის ტოლადაა მიღებული. წრფეებს შორის კუთხე φ-ასოთი აღვნიშნოთ. თუ $\varphi=90^o$, ასეთ წრფეებს მართობული წრფეები ეწოდება და ვწერთ: $a \perp b$.

განმარტება. ორ აცდენილ წრფეს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების პარალელურ ურთიერთგადამკვეთ წრფეებს შორის კუთხეს.

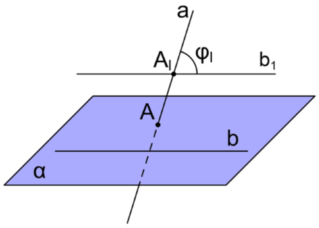
$a_1 \cap b_1 = A_1$
$a_1 \parallel a$
$b_1 \parallel b$



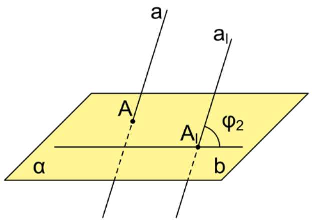


შესაძლებელია და მოსახერხებელი იქნება, თუ A_1 წერტილს ავიღებთ a წრფეზე (ნახ. 1ა) ან b წრფეზე (ნახ. 1ბ)

$\varphi_1=\varphi_2=\varphi$



ნახ. 1ა



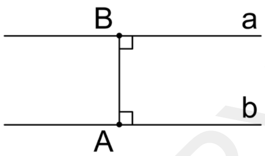
ნახ. 1ბ

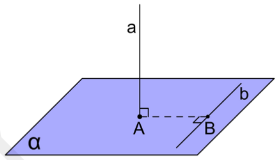
თუ a_1 და b_1 წრფეებს შორის კუთხე 90^o-ია, ე.ი. $a_1 \perp b_1$, მაშინ a და b წრფეებს შორის კუთხეც 90^o-ია და $a \perp b$. ასეთ წრფეებს აცდენილი მართობული წრფეები ეწოდება.

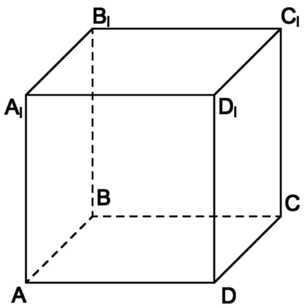
აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე 0^o ვერ იქნება. (ახსენი, რატომ?) ასე რომ: $0^o<\varphi\leq 90^o$.

ორ პარალელურ ან ორ აცდენილ წრფეს შორის მანძილი ეწოდება მათი საერთო მართობის სიგრძეს.

ნახაზზე a და b წრფეებს შორის მანძილი AB მონაკვეთის სიგრძეა.



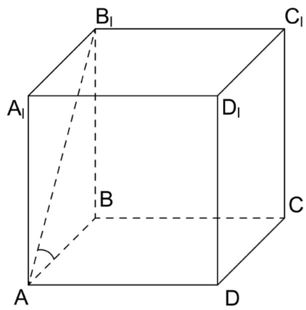




კუბში AA_1 და C_1D_1 აცდენილი წრფეებია. მათი საერთო მართობია A_1D_1 წიბო. ამიტომ, AA_1 და C_1D_1 წრფეებს შორის მანძილია A_1D_1 წიბოს სიგრძე.

ამოცანა 1. მოცემულია კუბი. ვიპოვოთ AB_1 და CD აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე.

ამოხსნა. $AB \parallel CD$ (ახსენი, რატომ?) განმარტების თანახმად, საძებნი კუთხე ტოლი იქნება $\angle B_1AB$-სი. ეს კი 45^o-ის ტოლია. (ახსენი, რატომ?)



უპასუხე კითხვებს:

1. რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ წრფეს?
2. შეიძლება, რომ ორ წრფეს ჰქონდეს მხოლოდ ორი საერთო წერტილი?
3. რა შემთხვევაში ეწოდება წრფეს სიბრტყის პარალელური?
4. რომელია მართებული გამონათქვამი? თუ ორ წრფეს საერთო წერტილი არ გააჩნია, მაშინ ისინი: ა) პარალელურია; ბ) აცდენილია; გ) ან პარალელურია ან აცდენილი.
5. როგორ წრფეებს ეწოდება პარალელური?
6. როგორ წრფეებს ეწოდება აცდენილი?
7. რაში მდგომარეობს აცდენილ წრფეთა ნიშანი?
8. რას ეწოდება წრფეებს შორის კუთხე?
9. რას ეწოდება მართობული წრფეები?
10. რას ეწოდება აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე? მანძილი?

სავარჯიშოები

1 რამდენი სიბრტყე გაივლება ორ წერტილზე?

ა) ორი; ბ) უამრავი; გ) არცერთი; დ) ერთი.

2 თუ a და b აცდენილი წრფეებია. მაშინ ისინი:

ა) ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ; ბ) იკვეთებიან;

გ) ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ; დ) პარალელურია.

3 თუ a და b წრფე იკვეთება, მაშინ:

ა) a და b წრფეზე არ გაივლება სიბრტყე;

ბ) a და b წრფეზე გაივლება ორი სიბრტყე;

გ) a და b წრფეზე გაივლება უამრავი სიბრტყე;

დ) a და b წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

4 თუ $A \in \alpha$ და $B \in \alpha$, მაშინ:

ა) AB წრფე კვეთს α სიბრტყეს;

ბ) AB ძევს α სიბრტყეზე;

გ) AB წრფე α სიბრტყის პარალელურია;

დ) AB წრფეზე არ გაივლება სიბრტყე.

5 საკლასო ოთახში მონახე აცდენილ წრფეთა წყვილები და მიუთითე მათ შორის მანძილი.

6 ქვემოთ მოცემული გამონათქვამებიდან რომელია ჭეშმარიტი? მცდარი გამონათქვამის შემთხვევაში მოიყვანე კონტრმაგალითი.

ა) $\begin{cases} a \parallel b \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel c$; ბ) $\begin{cases} a \dot{-} b \\ b \dot{-} c \end{cases} \Rightarrow a \dot{-} c$; გ) $\begin{cases} a \dot{-} b \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \dot{-} c$.

7 ორი წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით. რამდენი სიბრტყე გაივლება ამ სამ წრფეზე? განიხილე ორი განსხვავებული შემთხვევა.

8 ქვემოთ მოცემული ორი გამონათქვამიდან რომელია ჭეშმარიტი?

ა) თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ეს წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე არცერთ წრფესთან არ იკვეთება;

ბ) თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ეს წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის პარალელურია.

9 მოცემულია კუბი. იპოვე კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

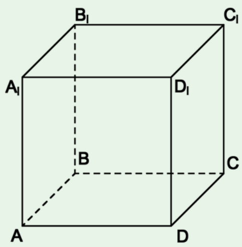
ა) AB და BC;

ბ) AB და CD;

გ) AB და A_1B_1;

დ) AB და CC_1;

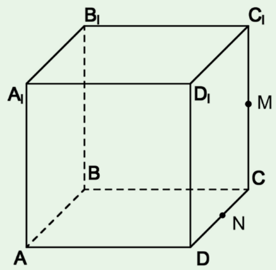
ე) AB_1 და C_1C.



10 მოცემულია კუბი.

ა) იპოვე კუთხე MN წრფესა და AB წრფეს შორის. M და N, შესაბამისად, CC_1 და CD წიბოების შუაწერტილებია.

ბ) იპოვე MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ კუბის წიბოა a სმ.



11 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის A_1, C_1 და D წვეროებზე გავლებულია α სიბრტყე. შეასრულე შესაბამისი ნახაზი და მიუთითე შემდეგი ფიგურები:

ა) $\alpha \cap (DCC_1)$;

ბ) $\alpha \cap (A_1B_1C_1)$;

გ) $\alpha \cap (AA_1D_1)$;

დ) $\alpha \cap$კუბთან.

იპოვე α სიბრტყის კუბთან თანაკვეთით მიღებული ფიგურის პერიმეტრი და ფართობი, თუ კუბის წიბოა a სმ.

12 სკიდან სამი ფუტკარი ამოფრინდა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ 10 წუთის შემდეგ სამივე ფუტკარი ერთ სიბრტყეში იქნება?

13 გარკვიე, ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი: „თუ AB და CD აცდენილი წრფეებია, მაშინ აცდენილია AC და BD წრფეებიც“.

14 მოცემული ოთხი წერტილიდან ყოველ ორზე გავლებულია წრფე. აცდენილ წრფეთა რამდენი წყვილია მიღებული, თუ ცნობილია, რომ მოცემული წერტილები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ.

15 დახაზე a წრფე და მის გარეთ A წერტილი. ააგე A წერტილზე გამავალი წრფე, რომელიც a წრფესთან ადგენს: ა) მართ კუთხეს; ბ) 60°-იან კუთხეს; გ) 45°-იან კუთხეს.

შესაძლებელია თუ არა?

ორი აცდენილი წრფიდან თითოეული მესამე წრფის პარალელური იყოს?

აბა, სცადე!

სიბრტყეზე მოცემულია წრეწირი. მასზე მონიშნულია რამდენიმე წერტილი. სიბრტყის გარეთ აღებული წერტილიდან მონიშნულ წერტილებზე გავლებულია სხივები. ყოველ ორ სხივზე გავლებულია სიბრტყე. სიბრტყეთა რაოდენობა აღმოჩნდა 45. იპოვეთ მონიშნულ წერტილთა რაოდენობა.

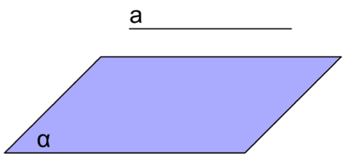
4.3 წრფისა და სიბრტყის პარალელობა

მიზანი

წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშნების დადგენა

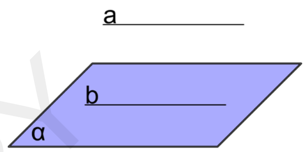
წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის ერთ-ერთი შემთხვევაა, როცა წრფესა და სიბრტყეს საერთო წერტილი არ აქვთ.

განმარტება. წრფესა და სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ მათ საერთო წერტილი არ გააჩნიათ.



a წრფისა და α სიბრტყის პარალელობას $a \parallel \alpha$ ან $\alpha \parallel a$ ჩანაწერით აღნიშნავენ: $a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a \parallel \alpha$.

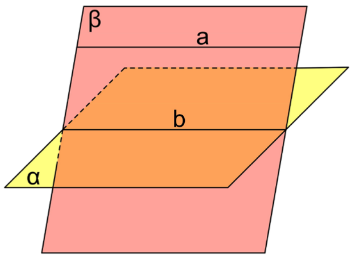
თეორემა 1. (წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშანი)



თუ α სიბრტყეზე არამდებარე a წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე რომელიმე b წრფის პარალელურია, მაშინ a წრფე α სიბრტყის პარალელურია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, a წრფე კვეთს α-ს რაიმე A წერტილში. A წერტილი ვერ იქნება b წრფეზე, რადგან $a \parallel b$ ($a \cap b = \varnothing$). გამოდის, რომ a და b წრფეები აცდენილი წრფეებია (აცდენილი წრფეების ნიშნის თანახმად). ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $a \parallel b$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ β სიბრტყე გადის α სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე და კვეთს α სიბრტყეს b წრფეზე, მაშინ a და b წრფეები პარალელურია.



დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, a წრფე კვეთს b წრფეს რაიმე A წერტილში, $a \cap b = A$. რადგან $A \in b$, b კი მდებარეობს α სიბრტყეში, გამოდის, რომ $A \in \alpha$; მივიღეთ $A \in a$ და $A \in \alpha$, ე.ი. a წრფეს და α სიბრტყეს აქვთ საერთო წერტილი, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს **შედეგი** (დაამტკიცე დამოუკიდებლად):

თუ ორი პარალელური წრფიდან თითოეულზე გავლებულია სიბრტყე ისე, რომ ეს სიბრტყეები იკვეთება, მაშინ გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფეების პარალელურია.

$$\begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = c \\ a \parallel b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$$

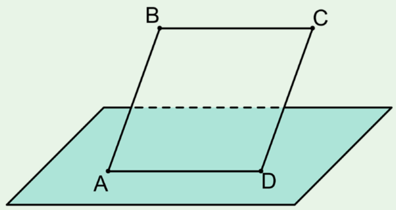
უპასუხე კითხვებს:

1. როდის ეწოდება წრფეს და სიბრტყეს პარალელური?
2. რაში მდგომარეობს წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშანი?
3. როგორ მოძებნი სიბრტყის პარალელური წრფის ამავე სიბრტყეზე მდებარე პარალელურ წრფეს? რამდენი ასეთი წრფე არსებობს?
4. თუ ორი წრფე ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ეს წრფეები იქნება თუ არა ურთიერთპარალელური?

სავარჯიშოები

1 დახაზე α სიბრტყე და მისი პარალელური a წრფე. α სიბრტყეზე დახაზე ერთი a-ს პარალელური და ერთი a-სთან აცდენილი წრფე.

2 α სიბრტყე გადის $ABCD$ მართკუთხედის AD გვერდზე და $B \notin \alpha$. დაამტკიცე, რომ $BC \parallel \alpha$ (ნახ.1).



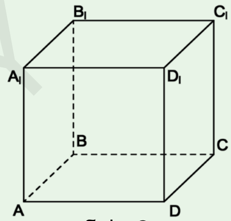
ნახ. 1

3 α სიბრტყე გადის ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. $C \notin \alpha$. შეიძლება თუ არა AC და BC გვერდების შუაწერტილებზე გამავალმა წრფემ α სიბრტყე გადაკვეთოს?

4 α სიბრტყე გადის ABC სამკუთხედის AC და BC გვერდების M და N შუაწერტილებზე.
ა) დაამტკიცე, რომ $AB \parallel \alpha$; ბ) იპოვე AB, თუ $MN=4$ სმ.

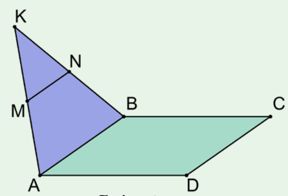
5 მე-2 ნახაზის მიხედვით ქვემოთ მოცემული რომელი გამონათქვამია მცდარი?

ა) $AB \parallel (CDC_1)$; ბ) $AB \parallel (A_1B_1C_1)$;
გ) $AB \parallel (ABB_1)$; დ) $(ABC) \parallel B_1C_1$;
ე) $(ABC) \parallel A_1B_1$



ნახ. 2

6 მე-3 ნახაზზე მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი და ABK სამკუთხედი. $K \notin (ABC)$. M და N წერტილები BK და AK გვერდების შუაწერტილებია.
ა) დაამტკიცე, რომ $MN \parallel (ABC)$;
ბ) იპოვე MN, თუ $CD=10$სმ.

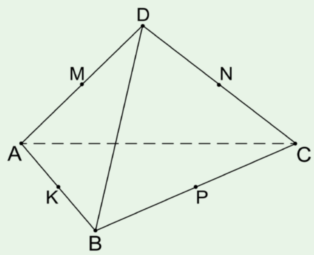


ნახ. 3

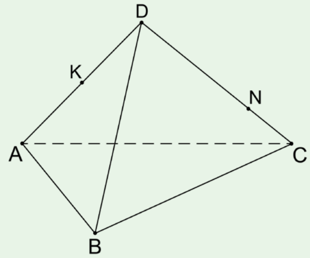
7 α სიბრტყე გადის $ABCD$ ოთხკუთხედის AD გვერდზე. $B \notin \alpha$. $\angle BCA = \angle DAC$. დაამტკიცე, რომ $BC \parallel \alpha$.

8 პარაგრაფის 1-ელ და მე-2 თეორემებზე დაყრდნობით ჩამოაყალიბე წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

9 მოცემულია პირამიდა. M, N , K და P წერტილები შესაბამისად, AD, DC, AB და BC წიბოების შუა წერტილებია.
ა) დაამტკიცე, რომ $MN \parallel AC$;
ბ) დაამტკიცე, რომ ამ წერტილების შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია;
გ) გამოთვალე პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ $AC=12$სმ და $DB=8$სმ.



10 სამკუთხა პირამიდაში ყველა წიბო a სმ-ის ტოლია, $DN:NC=3:1$, $KD=AK$, $DN>NC$.
ა) გადაკვეთს თუ არა KN წრფე ABC სიბრტყეს?
ბ) ააგე გადაკვეთის წერტილი $KN \cap (ABC)$;
გ) იპოვე მანძილი ამ გადაკვეთის წერტილიდან A წვერომდე;
დ) იპოვე მანძილი გადაკვეთის წერტილიდან AB წიბოს შუაწერტილამდე.



ტესტი თვითშემოწმებისათვის №7.

1

ქვემოთ მოცემული რომელი დებულებაა მცდარი?

ა) ორ პარალელურ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

ბ) წრფესა და მასზე არამდებარე წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

გ) წრფესა და მასზე მდებარე წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

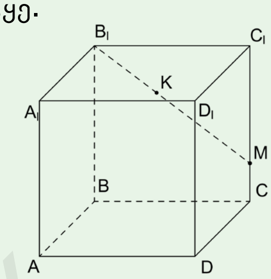
დ) ორ გადამკვეთ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

2

რომელ სიბრტყეს ეკუთვნის K წერტილი?

ა) ($A_1B_1C_1$); ბ) (D_1DC);

გ) (B_1BC); დ) (A_1AD).



3

რამდენი სიბრტყე გაივლება ორ განსხვავებულ წრფეზე?

ა) არ გაივლება; ბ) უამრავი;

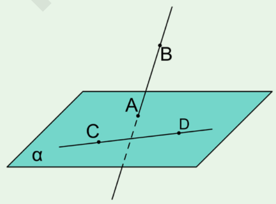
გ) მხოლოდ ერთი; დ) ერთი ან არცერთი.

4

ნახაზზე მოცემულია წერტილებისა და წრფეების განლაგება სივრცეში. ეს განლაგება ჩაწერილია მათემატიკური სიმბოლოებით. რომელი ჩანაწერია არასწორი?

ა) $A\in\alpha$; გ) $CD\subset\alpha$;

ბ) $AB\cap CD=\varnothing$; დ) $D\notin\alpha$.



5

მოცემულია სამი წერტილი: A, B, C. AB=3სმ, BC=4სმ, AC=7სმ. რამდენი სიბრტყე გაივლება ამ სამ წერტილზე?

ა) ერთი; ბ) უამრავი; გ) არცერთი; დ) შეუძლებელია დადგენა.

6

კუბში AA_1 წიბოს აცდენილ წიბოთა რაოდენობა რამდენით მეტია მის პარალელურ წიბოთა რაოდენობაზე?

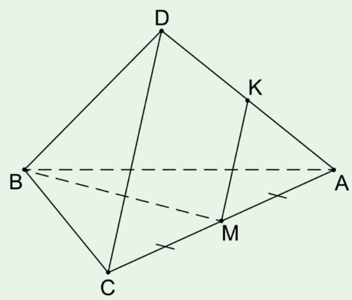
ა) 1-ით; ბ) 2-ით; გ) 3-ით; დ) 4-ით.

7

მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. გაავლე სიბრტყე BB_1 და DD_1 წიბოებზე. იპოვე კვეთაში მიღებული ფიგურის პერიმეტრი, თუ კუბის წიბოა a.

8

მოცემულ პირამიდაში K და M წერტილები წიბოების შუაწერტილებია. ააგე BM-ზე და MK-ზე გამავალი კვეთა და იპოვე მიღებული კვეთის პერიმეტრი, თუ ყველა წიბოს სიგრძეა a სმ.



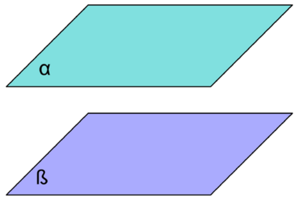
4.4 სიბრტყეების პარალელურობა

მიზანი

პარალელურ სიბრტყეთა ნიშნებისა და თვისებების გაცნობა

როგორც 2.1 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, გვაქვს სიბრტყეების ურთიერთმდებარეობის სამი შემთხვევა:

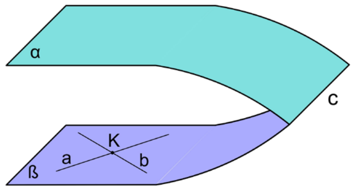
1. სიბრტყეები ერთმანეთს ემთხვევა (ფაქტობრივად, გვაქვს ერთი სიბრტყე);
2. სიბრტყეებს საერთო წერტილი არ გააჩნია;
3. სიბრტყეები იკვეთება.



განმარტება. ორ სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ მათ საერთო წერტილი არ გააჩნია. $\alpha \cap \beta = \varnothing . \Leftrightarrow \alpha \| \beta$.

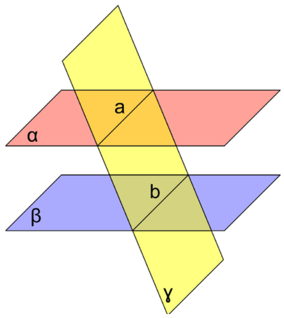
თეორემა 1. (ორი სიბრტყის პარალელობის ნიშანი): თუ ერთი სიბრტყე მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

დამტკიცება. მოცემულია α და β სიბრტყეები. a და b სიბრტყეში მდებარე გადამკვეთი წრფეებია: $a \cap b = K$, ამასთან, $\alpha \| a$ და $\alpha \| b$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\alpha \| \beta$.



დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ α და β არ არის პარალელური და ერთმანეთს კვეთს რაიმე c წრფეზე. წინა პარაგრაფის მე-2 თეორემის თანახმად, რადგან β გადის α-ს პარალელურ a წრფეზე, გადაკვეთის c წრფე a წრფის პარალელურია. ანალოგიურად, $c \| b$. გამოდის, რომ K წერტილზე გაუვლია c-სადმი ორ პარალელურ წრფეს, a-ს და b-ს, რაც ეწინააღმდეგება პარალელობის აქსიომას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთისას მიღებული წრფეები პარალელურია.

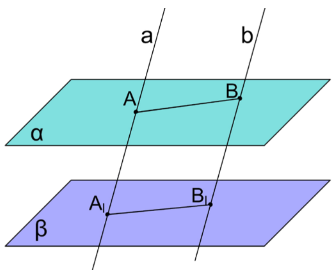


დამტკიცება. მოცემულია: $\alpha \| \beta$. $\gamma \cap \alpha = a$; $\gamma \cap \beta = b$.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $a \| b$;

a და b წრფეები γ სიბრტყეშია. მათ რომ ერთმანეთი გადაეკვეთათ რაიმე K წერტილში, ეს K წერტილი ერთდროულად აღმოჩნდებოდა როგორც α, ისე β სიბრტყეში, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $\alpha \| \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთები ტოლია.



მოცემულია: $\alpha \| \beta$; $a \| b$; გადაკვეთის წერტილები A, B, A_1, B_1;

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $AA_1 = BB_1$;

დამტკიცება. $a \| b$ გავავლოთ მათზე სიბრტყე. ეს სიბრტყე α და β სიბრტყეებს გადაკვეთს AB და A_1B_1 წრფეებზე.

თეორემა 2-ის თანახმად $AB \| A_1B_1$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a \| b$, მაშინ AA_1B_1B მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, ამიტომ $AA_1 = BB_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

მართებულია სიბრტყეთა კიდევ ორი თვისება:

- სიბრტყის გარეთ აღებულ წერტილზე გაივლება მოცემული სიბრტყის პარალელური ერთადერთი სიბრტყე.
- თუ მოცემული ორი სიბრტყიდან თითოეული მესამე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მოცემული ორი სიბრტყე პარალელურია.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა შემთხვევაში ეწოდება ორ სიბრტყეს პარალელური?
2. რაში მდგომარეობს სიბრტყეების პარალელობის ნიშანი?
3. თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, რა შეიძლება ითქვას გადაკვეთისას მიღებული წრფეების შესახებ?
4. პარალელური სიბრტყეები გადაკვეთილია პარალელური წრფეებით. ტოლია თუ არა ამ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ პარალელურ წრფეთა მონაკვეთები?
5. მართებულია თუ არა ჩანაწერი: „$\alpha \parallel \beta$ და $\beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$“?
6. რამდენ ნაწილად დაიყოფა სივრცე სამი პარალელური სიბრტყით?

სავარჯიშოები

1 α სიბრტყე გადის β სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე. რა შეიძლება ითქვას α და β სიბრტყეთა შესახებ?
ა) α აუცილებლად კვეთს β-ს; ბ) $\alpha \parallel \beta$;
გ) α არ შეიძლება იყოს β-ს პარალელური;
დ) α შეიძლება კვეთდეს β-ს.

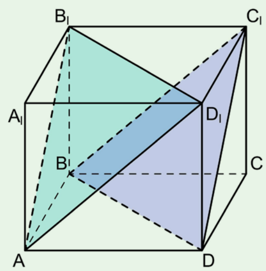
2 სიბრტყის გარეთ აღებულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის რამდენი პარალელური სიბრტყე გაივლება?
ა) ერთადერთი; ბ) არცერთი; გ) ორი; დ) უამრავი.

3 სიბრტყის პარალელურ წრფეზე გაივლება მოცემული სიბრტყის პარალელური:
ა) უამრავი სიბრტყე; ბ) არ გაივლება სიბრტყე;
გ) მხოლოდ ერთი სიბრტყე; დ) ორი სიბრტყე.

4 გაარკვიე, ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი: „თუ ორი სიბრტყე პარალელურია, მაშინ ერთ-ერთ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფე მეორე სიბრტყის პარალელურია“. (პასუხი დაასაბუთე.)

5 პარალელურ წახნაგთა რამდენი წყვილი აქვს კუბს?
ა) ერთი; ბ) ორი; გ) სამი; დ) ოთხი.

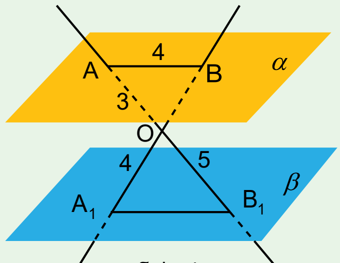
6 დაამტკიცე, რომ კუბის მოპირდაპირე წახნაგების გადამკვეთი სიბრტყე წახნაგებიდან მოკვეთს პარალელურ მონაკვეთებს.



7 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. დაამტკიცე, რომ AB_1 და DC_1 დიაგონალები პარალელურია.

8 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. დაამტკიცე, რომ $(AB_1D_1) \parallel (BDC_1)$. იპოვე AB_1D_1 და C_1BD სამკუთხედების ფართობები, თუ წიბოს სიგრძეა 6სმ.

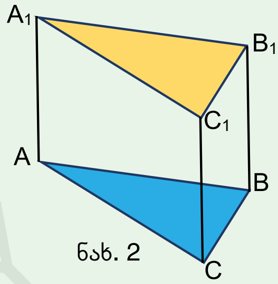
9 1-ელ ნახაზზე $\alpha \| \beta$, $AB \subset \alpha$, $A_1B_1 \subset \beta$, AB_1 და A_1B წრფეები O წერტილში კვეთენ ერთმანეთს. იპოვე OB და A_1B_1.



ნახ. 1

10 დაამტკიცე, რომ თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფე პარალელურია მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

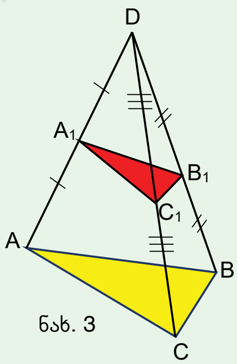
11 მე-2 ნახაზზე $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. დაამტკიცე, რომ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია.



ნახ. 2

12 მე-3 ნახაზზე D წერტილი (ABC) სიბრტყის გარეთაა აღებული. ნახაზის მიხედვით დაამტკიცე, რომ $(ABC) \| (A_1B_1C_1)$.

13 $DABC$ პირამიდის ფუძეა ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის AB ჰიპოტენუზაა 25 სმ და $\sin\angle A = \frac{3}{5}$. DC წიბოზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $\frac{DM}{MC} = \frac{2}{3}$ და მასზე გავლებულია (ABC) სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. იპოვე კვეთაში მიღებული სამკუთედის: ა) პერიმეტრი; ბ) ფართობი;



ნახ. 3

14 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის $AD=12$ სმ, $CD=5$ სმ, $CC_1=6$ სმ. A_1B_1 წიბოზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $A_1M:MB_1=5:8$ და მასზე გატარებულია (BB_1D_1) სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. იპოვე კვეთაში მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

15 მოცემულია $DABC$ პირამიდა. მისი ABC ფუძის პერიმეტრია 20 სმ. AD წიბოზე აღებულია ორი M და N წერტილი ისე, რომ $AM:MN:ND=3:2:1$; ამ წერტილებზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყეები.
იპოვე:
ა) კვეთაში მიღებული სამკუთხედების პერიმეტრი.
ბ) კვეთაში მიღებული სამკუთხედების ფართობთა შეფარდება.

აბა, სცადე!

შეადგინე ოთხი ტოლი სამკუთხედი ასანთის 6 ღერით.

4.5 პარალელური დაგეგმილება სიბრტყეზე და მისი თვისებები

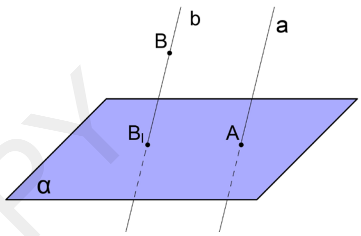
მიზანი

სიბრტყეზე სივრცითი ფიგურის გამოსახვის მეთოდების განხილვა

როგორც აღვნიშნეთ, სივრცითი ფიგურის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს. მის ნახაზს თუ ნახატს ვასრულებთ ფურცელზე. ფურცლის ზედაპირი მხოლოდ სიბრტყის ნაწილის მოდელია.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სივრცითი ფიგურა „გადაგვაქვს“ სიბრტყეზე, რომელიც შეესაბამება ჩვენს მხედველობით აღქმას.

სიბრტყეზე სივრცითი ფიგურების გამოსახვის ერთ-ერთი ხერხი არის პარალელური დაგეგმილება.



ვთქვათ, მოცემულია α სიბრტყე და მისი გადამკვეთი a წრფე. $a \cap \alpha = A$

ავიღოთ სიბრტყის გარეთ რაიმე B წერტილი და გავავლოთ მასზე a წრფის პარალელური b წრფე. $B_1 = \alpha \cap b$.

B_1 წერტილს ეწოდება B წერტილის გეგმილი a წრფის მიმართ α სიბრტყეზე. აღინიშნება: $გეგ_{\alpha}B = B_1$.

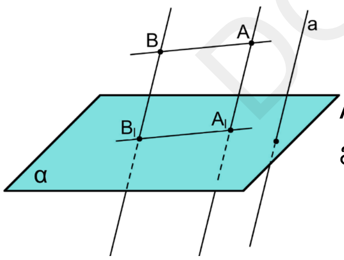
თუ მოცემული გვაქვს რაიმე F ფიგურა და ასეთი წესით ავაგებთ მისი ყოველი წერტილის გეგმილს, მივიღებთ F_1 ფიგურას, რომელსაც F ფიგურის გეგმილი ეწოდება და იწერება: $გეგ_{\alpha}F = F_1$. F_1 არის F ფიგურის გამოსახულება α სიბრტყეზე.

თუ B წერტილი ძევს α სიბრტყეზე, მაშინ მისი გეგმილი თვითონ B წერტილია.

თუ ვაგეგმილებთ a წრფის პარალელურ მონაკვეთს, მაშინ მისი გეგმილი იქნება წერტილი. ასეთ დაგეგმილებას არ განვიხილავთ.

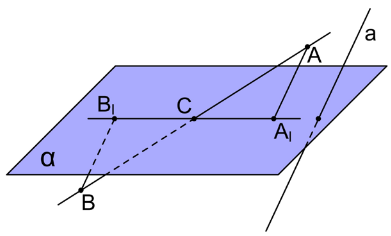
პარალელურ დაგეგმილებას აქვს შემდეგი თვისებები (მოგვყავს დამტკიცების გარეშე):

1. წრფის გეგმილი წრფეა.



$AB \parallel \alpha$

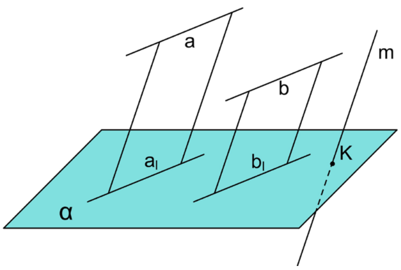
$გეგ_{\alpha}AB = A_1B_1$.



$AB \nparallel \alpha$.

$გეგ_{\alpha}AB = A_1B_1$.

2. პარალელურ წრფეთა გეგმილები პარალელურია.



$გეგ_{\alpha}a = a_1$, $გეგ_{\alpha}b = b_1$,

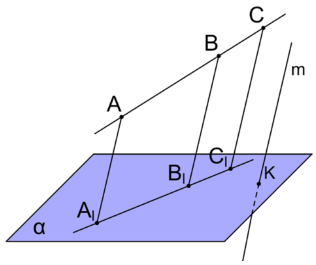
$a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1$

ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ფიგურის პარალელური მონაკვეთების გეგმილები პარალელური მონაკვეთებია.

3. ერთ წრფეზე აღებული მონაკვეთების ან პარალელური წრფეების მონაკვეთების შეფარდება მათი გეგმილების შეფარდების ტოლია.

ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ მონაკვეთის შუა წერტილი მისი გეგმილის შუა წერტილზე გეგმილდება. $AB=BC \Rightarrow A_1B_1=B_1C_1$.

საზოგადოდ, პარალელური დაგეგმილებისას მონაკვეთის სიგრძე და კუთხის სიდიდე იცვლება.



$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$$

შენიშვნა 1: ტრაპეციის გამოსახვისას უნდა შენარჩუნდეს ფუძეების შეფარდება.

შენიშვნა 2: მართი კუთხის მქონე ფიგურა უნდა გამოვსახოთ მართი კუთხის მინიშნებით, ხოლო ტოლი გვერდების მქონე ფიგურა – ტოლი გვერდების მინიშნებით.

დასკვნა: პარალელური დაგეგმილებისას ნარჩუნდება:

1. პარალელურობა.
2. პარალელური მონაკვეთების სიგრძეთა შეფარდება.

საზოგადოდ არ ნარჩუნდება: 1. მონაკვეთის სიგრძე, 2. კუთხის ზომა.

პარალელურ დაგეგმილებას, როცა $a \perp \alpha$, სადაც a არის წრფე, რომლის მიხედვითაც ვაგეგმილებთ, ხოლო α – სიბრტყე, რომელზეც ვაგეგმილებთ, ეწოდება **მართობული,** ანუ **ორთოგონალური** დაგეგმილება. რას ნიშნავს, წრფე სიბრტყის მართობულია? – ამასთან დაკავშირებულ საკითხებს გავეცნობით შემდეგ პარაგრაფში.

უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება წერტილის (ფიგურის) გეგმილი?
2. რა ძირითადი თვისებებით ხასიათდება პარალელური დაგეგმილება?
3. რა არის ორთოგონალური დაგეგმილება?
4. რას წარმოადგენს წრფის გეგმილი? მონაკვეთის?
5. $a \parallel b$. შეიძლება, რომ მათი გეგმილები იკვეთებოდეს?
6. თუ a და b წრფეები იკვეთება, შეიძლება რომ მათი გეგმილები პარალელური იყოს?
7. შეიძლება, რომ ტრაპეციის გეგმილი იყოს პარალელოგრამი?
8. შეიძლება, რომ მართკუთხედის გეგმილი იყოს: ა) პარალელოგრამი? ბ) ტრაპეცია?
9. შესაძლებელია, რომ სამკუთხედის გეგმილი ამ სამკუთხედის ტოლი იყოს? პასუხი დაასაბუთე.

სავარჯიშოები

1

პარალელური დაგეგმილებისას სამკუთხედის მედიანის გამოსახულება აუცილებლად იქნება:

ა) სიმაღლე;

ბ) ბისექტრისა;

გ) მედიანა;

დ) შუახაზი.

2 პარალელური დაგეგმილებისას სამკუთხედის შუახაზის გამოსახულება აუცილებ-ლად იქნება:

ა) მედიანა;

ბ) გვერდის პარალელური ნებისმიერი მონაკვეთი;

გ) ბისექტრისა;

დ) შუახაზი.

3 პარალელური დაგეგმილებისას ორი გადამკვეთი წრფის გამოსახულება იქნება:

ა) პარალელური წრფეები;

გ) ერთი წრფე;

ბ) აცდენილი წრფეები;

დ) გადამკვეთი წრფეები.

4 პარალელური დაგეგმილებისას კვადრატის გამოსახულება არ შეიძლება იყოს:

ა) ტრაპეცია;

ბ) კვადრატი;

გ) რომბი;

დ) პარალელოგრამი.

5 ააგე ტოლფერდა სამკუთხედისა და მისი ფუძისადმი გავლებული ბისექტრისის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახულება.

6 ააგე ტოლფერდა ტრაპეციისა და მისი სიმაღლის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახულება.

7 ააგე წესიერი ექვსკუთხედის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახუ-ლება.

8 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 12 სმ და 16 სმ. გამოთვალე: ა) კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე; ბ) ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე.

9 ABC სამკუთხედში CK სიმაღლეა. $AK=4$ სმ, $BK=9$ სმ, $\angle ACK=\angle ABC$. გამოთვალე ABC სამკუთხედის ა) პერიმეტრი; ბ) ფართობი.

აბა, სცადე!

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3სმ და 6 სმ. ააგე ამ სამკუთხედისა და ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანის, ბისექტრისისა და სიმაღლის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახულებები.

ტესტი თვითშემოწმებისათვის №8

1 მოცემულია ABC სამკუთხედი და α სიბრტყე, ამასთან $AB \parallel \alpha$, $BC \parallel \alpha$. რომელი დასკვნა არ გამომდინარეობს ამ მონაცემებიდან?
ა) $AC \parallel \alpha$;   ბ) $(ABC) \parallel \alpha$;
გ) თუ MN წრფე კვეთს ABC სამკუთხედს, მაშინ MN წრფე კვეთს α სიბრტყეს;
დ) თუ MN წრფე კვეთს α სიბრტყეს, მაშინ MN წრფე კვეთს ABC სამკუთხედს.

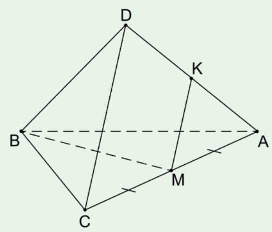
2 მოცემულია ABCD პარალელოგრამი და α სიბრტყე, ამასთან $AB \parallel \alpha$. რომელი დასკვნა გამომდინარეობს ამ მონაცემებიდან?
ა) $CD \parallel \alpha$;   ბ) $BC \parallel \alpha$;   გ) $AC \parallel \alpha$;   დ) $BD \parallel \alpha$.

3 მოცემულია α და β პარალელური სიბრტყეები და a და b წრფეები, ამასთან $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$. რომელი დასკვნა გამომდინარეობს ამ მონაცემებიდან?
ა) $a \parallel b$;   ბ) $a \dot{-} b$;   გ) $a \cap b = \varnothing$;   დ) $\alpha \cap \beta = a \cup b$.

4 პარალელურ წახნაგთა რამდენი წყვილი აქვს მართკუთხა პარალელოპიპედს?
ა) ერთი;   ბ) ორი;   გ) სამი;   დ) ოთხი.

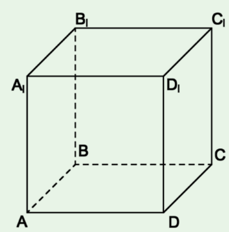
5 ტრაპეციის ფუძეებია 4 სმ და 8 სმ. პარალელური დაგეგმილებისას მისი გამოსახულება შეიძლება იყოს:
ა) პარალელოგრამი;
ბ) ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 7 სმ და 14 სმ;
გ) ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 10 სმ და 15 სმ;
დ) რომბი.

6 მოცემულია პირამიდა. B წვეროზე, DA წიბოსა და AC წიბოს შუაწერტილებზე გადის (BMK) სიბრტყე. რომელი არაა მართებული?
ა) $MK \parallel CD$;   ბ) $MK \parallel BC$;
გ) $MK \parallel (BCD)$;   დ) $CD \parallel (BMK)$.



7 DABC პირამიდის AD წიბოს M შუაწერტილზე გავლებულია ABC ფუძის პარალელური α სიბრტყე. გამოთვალე კვეთაში მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ΔABC-ს პერიმეტრია 40 სმ.

8 მოცემულია კუბი. B_1C_1 და C_1D_1 წიბოებზე აღებულია M და N შუაწერტილები. BD-სა და MN-ზე გავლებულია სიბრტყე. განსაზღვრე მიღებული BMND ოთხკუთხედის სახე და იპოვე მისი პერიმეტრი, თუ $AB = 7\sqrt{2}$.

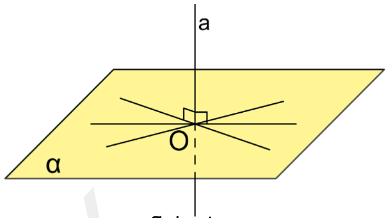


4.6 წრფისა და სიბრტყის მართობულობა, სიბრტყისადმი მართობი და დახრილი, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. სამი მართობის თეორემა

მიზანი

წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევების განხილვა; სამი მართობის თეორემის დამტკიცება და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება

a წრფეს ეწოდება α სიბრტყის მართობული, თუ a წრფე მართობულია α სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფისა (ნახ.1).



ნახ. 1

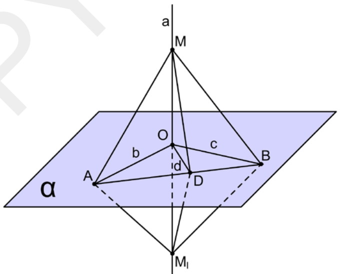
აღინიშნება ასე: $a \perp \alpha$

თეორემა 1. (წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი) თუ სიბრტყის გადამკვეთი წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფიდან თითოეულის მართობულია, მაშინ იგი სიბრტყის მართობულია.

მოცემულია: $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, $b \cap c = 0$.

უ.დ. $a \perp \alpha$.

დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ α სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი d წრფე a წრფის მართობულია. ამასთან, ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ, რომ a და d წრფეები b და c წრფეების გადაკვეთის O წერტილზეა გავლებული (ნახ. 2).



ნახ. 2

გავავლოთ რაიმე წრფე, რომელიც გადაკვეთს b, d, და c წრფეებს შესაბამისად A, D, და B წერტილებში. ავიღოთ M წერტილი a წრფეზე და OM სხივის დამატებით სხივზე გადავდოთ $OM_1=OM$ მონაკვეთი. შევაერთოთ M და M_1 წერტილები A, B და D წერტილებთან.

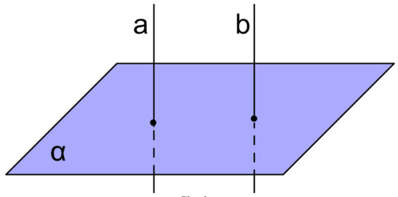
OA არის MM_1-ის შუამართობი, ამიტომ $AM_1=AM$. ანალოგიურად $MB=M_1B$. სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით $\Delta MAB=\Delta M_1AB$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\angle MAB=\angle M_1AB$.

განვიხილოთ ΔMAD და ΔM_1AD. $\angle MAD=\angle M_1AD$, AD საერთოა, $MA=M_1A$. სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, $\Delta MAD=\Delta M_1AD \Rightarrow MD=M_1D$. ΔM_1MD აღმოჩნდა ტოლფერდა, სადაც DO მედიანაა. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისების თანახმად, მედიანა სიმაღლეცაა, ე.ი. $MM_1 \perp OD$ წრფის. მივიღეთ, რომ M_1O წრფე OD (იგივე d) წრფის მართობულია. თეორემა დამტკიცებულია.

ადგილი აქვს შემდეგ თვისებებს (დაამტკიცე დამოუკიდებლად):

თვისება 1. სიბრტყისადმი გავლებული მართობული წრფეები პარალელურია (ნახ. 3).

$$a \perp \alpha \text{ და } b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b.$$



ნახ. 3

ანალოგიური თვისება გვაქვს პლანიმეტრიაში:

წრფისადმი გავლებული მართობული წრფეები პარალელურია.

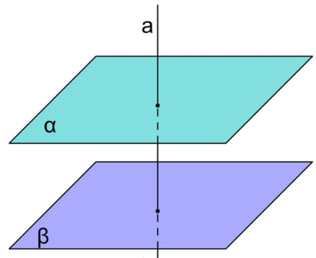
თვისება 2. თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი სიბრტყის მართობულია, მაშინ მეორეც ამავე სიბრტყის მართობული იქნება.

$$a \parallel b \text{ და } a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha.$$

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან და ჩაწერე მათემატიკური სიმბოლოების საშუალებით.

თვისება 3.

ერთი და იმავე წრფის მართობული სიბრტყეები პარალელურია (ნახ. 4).



ნახ. 4

$\alpha \perp a,\ \beta \perp a \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

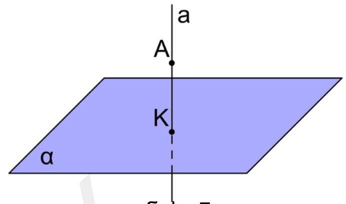
თვისება 4.

თუ ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთი მართობულია a წრფის, მაშინ მეორეც მართობული იქნება ამავე წრფისა (ნახ. 4).

$\alpha \parallel \beta$ და $\alpha \perp a \Rightarrow \beta \perp a$.

თვისება 5.

სიბრტყის გარეთ აღებულ წერტილზე გაივლება ამ სიბრტყისადმი მართობული ერთადერთი წრფე (ნახ. 5).

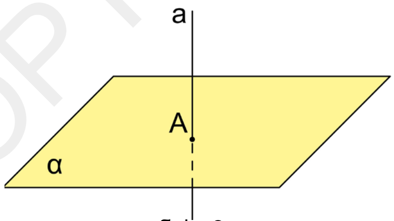


ნახ. 5

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან.

თვისება 6.

სიბრტყეზე მდებარე წერტილზე გაივლება სიბრტყისადმი ერთადერთი მართობული წრფე (ნახ. 6).



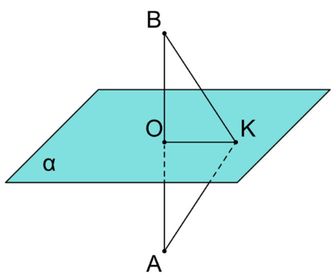
ნახ. 6

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან და ააგე შესაბამისი ნახაზი.

თვისება 7.

AB მონაკვეთის შუაწერტილზე AB მონაკვეთის მართობულად გავლებული α სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან (ნახ. 7).

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ K \in \alpha \\ AO = OB \end{array}\right\} \Rightarrow BK = AK$$



ნახ. 7

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან და ააგე შესაბამისი ნახაზი.

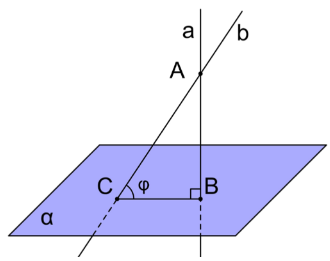
თვისება 8. (მე-7 გამონათქვამის შებრუნებული).

მონაკვეთის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილები მდებარეობს ამ მონაკვეთის შუაწერტილზე გამავალ, ამავე მონაკვეთის მართობულ სიბრტყეზე.

ჩამოაყალიბე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან.

ავიღოთ α სიბრტყე და მის გარეთ მდებარე A წერტილი (ნახ. 8). A წერტილზე გავავლოთ α სიბრტყისადმი მართობული a წრფე. სიბრტყესთან მისი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ B-თი. A წერტილზე გავავლოთ b წრფე რომელიც α სიბრტყეს გადაკვეთს B-სგან განსხვავებულ რაიმე C წერტილში.

ორთოგონალური დაგეგმილებით A წერტილის გეგმილია B წერტილი, ხოლო b წრფის გეგმილი BC წრფე. როგორც ვიცით, a-ს ეწოდება სიბრტყისადმი მართობული წრფე, b-ს კი სიბრტყისადმი დახრილი წრფე. შემოვიტანოთ შემდეგი ტერმინები:



ნახ. 8

1. AB მონაკვეთი – **მართობი**;

2. B წერტილი **– მართობის ფუძე;**

3. AC მონაკვეთი – **დახრილი**;

4. C წერტილი – **დახრილის ფუძე;**

5. CB წრფე – დახრილი b წრფის **გეგმილი** ;

6. CB მონაკვეთი – AC **დახრილის გეგმილი**;

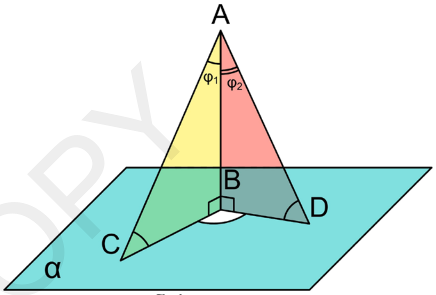
7. AB მართობის სიგრძე – A წერტილიდან α სიბრტყემდე **მანძილი**;

8. დახრილსა და მის გეგმილს შორის კუთხე – **დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე.** ($\angle ACB=\varphi$, $0<\varphi<90°$)

თუ $a\subset\alpha$ ან $a\parallel\alpha$, მაშინ a წრფესა და α სიბრტყეს შორის კუთხე 0°-ად არის მიღებული, ხოლო თუ $a\perp\alpha$, მაშინ 90°-ად.

კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის აღინიშნება $\angle(a, \alpha)$ სიმბოლოთი.

თუ $A\in\alpha$, მაშინ მანძილი წერტილსა და სიბრტყეს შორის მიღებულია 0-ის ტოლად.



ნახ. 9

მე-9 ნახაზზე AC და AD დახრილებია;

AB მართობი;

BC და BD გეგმილები.

დახრილის ფუძეებს შორის მანძილი – CD მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.

1. $\angle BAC$ – დახრილსა და მართობს შორის კუთხეა;

2. $\angle ACB$ – AC დახრილსა და α სიბრტყეს შორის კუთხეა;

3. $\angle CAD$ – დახრილებს შორის კუთხეა;

4. $\angle CBD$ – გეგმილებს შორის კუთხეა.

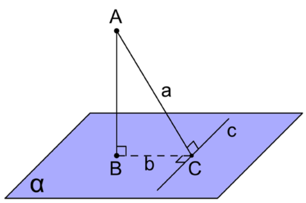
ვთქვათ, გვაქვს ერთი წერტილიდან გავლებული ორი დახრილი და მართობი. შეეცადე დაასაბუთო შემდეგი თვისებები:

1. მართობის სიგრძე ნაკლებია დახრილის სიგრძეზე.

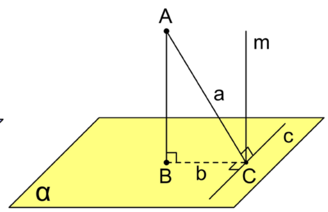
2. თუ დახრილები ტოლია, მაშინ გეგმილები ტოლია და, პირიქით, თუ გეგმილები ტოლია, მაშინ დახრილები ტოლია.

3. ორი დახრილიდან ისაა მეტი, რომლის გეგმილიც მეტია და, პირიქით, ორი გეგმილიდან ისაა მეტი, რომლის დახრილიც მეტია.

განვიხილოთ α სიბრტყე. $A\notin\alpha$. გავავლოთ AC დახრილი და AB მართობი (ნახ. 10).



ნახ. 10



ნახ. 11

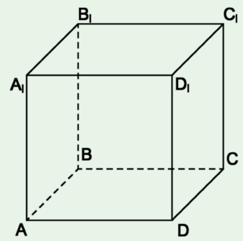
სამი მართობის თეორემა. თუ დახრილი სიბრტყეში მდებარე წრფის მართობულია, მაშინ ამ დახრილის გეგმილიც იმავე წრფის მართობული იქნება და პირიქით, თუ გეგმილი სიბრტყეში მდებარე წრფის მართობულია, მაშინ დახრილიც იმავე წრფის მართობული იქნება. $a\perp c\Leftrightarrow b\perp c$ (ნახ. 10).

დამტკიცება: გავავლოთ C წერტილზე AB-ს პარალელური m წრფე. m-ზე და AB-ზე გავავლოთ β სიბრტყე. რადგან $m\parallel AB$, მათზე სიბრტყე გაივლება (ნახ. 11) $AB\perp\alpha$, $m\parallel AB$; $\Rightarrow m\perp\alpha\Rightarrow m\perp c$. მივიღეთ $c\perp m$ და $c\perp a\Rightarrow c\perp\beta\Rightarrow c\perp b$. თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ნაწილი: $b\perp c\Rightarrow a\perp c$. (დაამტკიცე დამოუკიდებლად.)

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება სიბრტყის მართობული წრფე?
2. რაში მდგომარეობს წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი?
3. რას ეწოდება მართობი? მართობის ფუძე?
4. რას ეწოდება დახრილი? დახრილის ფუძე?
5. რას ეწოდება დახრილის გეგმილი?
6. რას ეწოდება დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე?
7. შეიძლება თუ არა, რომ დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე იყოს ბლაგვი?
8. რაში მდგომარეობს სამი მართობის თეორემა?
9. როგორ ფიქრობ, რატომ ჰქვია ამ თეორემას სამი მართობის თეორემა?
10. თუ ერთი წერტილიდან გავლებულია ორი ტოლი დახრილი, მაშინ ტოლი იქნება თუ არა მათი გეგმილები?

სავარჯიშოები



ნახ. 12

1 მოცემულია კუბი (იხ. ნახ. 12). დაამტკიცე:
ა) CC_1 წიბო მართობულია $ABCD$ წახნაგის; ბ) $CC_1 \perp AC$.

2 კუბის რამდენი წიბოა მართობული (DCC_1) სიბრტყის? (იხ. ნახ.12)

3 რომელი ჩანაწერია მართებული? (იხ. ნახ. 12)
ა) $DC_1 \perp CC_1$; ბ) $C_1D_1 \perp (AA_1D_1)$; გ) $A_1D \perp (ABC)$; დ) $B_1D \perp (ABC)$.

4 A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია AB და AC ტოლი დახრილები. AD მართობია. რა შეიძლება ითქვას მათი გეგმილების შესახებ?

5 სიბრტყისადმი A და C წერტილებიდან გავლებულია AB და CD ტოლი დახრილები. რა შეიძლება ითქვას მათი გეგმილების შესახებ?

6 AB დახრილი სიბრტყესთან ადგენს $45°$-იან კუთხეს. იპოვე მისი გეგმილის დახრილთან შეფარდება.

7 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია AB და AC დახრილები და AD მართობი. $AB=AC=10$სმ, $AD=8$სმ. იპოვე BD და CD გეგმილების სიგრძე.

8 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია AB და AC დახრილები და AD მართობი. $AB=10$სმ, $AC=12$სმ, $AD=8$სმ. იპოვე BD და CD გეგმილების სიგრძე.

9 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია AB და AC დახრილები და AD მართობი. $AB=13$სმ, $AC=10$სმ, $\angle ACD=30°$. იპოვე BD-ს სიგრძე.

10 სიბრტყიდან 12 სმ-ის ტოლი მანძილით დაშორებული A წერტილიდან გავლებულია AB=13 სმ-ის ტოლი დახრილი. იპოვე იმ კუთხის კოსინუსი, რომელსაც ეს დახრილი ადგენს სიბრტყესთან.

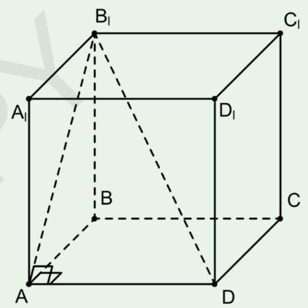
11 AB მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 6სმ-ითა და 8სმ-ით. რა მანძილითაა დაშორებული სიბრტყიდან მისი შუაწერტილი? (განიხილე ორი შემთხვევა.)

12 A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია AB და AC დახრილი. AB=10სმ. AC=8სმ. შეიძლება თუ არა AB დახრილის გეგმილი იყოს 6 სმ-ის ტოლი? (პასუხი დაასაბუთე.)

13 მოცემულია კუბი. გავლებულია წახნაგის AB_1 და კუბის B_1D დიაგონალი. მიღებულ ΔAB_1D-ს შესახებ მსჯელობენ ნინო და ნანა.

ნინო: AB_1-ის გეგმილია AB. რადგან $AB\perp AD$, ამიტომ B_1A დახრილიც მართობული იქნება AD-სი. ე.ი. ΔAB_1D მართკუთხაა.

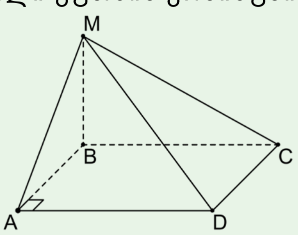
ნანა: $DA\perp AB$, $DA\perp AA_1 \Rightarrow DA\perp(AA_1B_1)$. ამიტომ, DA მართობულია სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის, მათ შორის – AB_1 წრფის. ე.ი. ΔAB_1D მართკუთხაა.



რომელი მსჯელობს სწორად?

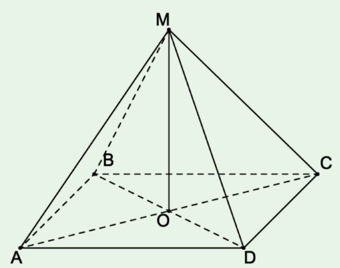
14 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი, რომლის წიბოს სიგრძეა a.
ა) დაადგინე BB_1D_1D ოთხკუთხედის სახე. გამოთვალე მისი ფართობი;
ბ) გამოთვალე A_1C დიაგონალის სიგრძე;
გ) იპოვე DC_1 დიაგონალის $(A_1B_1C_1)$ წახნაგთან შედგენილი კუთხის კოსინუსი.

15 B წერტილიდან ABCD კვადრატის სიბრტყისადმი გავლებულია BM მართობი და MA, MC და MD დახრილები. დაასახელე M წვეროს მქონე მართკუთხა სამკუთხედები.



16 ABCD კვადრატის B წვეროდან აღმართულია კვადრატის სიბრტყისადმი BM მართობი, რომლის სიგრძეა 8სმ. იპოვე მანძილები M წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძეა 6სმ.

17 ABCD კვადრატის O ცენტრიდან აღმართულია კვადრატის სიბრტყისადმი OM=12სმ სიგრძის მართობი. კვადრატის გვერდი 8-ის ტოლია. იპოვე:
ა) M წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე მანძილი;
ბ) M წერტილიდან კვადრატის გვერდამდე მანძილი.

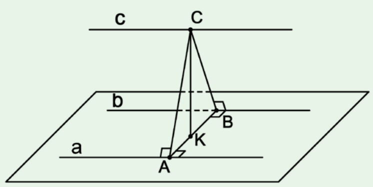


18 დაამტკიცე, რომ თუ წერტილი ტოლადაა დაშორებული მრავალკუთხედის წვეროებიდან, მაშინ ამ წერტილის ორთოგონალური გეგმილი მრავალკუთხედის სიბრტყეში ამ მრავალკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს.
ააგე ნახაზი კერძო შემთხვევებში, როცა მრავალკუთხედი:
ა) მართკუთხა სამკუთხედია;
ბ) წესიერი სამკუთხედია;
გ) ტოლფერდა სამკუთხედია;
დ) კვადრატია;
ე) წესიერი ექვსკუთხედია.

19 დაამტკიცე, რომ თუ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მრავალკუთხედის გვერდებიდან, მაშინ ამ წერტილის ორთოგინალური გეგმილი ამ მრავალკუთხედის სიბრტყეზე მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს.
ააგე ნახაზი კერძო შემთხვევებში, როცა მრავალკუთხედი:
ა) მართკუთხა სამკუთხედია;
ბ) წესიერი სამკუთხედია;
გ) ტოლფერდა სამკუთხედია;
დ) კვადრატია;
ე) წესიერი ექვსკუთხედია.

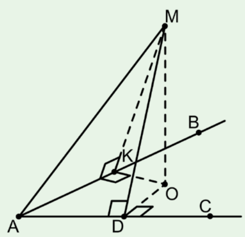
20 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია 10 სმ-ის სიგრძის ორი დახრილი, რომლებიც ერთმანეთთან α კუთხეს ადგენს. იპოვე დახრილების ფუძეებს შორის მანძილი. ყველაზე მეტი რა მანძილით შეიძლება იყოს დაშორებული A წერტილი სიბრტყიდან?

21 მოცემულია სამი ურთიერთპარალელური a, b და c წრფე. მანძილი a და c წრფეს შორის ტოლია 10სმ-ის, a და b წრფეს შორის 16სმ-ის, b და c წრფეს შორის ტოლია 12სმ-ის. იპოვე მანძილი c წრფიდან a და b წრფეებზე გამავალ სიბრტყემდე.



22 BAC კუთხის A წვეროზე გავლებულია AM სხივი, რომელიც კუთხის გვერდებთან ტოლ კუთხეებს ადგენს. დაამტკიცე, რომ M წერტილი დაგეგმილდება BAC კუთხის ბისექტრისაზე.

მითითება: გაავლე $MK \perp AB$ და $MD \perp AC$. დაამტკიცე AMK და AMD სამკუთხედების ტოლობა.



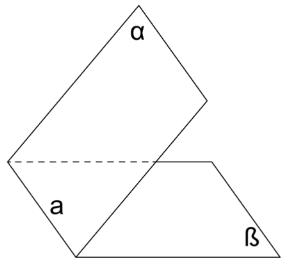
აბა, სცადე!

ABCD ოთხკუთხედის სიბრტყის გარეთ აღებული წერტილიდან ოთხკუთხედის წვეროებამდე მანძილები ტოლია. იპოვე ამ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი.

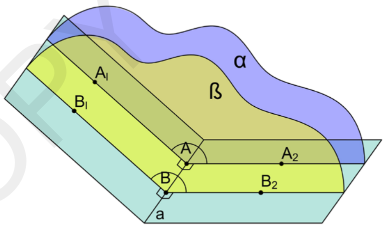
4.7 ორწახნაგა კუთხე, კუთხე სიბრტყეებს შორის

მიზანი

ორწახნაგა კუთხის განმარტება და გაზომვა



სიბრტყეზე ავიღოთ რაიმე a წრფე. ეს წრფე სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს **ნახევარსიბრტყე** ეწოდება. საერთო წრფის მქონე ორი ნახევარსიბრტყე სივრცეს ყოფს ორ ნაწილად. თითოეულს, ამ ნახევარსიბრტყეებთან ერთად, **ორწახნაგა კუთხე** ეწოდება. ნახევარსიბრტყეებს ორწახნაგა კუთხის **წახნაგები**, ხოლო საერთო წრფეს – ორწახნაგა კუთხის **წიბო** ეწოდება. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ამოზნექილ ორწახნაგა კუთხეებს. ორწახნაგა კუთხის მოდელს წარმოადგენს სრულად ან ნაწილობრივ გადაშლილი წიგნი.

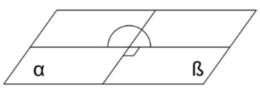


როგორ შევადაროთ ერთმანეთს ორწახნაგა კუთხეები და რა მივიღოთ მის სიდიდედ?

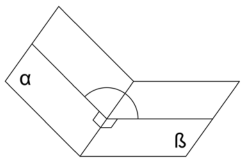
განვიხილოთ ორწახნაგა კუთხე და მის წიბოზე ავიღოთ A წერტილი. მასზე გავატაროთ a წრფის მართობული α სიბრტყე. ეს სიბრტყე წახნაგებიდან მოკვეთს AA_1 და AA_2 სხივებს. A_1AA_2 ბრტყელ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის **ხაზოვანი კუთხე** ეწოდება.

ხაზოვანი კუთხის სიდიდე არაა დამოკიდებული წიბოს წერტილის არჩევაზე. მართლაც, თუ ავიღებთ წიბოზე B წერტილს და ანალოგიურად გავავლებთ მასზე წიბოს მართობულ β სიბრტყეს, ის წახნაგებზე მოკვეთს BB_1 და BB_2 სხივებს. $\alpha\perp a$ და $\beta\perp a\Rightarrow\alpha\|\beta$, შესაბამისად $BB_1\|AA_1$ და $BB_2\|AA_2$ (ახსენი, რატომ). მივიღებთ $\angle B_1BB_2=\angle A_1AA_2$. ამიტომ ორწახნაგა კუთხის სიდიდედ შეგვიძლია მივიჩნიოთ მისი ხაზოვანი კუთხის სიდიდე.

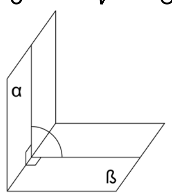
ე.ი. ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე ორწახნაგა კუთხისა და მისი წიბოს მართობული სიბრტყის თანაკვეთაა, ხოლო ხაზოვანი კუთხის სიდიდე – ორწახნაგა კუთხის სიდიდეა. მაგალითად, თუ ხაზოვანი კუთხე უდრის 120°-ს, მაშინ ამბობენ, რომ ორწახნაგა კუთხეც 120°-ის ტოლია. სტერეომეტრიაში, ისევე, როგორც პლანიმეტრიაში, გვექნება ორწახნაგა კუთხის სახეები:



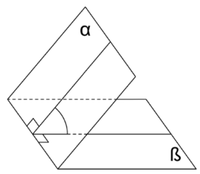
გაშლილი კუთხე
$\varphi=180°$



ბლაგვი კუთხე
$90°<\varphi<180°$



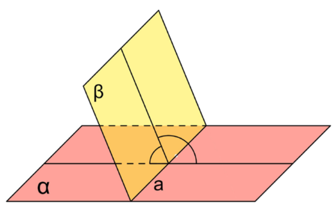
მართი კუთხე
$\varphi=90°$

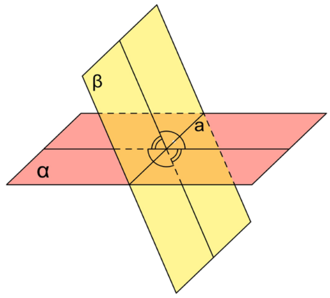


მახვილი კუთხე
$0°<\varphi<90°$

განვმარტოთ მოსაზღვრე და ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები.

ორ ორწახნაგა კუთხეს ეწოდება **მოსაზღვრე**, თუ ერთი წახნაგი საერთო აქვთ, დანარჩენი ორი კი ერთმანეთის დამატებითი ნახევარსიბრტყეებია. მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.



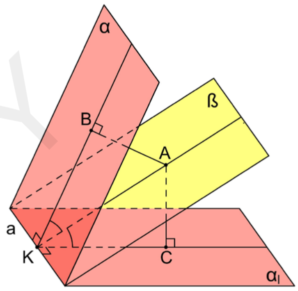


ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები ეწოდება ისეთ კუთხეებს, რომელთა წახნაგები ერთმანეთის დამატებითი ნახევარსიბრტყეებია. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია. ორი გადამკვეთი სიბრტყე გვაძლევს ოთხ ორწახნაგა კუთხეს.

გვექნება ვერტიკალური კუთხეების ორი წყვილი. თუ ერთ-ერთი ორწახნაგა კუთხე 90°-ის ტოლია, მაშინ დანარჩენი სამი კუთხიდან თითოეული 90°-ის ტოლი იქნება. ასეთ სიბრტყეებს **მართობული სიბრტყეები** ეწოდება.

გადამკვეთ სიბრტყეებს შორის კუთხე ეწოდება მათი გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან უმცირესს. კუთხე α და β სიბრტყეებს შორის აღინიშნება ასე: $\angle(\alpha;\beta)$.

თუ სიბრტყეები პარალელურია ან ემთხვევა ერთმანეთს, მათ შორის კუთხე 0°-ად არის მიჩნეული. ასე რომ სიბრტყეებს შორის კუთხის სიდიდე [0°; 90°] შუალედშია მოთავსებული.



ორწახნაგა კუთხის შუაზე გამყოფ ნახევარსიბრტყეს **ბისექტორი** ეწოდება. (გაიხსენე პლანიმეტრიიდან: კუთხის ბისექტრისა და მისი თვისება.)

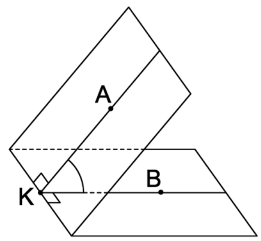
ბისექტორის თვისება: ბისექტორის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ორწახნაგა კუთხის წახნაგებიდან.

ჩამოაყალიბე მოცემულის შებრუნებული თეორემა და დაამტკიცე ეს თეორემები დამოუკიდებლად.

მართობული სიბრტყეების მოდელებია: ოთახში ჭერი და კედელი, იატაკი და კედელი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორწახნაგა კუთხე, რომლის წიბოა a წრფე. ავაგოთ მისი ხაზოვანი კუთხე.

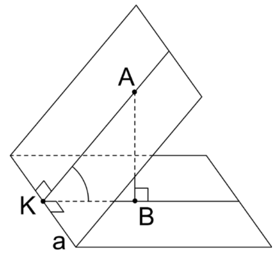
ხერხი 1. ავიღოთ წიბოზე K წერტილი. გავავლოთ ერთ წახნაგზე $KA\perp a$. მეორე წახნაგზე $KB\perp a$ (ნახ. 1). $a\perp KA$ და $a\perp KB\Rightarrow a\perp(KAB)$, ამიტომ, განმარტების თანახმად, $\angle AKB$ ხაზოვანი კუთხეა.



ნახ. 1

ხერხი 2. ავიღოთ ერთ-ერთ წახნაგზე A წერტილი (ნახ. 1). გავავლოთ a წიბოსადმი AK მართობი, K წერტილიდან მეორე სიბრტყეში გავავლოთ a წრფისადმი KB მართობი. განმარტების თანახმად, $\angle AKB$ ხაზოვანი კუთხეა.

ხერხი 3. ავიღოთ A წერტილი ერთ-ერთ წახნაგზე (ნახ. 2). გავავლოთ მასზე წიბოსადმი AK მართობი და მეორე წახნაგისადმი AB მართობი. AK მართობია a წიბოსადმი, იმავდროულად AK დახრილია მეორე წახნაგისადმი. KB არის AK-ს გეგმილი. სამი მართობის თეორემის თანახმად, KB-ც იქნება a წიბოს მართობული. $KA\perp a$ და $KB\perp a\Rightarrow a\perp(AKB)$. ე.ი. $\angle AKB$ ხაზოვანი კუთხეა.



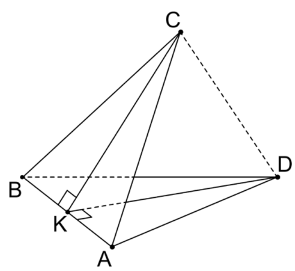
ნახ. 2

ამოცანა 1. საერთო ფუძის მქონე ორი ტოლფერდა სამკუთხედი ერთმანეთთან 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს ადგენს. საერთო ფუძის სიგრძეა c სმ. ერთი სამკუთხედის ფერდი a სმ-ია, მეორე სამკუთხედის – b სმ. ვიპოვოთ მანძილი სამკუთხედების წვეროებს შორის (ნახ. 3).

მოც: $(\Delta ABC)\cap(\Delta ABD)=AB$; $AB=c$;

$BC=AC=a$; $BD=AD=b$; $\angle((ABC);(ABD))=60°$.

$CD=?$



ნახ. 3

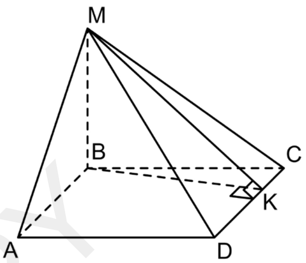
ამოხსნა. ამოცანა ამოვხსნათ 3 საფეხურად:

1. ხაზოვანი კუთხის აგება.

AB ფუძეზე ავიღოთ მისი შუაწერტილი K. შევაერთოთ C და D წვეროები K-სთან. ΔABC ტოლფერდაა, CK-მედიანაა. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისების თანახმად, იგი სიმაღლეცაა, ე.ი. $AB \perp CK$. ანალოგიურად, $AB \perp DK \Rightarrow AB \perp (CDK)$. ე.ი. CKD ხაზოვანი კუთხეა. პირობის თანახმად, $\angle CKD = 60°$.

2. CK-ს და DK-ს გამოთვლა. ΔBCK მართკუთხაა. $CK = \sqrt{a^2 - \dfrac{c^2}{4}}$, ანალოგიურად გამოითვლება DK.

3. ΔCKD-ში ვიცით CK, DK და მათ შორის კუთხე. კოსინუსების თეორემით შეგვიძლია გამოვითვალოთ CD. (დაასრულე ამოხსნა.)



ამოცანა 2. ABCD პარალელოგრამის B წვეროდან პარალელოგრამის სიბრტყისადმი აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია პარალელოგრამის წვეროებთან. ავაგოთ ხაზოვანი კუთხეები მიღებულ სამკუთხედებსა და პარალელოგრამის სიბრტყეს შორის.

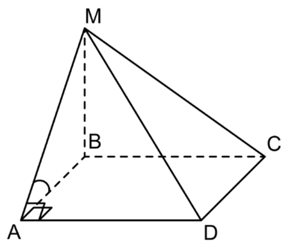
ამოხსნა. (MCD)-სა და პარალელოგრამის სიბრტყის გადაკვეთის წრფეა CD. B-დან გავავლოთ $BK \perp CD$ (პარალელოგრამის სიმაღლე). შევაერთოთ M და K წერტილები. სამი მართობის თეორემის თანახმად: $BK \perp CD \Rightarrow MK \perp CD$.

$$\left.\begin{array}{l} MK \perp CD \\ BK \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (MBK) \text{ ე.ი. } \angle BKM \text{ არის ხაზოვანი კუთხე}$$

ანალოგიურად ავაგებთ (AMD) და პარალელოგრამის სიბრტყეს შორის ხაზოვან კუთხეს.

ავაგოთ (AB) წიბოსთან ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე. $(ABM) \cap (ABCD) = AB$. $\{AB \perp BM,\ AB \perp BK \Rightarrow AB \perp (MBK)\}$. ე.ი. $\angle MBK$ არის ხაზოვანი კუთხე. ეს კუთხე 90°-ის ტოლი იქნება, რადგან $MB \perp BK$. ანალოგიურად აიგება (MBC) და (ABC) სიბრტყეებს შორის ხაზოვანი კუთხე.

ამოცანა 3. ABCD მართკუთხედის B წვეროდან აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია მართკუთხედის წვეროებთან. AD გვერდთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხე ტოლია 30°-ის. AB=10სმ, BC=15სმ. ვიპოვოთ: ა) AM; ბ) ΔAMD-ს ფართობი.



ამოხსნა. AB წარმოადგენს AM-ის გეგმილს. $AB \perp AD$ (პირობიდან გამომდინარე). სამი მართობის თეორემის თანახმად, $AM \perp AD$, ე.ი. $\angle MAD = 90°$. ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე კი იქნება თვითონ $\angle MAB = 30°$.

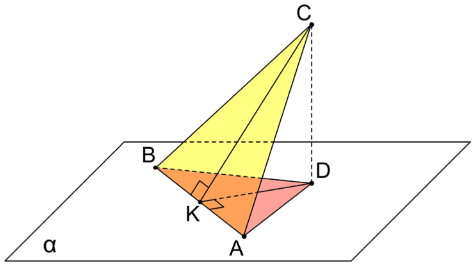
1) ΔABM მართკუთხაა, $\angle A = 30° \Rightarrow AM = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

2) $S_{AMD} = \dfrac{20 \cdot 15}{2\sqrt{3}} = 50 \cdot \sqrt{3}$ (სმ²).

ამოცანა 4. ვთქვათ, α სიბრტყე გადის ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. სამკუთხედი ABC დავაგეგმილოთ α სიბრტყეზე. A და B წვეროები დაგეგმილდება თავის თავში, C – რაიმე D წერტილში. ΔABC-ს გეგმილი იქნება სამკუთხედი ABD. ვიპოვოთ გეგმილის S_1 ფართობი, თუ მოცემულია ΔABC-ს ფართობი S და სიბრტყეებს შორის φ კუთხე.

ამოხსნა. ავაგოთ ხაზოვანი კუთხე სამკუთხედების სიბრტყეებს შორის. გავავლოთ $CK \perp AB$. სამი მართობის თეორემის თანახმად, $DK \perp AB$. $\angle CKD$ იქნება φ-ს ტოლი ხაზოვანი კუთხე.

$$S_1=\frac{1}{2}\ AB\cdot DK=\frac{1}{2}AB\cdot CK\cdot\cos\varphi=S\cdot\cos\varphi.$$



მიღებული ფორმულა მართებულია ზოგად შემთხვევაში: თუ ბრტყელი ფიგურის ფართობია S და ამ ფიგურის სიბრტყესა და α სიბრტყეს შორის კუთხე არის φ, მაშინ ფიგურის α სიბრტყეზე გეგმილის S_1 ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_1=S\cdot\cos\varphi.$$

უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხე, ორწახნაგა კუთხის წიბო, წახნაგი?
2. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე?
3. რას ეწოდება გაშლილი, ბლაგვი, მართი და მახვილი ორწახნაგა კუთხე?
4. რას ეწოდება მოსაზღვრე და ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები?
5. რას უდრის მოსაზღვრე ორწახნაგა კუთხეების ჯამი?
6. რას ეწოდება სიბრტყეებს შორის კუთხე?
7. რამდენი გრადუსი შეიძლება იყოს ორ სიბრტყეს შორის კუთხის სიდიდე?
8. რა შემთხვევაშია სიბრტყეები ურთიერთმართობული?
9. შეიძლება თუ არა ფიგურის ფართობი ნაკლები იყოს მისი გეგმილის ფართობზე?

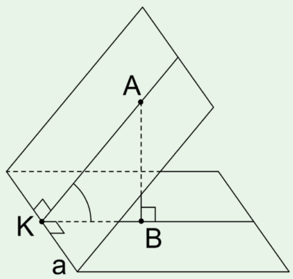
სავარჯიშოები

1 მოსაზღვრე ორწახნაგა კუთხეებიდან ერთ-ერთი მეორეზე სამჯერ მეტია. იპოვე მათ შორის უმცირესის სიდიდე.

2 ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეებიდან ერთ-ერთი 50°-ის ტოლია. რას უდრის დანარჩენი კუთხეებიდან უდიდესი?

3 ბისექტორზე მდებარე წერტილი ერთ-ერთი წახნაგიდან 10 სმ-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. რა მანძილითაა დაშორებული ეს წერტილი მეორე წახნაგიდან?

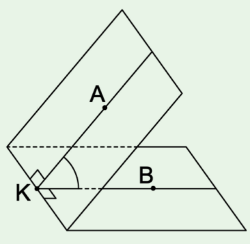
4 ორწახნაგა კუთხის წახნაგის A წერტილიდან წიბოსადმი გავლებულია AK მართობი და მეორე წახნაგისადმი AB მართობი. დაამტკიცე, რომ ∠AKB ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხეა და იპოვე ეს კუთხე, თუ AB=KB.



5 60°-იანი ორწახნაგა კუთხის წახნაგებზე მოცემული A და B წერტილებიდან გავლებულია წიბოსადმი AK და BK მართობები. AK=BK=8 სმ. იპოვე AB.

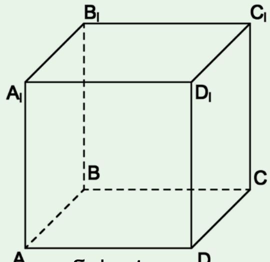
6 ამოხსენი წინა ამოცანა იმ პირობით, რომ AK=10სმ, BK=8 სმ.

7 ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მდებარე A წერტილი წიბოდან დაშორებულია 10 სმ-ით, მეორე წახნაგიდან კი $5\sqrt{3}$ სმ-ით. იპოვე ორწახნაგა კუთხე.



8 დაამტკიცე, რომ ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე თითოეული წახნაგის მართობულია.

9 მოცემულია კუბი (ნახ. 1). დაამტკიცე, რომ:
ა) $(AA_1B_1)\perp(ABC)$; ბ) (ABC) სიბრტყის მართობული კიდევ რამდენი სიბრტყე არსებობს, რომელიც შეიცავს კუბის წახნაგს?



ნახ. 1

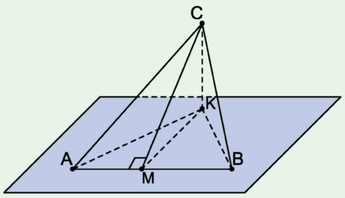
10 მოცემულია კუბი (ნახ. 1). დაამტკიცე, რომ $B_1A\perp AD$. რას უდრის ორწახნაგა კუთხე (AB_1C_1) და (ABC) სიბრტყეებს შორის?

11 მოცემულია მართი პარალელეპიპედი. მისი $ABCD$ ფუძე პარალელოგრამია, რომლის $\angle B=110°$. იპოვე BB_1C_1C წახნაგის სიბრტყესა და DD_1C_1C სიბრტყეს შორის ორწახნაგა კუთხის სიდიდე.

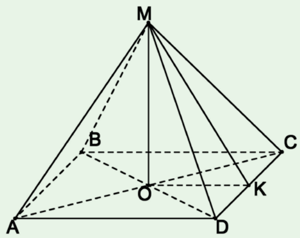
12 α სიბრტყე გადის ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე და სამკუთხედის სიბრტყესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვე α სიბრტყეზე სამკუთხედის გეგმილის ფართობი, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძეა $8\sqrt{2}$ სმ.

13 სიბრტყე გადის $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის დიდ ფუძეზე და მის სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს. იპოვე ტრაპეციის გეგმილის ფართობი ამ სიბრტყეზე, თუ $AB=CD=5$ სმ, $BC=4$ სმ, $AD=12$ სმ.

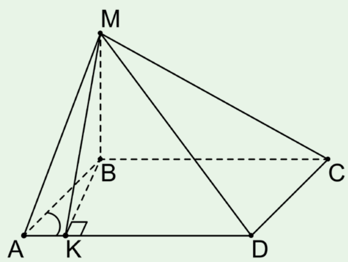
14 ABC სამკუთხედის AB გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან ადგენს 45°-ის ტოლ ორწახნაგა კუთხეს. იპოვე მანძილი C წვეროდან ამ სიბრტყემდე, თუ $AB=14$ სმ, $BC=13$ სმ, $AC=15$ სმ.



15 $ABCD$ კვადრატის სიბრტყის გარეთ აღებული M წერტილი შეერთებულია კვადრატის წვეროებთან. $MA=MB=MC=MD$. რამდენჯერ მეტია DC წიბოსთან მდებარე ორწახნაგა კუთხის ტანგენსი MA წრფის (ABC) სიბრტყესთან შედგენილი კუთხის ტანგენსზე?



16 $ABCD$ პარალელოგრამის B წვეროდან მისი სიბრტყისადმი აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია პარალელოგრამის წვეროებთან. ორწახნაგა კუთხე (AMD) და (ABC) სიბრტყეებს შორის 45°-ია. $AB=4$ სმ, $BC=6$ სმ, $\angle BAD=60°$.
იპოვე: ა) MB; ბ) ΔMCD-ს ფართობი; გ) (MDC) და (ABC) სიბრტყეებს შორის კუთხის კოსინუსი.



ტესტი თვითშემოწმებისათვის №9

1 წრის O ცენტრიდან მისი სიბრტყისადმი აღმართულია OM=4სმ სიგრძის მართობი. რამდენი სანტიმეტრია მანძილი M წერტილიდან წრეწირის წერტილამდე, თუ წრეწირის რადიუსია 3 სმ?

ა) 5 სმ; ბ) 4 სმ; გ) 7 სმ; დ) 6 სმ.

2 სიბრტყიდან 6 სმ-ის ტოლი მანძილით დაშორებული M წერტილიდან გავლებულია MA მართობი და MB დახრილი. იპოვე MB დახრილის სიგრძე, თუ მის მიერ სიბრტყესთან შედგენილი კუთხის სინუსი $\frac{3}{4}$-ის ტოლია.

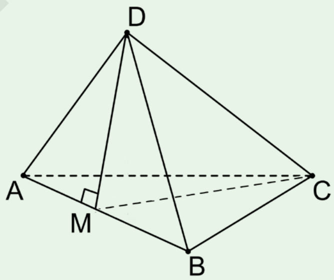
ა) 16 სმ; ბ) 8 სმ; გ) 6 სმ; დ) 5 სმ.

3 A და B წერტილები α სიბრტყიდან დაშორებულია 6 სმ და 12 სმ-ის ტოლი მანძილებით. რა მანძილითაა დაშორებული AB მონაკვეთის შუაწერტილი სიბრტყიდან, თუ AB მონაკვეთი არ კვეთს α სიბრტყეს?

ა) 7 სმ; ბ) 8 სმ; გ) 9 სმ; დ) 10 სმ.

4 მართი ორწახნაგა კუთხის ბისექტორზე მდებარე წერტილი წახნაგებიდან დაშორებულია $12\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლი მანძილით. ამ წერტილიდან წიბომდე მანძილია:

ა) 12 სმ; ბ) 6 სმ; გ) 18 სმ; დ) 24 სმ.



5 ორი ტოლგვერდა ABD და ABC სამკუთხედების სიბრტყეები მართობულია. AB=6სმ. რას უდრის D და C წვეროებს შორის მანძილი?

ა) 8 სმ; ბ) $3\sqrt{6}$ სმ; გ) $0,5\sqrt{6}$; დ) $\sqrt{6}$.

6 ჩამოთვლილი დებულებებიდან რომლებია მართებული? ა) თუ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილები ტოლია, მაშინ მათი გეგმილები ტოლია; ბ) ერთი და იმავე წრფისადმი მართობული წრფეები პარალელურია; გ) რაიმე სიბრტყისადმი გავლებული ორი მართობული სიბრტყე პარალელურია; დ) ერთი და იმავე წრფისადმი გავლებული მართობული სიბრტყეები ერთმანეთის პარალელურია; ე) სიბრტყის პარალელურ წრფეზე გაივლება ამ სიბრტყისადმი მხოლოდ ერთი მართობული სიბრტყე.

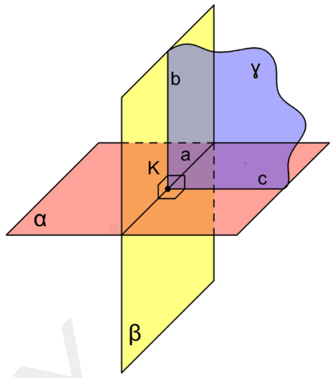
7 იპოვე a წიბოს მქონე კუბის წვეროებს შორის უდიდესი და უმცირესი მანძილი.

8 ABCD კვადრატის B წვეროდან აღმართულია 9 სმ სიგრძის BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია A, D, C წვეროებთან. (MCD) და (ABC) სიბრტყეებს შორის კუთხეა 60°. იპოვე კვადრატის ფართობი.

4.8 სიბრტყეთა მართობულობა

მიზანი

სიბრტყეთა მართობულობის ნიშნის დადგენა და გამოყენება

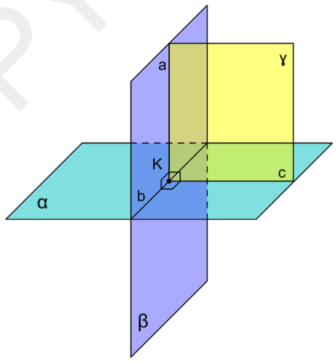


როგორც აღვნიშნეთ, ორ სიბრტყეს მართობული ეწოდება, თუ მათ შორის კუთხე 90 გრადუსია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ორ სიბრტყეს ურთიერთმართობული ეწოდება, თუ საერთო წრფის მართობული სიბრტყე მოცემული სიბრტყეებიდან მოკვეთს მართობულ წრფეებს.

$\alpha \cap \beta = a$; $\gamma \cap \alpha = c$; $\gamma \cap \beta = b$ თუ $\angle(b,c)=90° \Rightarrow \angle(\alpha,\beta)=90°$ ანუ $\alpha \perp \beta$;

ურთიერთმართობული სიბრტყეების მაგალითად შეგვიძლია დავასახელოთ: ოთახის იატაკი და კედლები, კუბის მეზობელი წახნაგები და სხვა.

თეორემა 1. (სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი) თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები მართობულია.



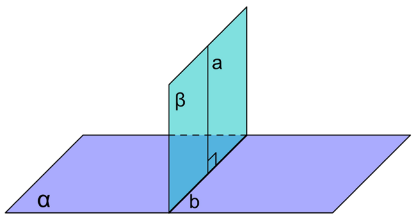
მოც: $a \cap \alpha = K$, $a \perp \alpha$, $a \subset \beta$.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\beta \perp \alpha$.

დამტკიცება.

a წრფეზე გავავლოთ β სიბრტყე. იგი α სიბრტყეს გადაკვეთს რაიმე b წრფეზე. დავამტკიცოთ, რომ $\beta \perp \alpha$.

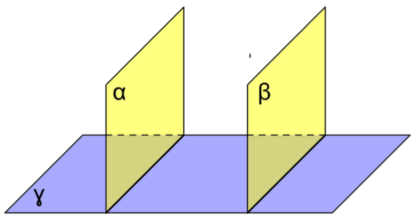
K წერტილზე გავავლოთ b წრფის მართობული c წრფე. $a \perp \alpha$, ამიტომ $a \perp b$; $b \perp a$ და $b \perp c$, ე.ი. b მართობულია a და c წრფეებზე გამავალი სიბრტყისა, ამიტომ, $\angle(\beta,\alpha)=\angle(a,c)=90°$. თეორემა დამტკიცებულია.



თეორემა 2: თუ ორი სიბრტყე ურთიერთმართობულია, მაშინ რომელიმე სიბრტყეში გადაკვეთის წრფისადმი გატარებული მართობი მეორე სიბრტყის მართობულია.

დამტკიცება. მტკიცდება წინა თეორემის ანალოგიურად. (სცადე დამოუკიდებლად დამტკიცება.)

$\alpha \cap \beta = b$, $\alpha \perp \beta$, $a \subset \beta$, $a \perp b \Rightarrow a \perp \alpha$.

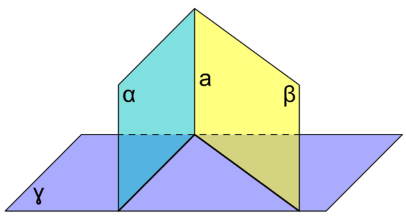


თეორემა 3. (დამტკიცების გარეშე) თუ ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთი მესამე სიბრტყის მართობულია, მაშინ მეორეც მესამის მართობული იქნება.

$\alpha \parallel \beta$ და $\alpha \perp \gamma \Rightarrow \beta \perp \gamma$.

თეორემა 4. (დამტკიცების გარეშე) ერთი და იმავე α სიბრტყის მართობული ორი სიბრტყე პარალელურია ან იკვეთება α სიბრტყის მართობულ წრფეზე.

$\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ ან $(\alpha \cap \beta) = a$, $a \perp \gamma$.

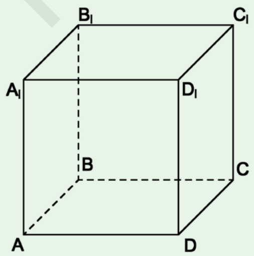


უპასუხე კითხვებს:

1. როდის ვიტყვით, რომ ორი სიბრტყე მართობულია?
2. მოცემულია: $\alpha \perp \beta$ და $\alpha \cap \beta = a$. α სიბრტყეში გატარებული a წრფისადმი მართობული წრფე იქნება თუ არა β სიბრტყის მართობული?
3. რამდენგრადუსიანია მართობულ წახნაგებს შორის ორწახნაგა კუთხეები?
4. მართებულია თუ არა გამონათქვამი, რომ ერთი და იმავე სიბრტყის მართობული სიბრტყეები პარალელურია?

სავარჯიშოები

1-7 ამოცანებში ისარგებლე მოცემული ნახაზით.



1 კუბის წახნაგების შემცველი სიბრტყეებიდან რამდენია (ABC) სიბრტყის მართობული?

2 კუბის წახნაგების შემცველი სიბრტყეებიდან რამდენია (AA_1B) სიბრტყის პარალელური?

3 რა სიდიდისაა (AA_1B_1) და (BB_1C_1) სიბრტყეებს შორის კუთხე?

4 ქვემოთ მოცემულთაგან რომელი არ არის მართებული დებულება?

ა) $(BB_1D_1)\perp(ABC)$; ბ) $(BB_1D_1)\perp(CDD_1)$
გ) $(AA_1C_1)\perp(ABC)$; დ) $(AA_1B_1)\parallel(DD_1C_1)$

5 ქვემოთ მოცემული ჩანაწერებიდან რომლებია მართებული?

ა) $(DD_1)\perp(ABC)$; ბ) $(BB_1D_1)\perp(DD_1C_1)$;
გ) $(AB)\perp(BC)$; დ) $(AB)\perp(BD)$;
ე) $(AB)\perp(BB_1D_1)$; ვ) $\angle((B_1D); (ABC))=45°$;
ზ) $AC\perp BD$; თ) $\angle((AB_1); (CC_1))=45°$;
ი) AB_1-ის გეგმილი (ABC)-ზე არის AB;
კ) AB_1-ის გეგმილი (D_1C_1C)-ზე არის DC_1.

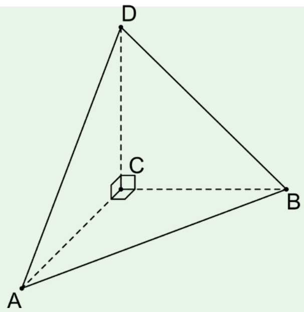
6 დაამტკიცე, რომ:

ა) BB_1D_1D მართკუთხედია;
ბ) $\angle((BB_1D_1); (DD_1C_1))=45°$;
გ) $\angle B_1AD=90°$.

7 კუბის წიბო a-ს ტოლია. გამოთვალე:

ა) BB_1D_1D მართკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი;
ბ) B_1AD სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.

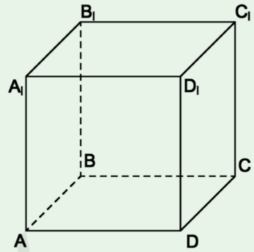
8 C წერტილიდან გავლებულია CA, CB და CD ურთიერთმართობული მონაკვეთები. იპოვე ორწახნაგა კუთხეები მიღებულ ა) (ACD) და (BCD); ბ) (ACB) და (ADB) სიბრტყეებს შორის, თუ AC=6სმ, BC=8სმ და CD=$4{,}8\sqrt{3}$ სმ.



9 მოცემულია a სმ წიბოს მქონე კუბი. გამოთვალე:

ა) A წვეროდან მანძილი (BB_1D_1) სიბრტყემდე.

ბ) $\angle((B_1A);\ (B_1BD))$



10 ABCD და ABMN საერთო AB გვერდის მქონე მართკუთხედებია. მათი სიბრტყეები მართობულია.

ა) დაამტკიცე, რომ ΔNAC მართკუთხაა;

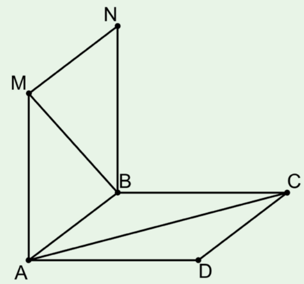
ბ) იპოვე N და C წვეროებს შორის მანძილი, თუ: AD=8სმ; DC=6სმ; AN=5სმ.

11 ΔABC და ΔABD საერთო AB გვერდის მქონე სამკუთხედებია.მათი სიბრტყეები მართობულია. ΔABC-ში $\angle C=90^\circ$, AB=10სმ; AC=BC; ΔABD-ში AD=BD=13სმ; M წერტილი AB-ს შუაწერტილია.

დაამტკიცე:

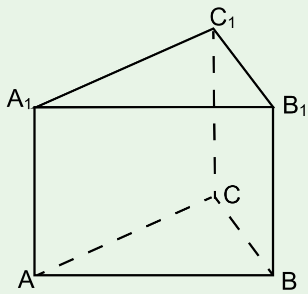
1. $DM \perp AB$; $CM \perp AB$;
2. $DM \perp (ABC)$;

გამოთვალე DC მონაკვეთის სიგრძე.



12 ABCD და AMNB კვადრატების სიბრტყეები ურთიერთმართობულია. იპოვე კუთხე MB და AC დიაგონალებს შორის.

13 $ABCA_1B_1C_1$ სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგები კვადრატებია. გამოთვალე (ABC) და ABC_1 სიბრტყეებს შორის კუთხის ტანგენსი.



აბა, სცადე!

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. მისი B_1D დიაგონალი წახნაგებთან ადგენს α, β, γ კუთხეებს.

გამოთვალე: ა) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$; ბ) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

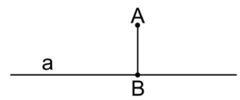
4.9 მანძილები სივრცეში

მიზანი **ფიგურებს შორის მანძილის დადგენა სივრცეში**

F_1 და F_2 ფიგურებს შორის მანძილი ეწოდება მათ უახლოეს წერტილებს შორის მანძილს. თუ ორი წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ მათ შორის მანძილი 0-ის ტოლადაა მიღებული. მანძილს აღნიშნავენ $d(F_1;F_2)$ სიმბოლოთი. განვიხილოთ ყველა შემთხვევა, როცა F_1 და F_2 ფიგურები წერტილი, წრფე ან სიბრტყეა და $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

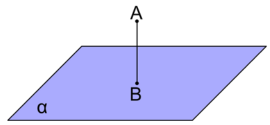
ნახ. 1

1. $d(A;B)$, ორ წერტილს შორის მანძილი – AB მონაკვეთის სიგრძე (ნახ. 1);



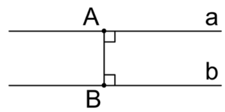
ნახ. 2

2. $d(A;a)$, წერტილიდან წრფემდე მანძილი – A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებული AB მართობის სიგრძე (ნახ. 2).



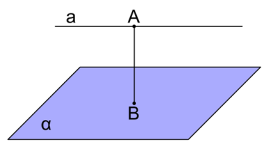
ნახ. 3

3. $d(A;\alpha)$, წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი – A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული AB მართობის სიგრძე (ნახ. 3).



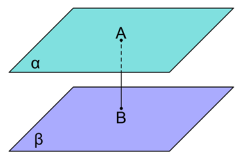
ნახ. 4

4. $d(a;b)$, პარალელურ წრფეებს შორის მანძილი – ერთ-ერთი წრფის რომელიმე წერტილიდან მეორე წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძე (ნახ. 4).



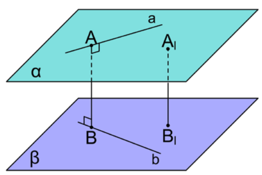
ნახ. 5

5. $d(a;\alpha)$, წრფესა და მის პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი – წრფის რომელიმე წერტილიდან სიბრტყეებზე დაშვებული მართობის სიგრძე (ნახ. 5).



ნახ. 6

6. $d(\alpha;\beta)$, ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი – ერთ-ერთი სიბრტყის რომელიმე წერტილიდან მეორე სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძე (ნახ. 6).



ნახ. 7

7. $d(a,b)$, $a \dot{-} b$, მანძილი ორ აცდენილ წრფეს შორის – მათი საერთო მართობის სიგრძე. ეს მანძილი იგივეა, რაც ამ წრფეებზე გატარებულ პარალელურ სიბრტყეთა შორის მანძილი, $AB=A_1B_1$ (ნახ. 7).

უპასუხე კითხვებს:

1. რის ტოლია მანძილი არაცარიელი თანაკვეთის მქონე ფიგურებს შორის?
2. რის ტოლია მანძილი რიცხვით ღერძზე მდებარე [a; b] და [c; d] შუალედებს შორის, თუ $b<c$?
3. რის ტოლია მანძილი ერთ სიბრტყეში მდებარე R_1 და R_2 რადიუსების მქონე ორ წრეწირს შორის, თუ მათ ცენტრებს შორის მანძილია d და ამასთან $d>R_1+R_2$?

სავარჯიშოები

1 წრფეზე აღებულია A, B და C წერტილები. AC=40 სმ, B წერტილი ძევს A და C წერტილებს შორის. იპოვე AB და BC მონაკვეთების სიგრძე, თუ მათი შეფარდებაა 0,6.

2 ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3სმ და 4სმ. იპოვე მანძილი მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზამდე.

3 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია 20 სმ სიგრძის დახრილი, რომელიც სიბრტყესთან ადგენს 30^0-იან კუთხეს. იპოვე A წერტილიდან ამ სიბრტყემდე მანძილი.

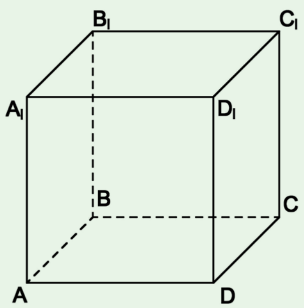
4 პარალელური სიბრტყეებიდან ერთ-ერთზე აღებული წერტილიდან მეორე სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის სიგრძეა 13 სმ. მანძილი სიბრტყეებს შორის 12 სმ-ია. იპოვე დახრილის გეგმილის სიგრძე თითოეულ სიბრტყეზე.

5 სიბრტყეზე მდებარე A და B წერტილებიდან მისი პარალელური სიბრტყისადმი გავლებული AC და BD დახრილების გეგმილები ტოლია. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელია მართებული?

ა) AC>BD; ბ) AC<BD; გ) AC=BD; დ) არცერთი.

6 მოცემულია კუბი (ნახ. 1), რომლის წიბოს სიგრძეა 8 სმ. იპოვე მანძილი C_1 წვეროდან:

ა) C წვერომდე; ბ) D წვერომდე;
გ) A წვერომდე; დ) AD წიბომდე;
ე) AB წიბომდე; ვ) CD წიბომდე;
ზ) (ABC) სიბრტყემდე; თ) (BB_1D) სიბრტყემდე.



ნახ. 1

7 მოცემულია კუბი, რომლის წიბოა a სმ. (იხილე ნახ. 1). იპოვე მანძილი:

ა) AD წრფესა და BC წრფეს შორის;
ბ) AB წრფესა და C_1C წრფეს შორის;
გ) AD წიბოსა და BB_1C_1C წახნაგს შორის;
დ) (ABC) სიბრტყესა და ($A_1B_1C_1$) სიბრტყეს შორის.

8 მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 6 სმ. მისი O ცენტრიდან აღმართულია OM მართობი. OM=8სმ. იპოვე მანძილი M წერტილიდან კვადრატის: ა) წვერომდე; ბ) გვერდამდე.

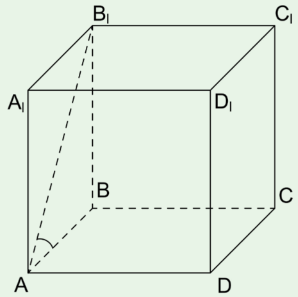
9 მოცემულია ABCD მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია: AB=6სმ; BC=8სმ. B წვეროდან აღმართულია BM მართობი. BM=10სმ. იპოვე მანძილი M წერტილიდან:

ა) A წვერომდე; ბ) C წვერომდე;
გ) D წვერომდე; დ) AB გვერდამდე;
ე) BC გვერდამდე; ვ) AD გვერდამდე;
ზ) CD გვერდამდე.

10 მოცემულია კუბი, რომლის გვერდითი წახნაგის AB_1 დიაგონალის სიგრძეა $8\sqrt{2}$ სმ. იპოვე:

ა) $tg(\angle B_1AB)$; ბ) მანძილი AB-სა და DD_1C_1C წახნაგს შორის;

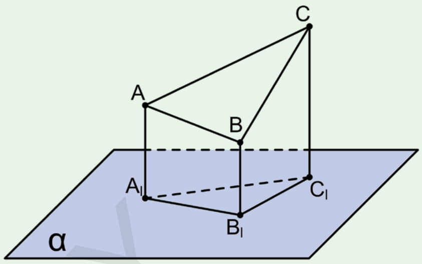
გ) (AB_1)-სა და DD_1C_1C-ს შორის.



11 ABC სამკუთხედის წვეროები დაშორებულია α სიბრტყიდან 4 სმ, 8 სმ და 10 სმ-ით. $\alpha \cap \Delta ABC = \varnothing$. იპოვე მანძილი:

ა) გვერდების შუაწერტილებიდან სიბრტყემდე;

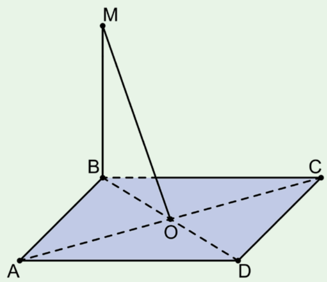
ბ) მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან სიბრტყემდე.



12 მოცემულია a წიბოს მქონე $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. იპოვე მანძილი AD წიბოსა და A_1B დიაგონალს შორის.

13 მე-9 ამოცანის პირობის მიხედვით, იპოვე მანძილი M წერტილიდან AC დიაგონალამდე.

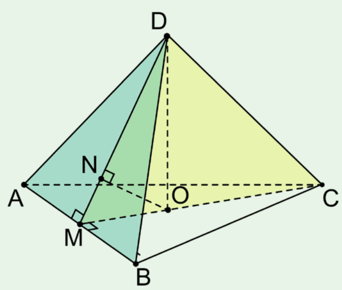
14 ABCD პარალელოგრამის B წვეროდან აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილთან. $MO \perp AC$. იპოვე პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ AB=12 სმ.



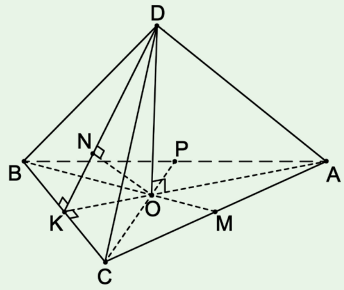
15 M წერტილი ABC მართკუთხა სამკუთხედის ყველა წვეროდან დაშორებულია 8 სმ-ის ტოლი მანძილით. იპოვე მანძილი M წერტილიდან (ABC) სიბრტყემდე, თუ კათეტები 6 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია.

16 ABC მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის O ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია OM მართობი. სამკუთხედის AC და BC კათეტები, შესაბამისად, 6 სმ და 8 სმ-ის ტოლია. OM=5 სმ. იპოვე მანძილი M წერტილიდან: ა) სამკუთხედის გვერდებამდე; ბ) სამკუთხედის წვეროებამდე.

17 მოცემულია DABC პირამიდა, რომლის ყველა წიბოს სიგრძეა a სმ. DO მართობულია ABC სიბრტყის, DM მართობულია AB გვერდის. ON მართობულია DM-ის. ა) დაამტკიცე, რომ ON მართობულია ABD სიბრტყის. ბ) გამოთვალე მანძილი O წერტილიდან ABD სიბრტყემდე.



ტესტი თვითშემოწმებისათვის №10



1-3 ამოცანებში ისარგებლე მოცემული ნახაზით და შემდეგი პირობებით: ABC წესიერი სამკუთხედის O ცენტრიდან აღმართულია OD მართობი. D წერტილი შეერთებულია სამკუთხედის წვეროებთან.

1 ორწახნაგა კუთხე BC წიბოსთან არის:

ა) $\angle DCO$; ბ) $\angle DKO$;

გ) $\angle ABC$; დ) $\angle ADK$.

2 მანძილი O ცენტრიდან BCD წახნაგამდე არის:

ა) ON მონაკვეთის სიგრძე;

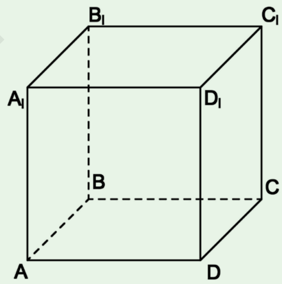
ბ) OK მონაკვეთის სიგრძე;

გ) OD მონაკვეთის სიგრძე;

დ) OC მონაკვეთის სიგრძე.

3 მანძილი D წერტილიდან (ABC) სიბრტყემდე არის:

ა) DK; ბ) DC; გ) DN; დ) DO.



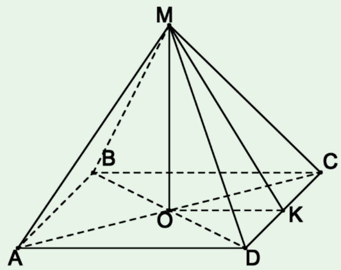
4 მოცემულია კუბი. AB=a. BB_1D_1D-ს ფართობია:

ა) a^2; ბ) $2a^2$;

გ) $a^2\sqrt{2}$; დ) 4a.

5 კუბის წახნაგის C_1D დიაგონალი $6\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლია. რას უდრის მანძილი D_1 წვეროდან ABCD კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე?

ა) $3\sqrt{6}$ სმ; ბ) 6 სმ; გ) $3\sqrt{2}$ სმ; დ) $6\sqrt{3}$ სმ.



6 ABCD კვადრატის O ცენტრიდან აღმართულია 8 სმ-ის ტოლი OM მართობი. M შეერთებულია DC გვერდის K შუა წერტილთან. რას უდრის MK მონაკვეთის სიგრძე, თუ DC=12 სმ?

ა) 8; ბ) 12; გ) 10; დ) 7.

7 იხილე წინა ამოცანის პირობა. გამოთვალე MC-სა და (ABC)-ს შორის კუთხის ტანგენსი.

8 α სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული AB მართობის სიგრძეა 10 სმ. AC დახრილსა და α სიბრტყეს შორის კუთხეა 30°. იპოვე AB მართობის გეგმილი AC დახრილზე.

აბა, სცადე!

მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. (იხილე 4.4 პარაგრაფის მე-8 ამოცანის ნახაზი). იპოვე (AB_1D_1) და (BDC_1) სიბრტყეებს შორის მანძილი, თუ კუბის წიბოა a.

მთელი კურსის გასამეორებელი დავალებები

1. გამოთვალე:

ა) $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$; ბ) $\mathrm{tg}180^\circ-\cos90^\circ$; გ) $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

დ) $\sin60^\circ+\sin120^\circ$; ე) $\cos30^\circ+\cos150^\circ$; ვ) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}$.

ზ) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; თ) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$; ი) $\sin(-210^\circ)+\cos(-240^\circ)$.

2. იპოვე $\cos\alpha$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ $\sin\alpha=\frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. იპოვე $\mathrm{tg}\alpha$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ $\cos\alpha=0,6,\ 270^\circ<\alpha<360^\circ$.

4. იპოვე $\sin\alpha$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ $\cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

5. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin(\pi-\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; ბ) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha);}$; გ) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$;

დ) $\dfrac{3\cos(\pi-\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(3\pi+\beta)}$; ე) $\dfrac{1}{\cos^2(\pi-\alpha)}-1$; ვ) $\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos^4\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

6. იპოვე:

ა) $f(x)=-3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=\frac{\pi}{4}$ წერტილში;

ბ) $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=\frac{\pi}{3}$ წერტილში.

7. იპოვე: ა) $y=2\sin^2x-1$; ბ) $y=1-2\cos^2x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

8. დაადგინე ლუწია თუ კენტი ფუნქცია: ა) $f(x)=x^2\sin x+x$; ბ) $f(x)=3\sin^2x+\dfrac{x^2}{\cos x}$.

9. იპოვე: ა) $y=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{4}+3\right)$; ბ) $y=\sin3x+2$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

10. რომელია მეტი:

ა) $\sin\frac{3\pi}{4}$ თუ $\sin\frac{9\pi}{8}$? ბ) $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$ თუ $\sin\frac{9\pi}{8}$? დ) $\cos\frac{\pi}{3}$ თუ $\cos\frac{4\pi}{5}$?

ე) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ თუ $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{9}$? ვ) $\operatorname{tg}1$ თუ $\operatorname{tg}0,2$? ზ) $\sin 3$ თუ $\sin 1,6$?

11. გამოთვალე:

ა) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\arccos 0$; გ) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; დ) $\arcsin(-1)$;

ე) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; ვ) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ზ) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; თ) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

12. ამოხსენი განტოლება:

ა) $2\sin x + 1 = 0$; ბ) $3\operatorname{tg}x - \sqrt{3} = 0$; გ) $2\cos x - 1 = 0$; დ) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

ე) $\cos 3x = -1$; ვ) $\operatorname{tg}(x - \pi) = 1$; ზ) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$; თ) $2\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$.

13. ამოხსენი $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ განტოლება და იპოვე $[0;\pi]$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნები.

14. ABC სამკუთხედში AB= 5სმ, BC=6სმ, ხოლო $\cos\angle B = -\frac{1}{20}$. იპოვე: ა) მესამე გვერდი; ბ) ფართობი; გ) შემოხაზული წრის რადიუსი; დ) ჩახაზული წრის რადიუსი.

15. ABC სამკუთხედში AB=6 სმ, BC=8 სმ, ხოლო სამკუთხედის ფართობია 12 სმ^2. გამოთვალე B კუთხის სიდიდე.

16. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული ბისექტრისა ჰიპოტენუზას 6 სანტიმეტრისა და 8 სანტიმეტრის ტოლ მონაკვეთებად ჰყოფს. გამოთვალე ბისექტრისის სიგრძე.

17. სამკუთხედის ორი გვერდია 13 სმ და 15 სმ, ხოლო მესამე გვერდის მედიანა 7 სმ. იპოვე: ა) მესამე გვერდი; ბ) ფართობი.

18. M, N, P და Q წერტილები არ ძევს ერთ სიბრტყეში. შესაძლებელია თუ არა, რომ MQ და NP წრფეები კვეთდნენ ერთმანეთს?

19. დაადგინე, ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი: თუ პარალელოგრამის ორი წვერო და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი α სიბრტყეშია, მაშინ პარალელოგრამიც α სიბრტყეშია.

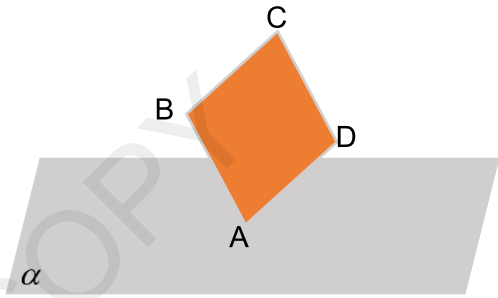
20. A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილია a სმ, α სიბრტყეზე მდებარე B წერტილამდე – b სმ, ხოლო α სიბრტყეზე A წერტილის გეგმილიდან B წერტილამდე – c სმ. რომელი ტოლობაა მართებული?

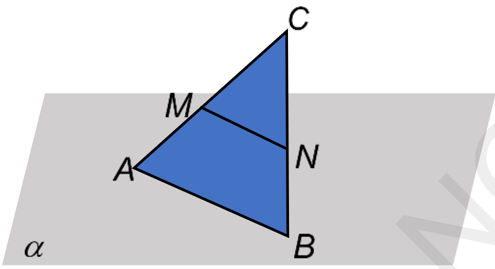
ა) $c^2=a^2+b^2$; ბ) $a^2=b^2+c^2$; გ) $c=a+b$; დ) $b^2=a^2+c^2$.

21. შესაძლებელია თუ არა, რომ წინა ამოცანის პირობებში შერულდეს $a=b+c$ ტოლობა?

22. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის ჰიპოტენუზაა 12 სმ. პირამიდის წვეროდან ფუძის სამივე წვერომდე 10 სმ-ის ტოლი მანძილია. იპოვე მანძილი პირამიდის წვეროდან ფუძის სიბრტყემდე.

23. ABCD პარალელოგრამის A წვერო ძევს α სიბრტყეში, ხოლო დანარჩენი წვეროები არ ძევს α სიბრტყეში. დაამტკიცე, რომ BC და CD წრფეები კვეთენ α სიბრტყეს

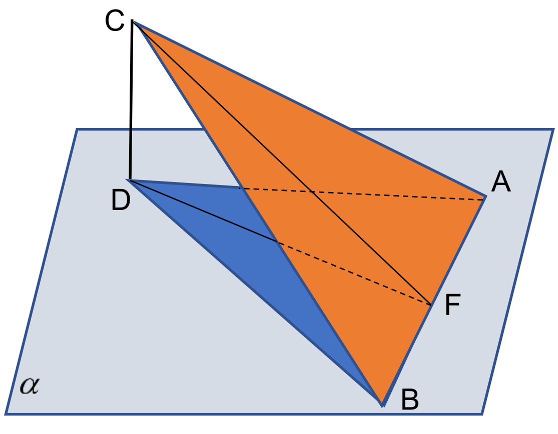




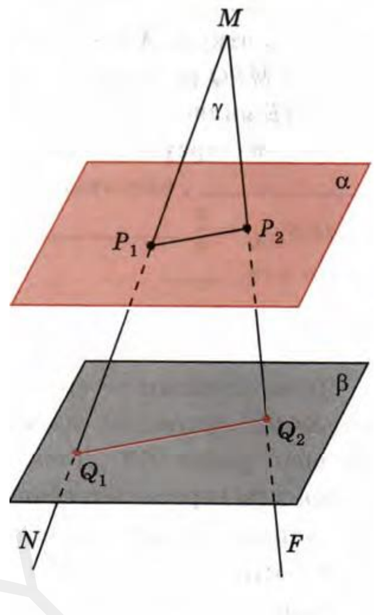
24. ABC სამკუთხედის AB გვერდი ძევს α სიბრტყეში. $C \notin \alpha$. M და N შესაბამისად, AC და BC გვერდების შუაწერტილებია. დაამტკიცე, რომ $MN \parallel \alpha$.

25. M წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებულია MO მართობი და MA და MB დახრილები, რომელნიც თავის გეგმილებთან $\angle MAO = 45°$, $\angle MBO = 30°$ კუთხეებს ადგენენ. დახრილებს შორის კუთხე $90°$ -ის ტოლია. იპოვე მანძილი დახრილთა ფუძეებს შორის, თუ $MA = \sqrt{3}$ სმ.

26. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზა α სიბრტყეში, ხოლო C წვერო α სიბრტყის გარეთ მდებარეობს. $AB = 12\sqrt{3}$ სმ, ხოლო C წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი $DC = 9$ სმ. იპოვე კუთხე ABC სამკუთხედის სიბრტყესა და α სიბრტყეს შორის.



27. ნახაზზე მოცემული α და β სიბრტყეები გადაკვეთილია MN და MF წრფეებით, ხოლო შესაბამისი კვეთის წერტილებია: P_1, P_2, Q_1, Q_2. იპოვე P_1P_2, თუ $MP_1 : MQ_1 = 3 : 4$, $Q_1Q_2 = 72$ სმ.



28. გამოთვალე:

ა) $2^{\log_2 3}$, $3^{\log_3 5}$, $7^{\log_7 9}$;

ბ) $2^{\log_2 3+\log_2 5}$, $\left(3^{\log_3 7}\right)^2$, $\left(3^2\right)^{\log_3 7}$;

გ) $7^{2\log_7 3}$, $10^{3\lg 5}$, $(0,1)^{\lg 7}$;

დ) $2^{3\log_8 5}$, $9^{\log_3 10}$, $5^{\log_{25} 49}$.

29. ამოხსენი განტოლება:

ა) $27^x = 9^{\frac{1}{3}}$; ბ) $(0,5)^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$;

გ) $9^{x+1} + 3^{x+2} = 18$; დ) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 10$.

30. გამოთვალე:

ა) $\log_2 4$; $\log_2 16$; $\log_3 27$; $\log_3 81$; $\lg 100$; ბ) $\log_4 1$; $\log_5 \frac{1}{5}$; $\log_5 5^3$; $\log_{49} 7^5$.

31. იპოვე x:

ა) $\log_5 x = 2$; ბ) $\log_3 x = -1$; გ) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$; დ) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

ე) $\log_x \frac{1}{16} = 2$; ვ) $\log_x 81 = 4$; ზ) $\log_x \frac{1}{4} = -2$; თ) $\log_x 27 = 3$.

32. ამოხსენი განტოლება:

ა) $16^{x-9} = 0,5$; ბ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$; გ) $3^{3x-4} : 3^{-5x+2} = 27$; დ) $5^{x-7} = \frac{1}{125}$;

ე) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$; ვ) $9^{-5+x} = 729$; ზ) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512$; თ) $6^{2x-6} \times 6^{5-3x} = 216$.

33. ამოხსენი უტოლება:

ა) $5^{x^2-1} > 0,2$; ბ) $(0,2)^{x^2-2} > 5$; გ) $3^x < \frac{1}{9}$; დ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 4$.

34. ამოხსენი განტოლება:

ა) $\log_2(x-15) = 4$; ბ) $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 0$;

გ) $\lg\left(x^2 - 2x - 4\right) = \lg 11$; დ) $\lg^2 x + 2\lg x = 8$.

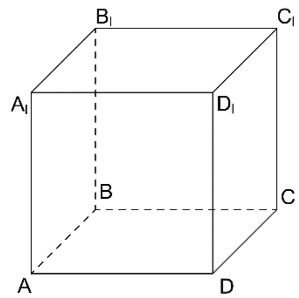
35. ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_{0,6}x > 2$; ბ) $\log_7 x < 1$; გ) $\lg x \geq -3$; დ) $\lg x \leq -2$.

36. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი. დაასახელე ვექტორი, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილებია პარალელეპიპედის წვეროები და ტოლია:

ა) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$ ჯამის;

ბ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC_1}$ სხვაობის.



37. ABC სამკუთხედის სიბრტყის გარეთ აღებულია D წერტილი. M და N შესაბამისად AB და DC მონაკვეთების შუა წერტილებია. წარმოადგინე $\overrightarrow{MN}$ ვექტორი $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ და $\overrightarrow{DC}$ ვექტორების საშუალებით.

38. არანულოვანი $\vec{a}$ ვექტორის პირველი და მეორე კოორდინატები 0-ის, ხოლო მესამე კოორდინატი -1-ის ტოლია. რას უდრის კუთხე $\vec{a}$ ვექტორსა და $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებს შორის?

39. იპოვე კუთხე $\vec{a}(0;1;-1)$ და $\vec{b}(1;0;-1)$ ვექტორებს შორის.

40. რა არის იმის ალბათობა, რომ 58-დან 82-მდე (ჩათვლით)ნატურალური რიცხვებიდან შემთხვევით ამოღებული რიცხვი იქნება 6-ის ჯერადი?

41. ფაბრიკის მიერ გამოშვებული ყოველი 1000 ცალი მაისურიდან 3 მაისური დეფექტიანია. რა არის იმის ალბათობა, რომ შეძენილი ორი მაისურიდან არცერთი არაა დეფექტიანი?

42. მოსწავლეთა რაიონულ კონფერენციაში 3 მე-10 კლასელი, 5 მე-11 კლასელი და 4 მე-12 კლასელი მოსწავლე მონაწილეობს. გამომსვლელთა თანმიმდევრობა მათ შორის კენჭისყრით უნდა დადგინდეს. რა არის იმის ალბათობა, რომ პირველი გამომსვლელი იქნება მე-10 კლასელი, ხოლო მეორე გამომსვლელი მე-11 კლასელი?

43. ორი კამათელის გაგორებისას ერთ-ერთ კამათელზე მოვიდა 6 ქულა. რა არის იმის ალბათობა, რომ მეორე კამათელზე მოვა: ა) 6 ქულა? ბ) 5 ქულა?

საგნობრივი საძიებელი

სახელმძღვანელოში გამოყენებული სიმბოლოები

$A \in a$ – A წერტილი მდებარეობს a წრფეზე;

$a \dot{-} b$ – a და b აცდენილი წრფეებია ;

$a \subset \alpha$ – a წრფე მდებარეობს α სიბრტყეში;

$||$ – პარალელურია;

$\perp$ – მართობულია;

$\in$ – ეკუთვნის ($x \in X$ – x ელემენტი ეკუთვნის X სიმრავლეს);

$\notin$ – არ კუთვნის ($x \notin X$ – x ელემენტი არ ეკუთვნის X სიმრავლეს);

$A \cap B$ – A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა;

$A \cup B$ – A და B სიმრავლეთა გაერთიანება;

$A \setminus B$ – A და B სიმრავლეთა სხვაობა;

$A \subset B$ – A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა;

$F \sim G$ – F და G ფიგურები მსგავსია;

$\Rightarrow$ – გამომდინარეობს;

$\Leftrightarrow$ – ტოლფასია;

P_n – გადანაცვლებათა რაოდენობა;

A_m^n – წყობათა რაოდენობა;

C_m^n – ჯუფთებათა რაოდენობა;

$\overline{A}$ – არა A ;

$A+B$ – ორი გამონათქვამის ან/და ორი ხდომილობის ჯამი;

$A \cdot B$ – ორი გამონათქვამის ან/და ორი ხდომილობის ნამრავლი;

$p(A)$ – A ხდომილობის ალბათობა;

$p(A/B)$ – A ხდომილობის ალბათობა B პირობით;

$S_{\Delta ABC}$ – ABC სამკუთხედის ფართობი;

$\varnothing$ – ცარიელი სიმრავლე.

საცნობარო მასალა

ძირითადი ფორმულები

ტრიგონომეტრია

დაყვანის ფორმულები	ტრიგინომეტრიული იგივეობები	სამკუთხედების ამოხსნა
$\sin(90°\pm\alpha)=\cos\alpha;\ \cos(90°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha;$ $\sin(180°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha;\ \cos(180°\pm\alpha)=-\sin\alpha;$ $\sin(270°\pm\alpha)=-\cos\alpha;$ $\cos(270°\pm\alpha)=\pm\sin\alpha.$	π რად $=180°;$ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha;\ 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C};$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha.$

ხარისხი და ლოგარითმი

$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha;\ \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha};\ (a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta};$ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\ a^{-\alpha}=\frac{1}{a^\alpha};\ a^0=1;$	$\log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b;$ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c;$ $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c;$ $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$	$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c b};$ $\lg a=\log_{10}a;\ \ln a=\log_e a.$

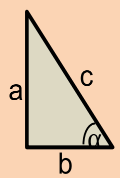
ვექტორები

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cos\alpha=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2;$	$\vec{a}(x;y;z);\ a=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$	$\cos\alpha=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

ფართობი

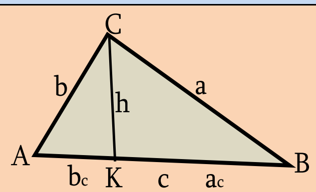
სამკუთხედის	სამკუთხედის	წრის
$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2};\ S=\frac{ab\sin\alpha}{2};$ ტოლგვერდა სამკუთხედში: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3};\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p=\frac{a+b+c}{2};$ $S=\frac{abc}{4R};\ S=pr.$	$S=\pi r^2;$ სექტორის $S=\frac{\pi r^2\alpha}{360}.$

მართკუთხა სამკუთხედი



$\sin\alpha=\frac{a}{c},\ \cos\alpha=\frac{b}{c},\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}.$

$R=\frac{c}{2};\ r=\frac{a+b-c}{2}$



$h^2=a_c\cdot b_c$

$a^2=a_c\cdot c$

$b^2=b_c\cdot c$

$a\cdot b=h\cdot c$

არითმეტიკული პროგრესია	გეომეტრიული პროგრესია
$a_n=a_1+d(n-1);\ S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n.$	$a_n=a_1q^{n-1};\ S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$

ალბათობა

$$p(A)+p(\bar{A})=1;\quad p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B);\ P(A/B)=\frac{p(A\cdot B)}{p(B)}.$$

მათემატიკური ლექსიკონი

ანალოგია – (ბერძნული სიტყვა – **analogia** – „შესატყვისობა“, მსგავსება“.)

აპოთემა – (ბერძნული სიტყვა - **apothema - „**მიდგმული“.)

- წესიერ მრავალკუთხედში არის მისი ცენტრიდან ნებისმიერ გვერდზე დაშვებული მართობული მონაკვეთი.
- წესიერ პირამიდაში არის მისი ნებისმიერი გვერდითი წახნაგის აპოთემა.

არგუმენტი (ფუნქციის) **–** (თავსართი ლათინური სიტყვა - „საგანი“, „ნიშანი“) - დამოუკიდებელი ცვლადი სიდიდე, რომლის მნიშვნელობითაც განისაზღვრება ფუნქციის მნიშვნელობა.

აქსიომა – (ბერძნული სიტყვა **–** axiōma) — ამ თუ იმ მეცნიერებაში ამოსავლად მიღებული დებულება, რომელიც თვითონ არ არის დამტკიცებული, მაგრამ აუცილებელია სხვა დებულებათა დასამტკიცებლად. მაგალითად, გეომეტრიული აქსიომა.

გრადუსი – (ლათინური სიტყვა) **–**კუთხის საზომი ერთეული, რომელიც მართი კუთხის $\frac{1}{90}$ ნაწილია.

გრაფიკი – (ბერძნული სიტყვა **– graphikos –** „დახაზული“) ფუნქციის გრაფიკი **–** წირი სიბრტყეზე, რომელიც გამოსახავს ფუნქციის არგუმენტზე დამოკიდებულებას.

დიაგონალი – (ბერძნული სიტყვა **–dia და gonium –**„კუთხეზე“) წრფის მონაკვეთი, რომელიც მრავალკუთხედის ერთ გვერდთან არამდებარე ორ წვეროს აერთებს.

დიამეტრი – (ბერძნული სიტყვა **– diametros –** „განივა“, „გამჭოლი“, „გამზომი“) წრფის მონაკვეთი, რომელიც მრავალკუთხედის ერთ გვერდთან არამდებარე ორ წვეროს აერთებს.

დისტრიბიტულობა – (ლათინური სიტყვა **– distributivus** - „განმანაწილებელი**”) –** კანონი, რომელიც უკავშირდება რიცხვთა შეკრებასა და გამრავლებას.

ვერტიკალური კუთხეები – (ბერძნული სიტყვა **– verticalis** -„წვეროსეული“). საერთო წვეროს მქონე კუთხეთა წყვილი, რომელიც ორი წრფის გადაკვეთით მიიღება ისე, რომ ერთი კუთხის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების გაგრძელებას წარმოადგენს.

ვექტორი – (ლათინური სიტყვა „გამავრცელებელი“) **–** წრფის მიმართული მონაკვეთი, რომლის ერთ ბოლოს ჰქვია ვექტორის საწყისი, ხოლო მეორეს — ბოლო.

ინდექსი – (ლათინური სიტყვა - **index** „მაჩვენებელი“) **–**რიცხვითი ან ასოითი მაჩვენებელი, რომელიც ერთვის მათემატიკურ გამოსახულებებს, მათი ერთმანეთისაგან განსხვავების მიზნით.

ინტერვალი – (ლათინური სიტყვა **–intervallum** - „შუალედი“, „მანძილი“) **–** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $a < x < b$ უტოლობას.

ირაციონალური რიცხვი – (ბერძნული სიტყვა - **irrationalis –**„ უგუნური“) რიცხვი, რომელიც არაა რაციონალური.

კათეტი – (ლათინური სიტყვა - **katetos** - „შვეული“, „ციცაბო“) **–** მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის ერთერთი გვერდი.

კვინტილიონი –(ლათინური სიტყვა - **quaterni**) **–** რიცხვი, რომელიც ერთიანითა და მომდევნო 18 ნულით ჩაიწერება ერთერთი გვერდი.

კომუტატიურობა – (ლათინური სიტყვა - **commutativus –** „ცვალებადი“) **–** ჯამისა და ნამრავლის თვისება, რომელიც $a+b=b+a$, $ab=ba$ ტოლობით გამოისახება.

კოორდინატები – (ლათინური სიტყვა **–ordinates –** „განსაზღვრული“) გარკვეული წესით აღებული რიცხვები, რომელნიც განსაზღვრავენ წერტილის მდებარეობას წრფეზე, სიბრტყეში, სივრცეში.

კოსინუსი – (ლათინური სიტყვა **– complementi sinus, complementus –**„შევსება“, „დამატება“, **sinus –** ფოსო“, „ღრმული“) ტრიგონომეტრიული ფუნქცია.

ლოგარითმი – (ბერძნული სიტყვა **– logos –** „დამოკიდებულება“ , **arithmos –** „რიცხვი“) ხარისხის მაჩვენებელი m, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a , რომ მივიღოთ N.

მასშტაბი – (გერმანული სიტყვა mas – „ზომა“, stab – „ჯოხი“) ნახაზზე მოცემული მონაკვეთის სიგრძის ფარდობა შესაბამისი მონაკვეთის ნატურალურ სიგრძესთან.

მაქსიმუმი – (ლათინური სიტყვა **– maximum –**„უდიდესი“) ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც განსაზღვრულია მისი განსაზღვრის არის სიმრავლეზე.

მედიანა (სამკუთხედის) **–** (ლათინური სიტყვა - **medianus –**„შუა“, „საშუალო“) მონაკვეთი, რომელიც სამკუთხედის წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შუა წერტილთან აერთებს.

ორდინატა – (ლათინური სიტყვა **– ordinatum** - „რიგის მიხედვით“, „წესრიგის მიხედვით “) წერტილის ერთ ერთი კოორდინატი დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში (როგორ წესი - მეორე), რომელიც y ასოთი აღინიშნება.

პარალელეპიპედი – (ბერძნული სიტყვა - **parallelos –**„პარალელური“ და **epipedos** - „ზედაპირი“) სივრცითი ფიგურა, რომლის ექვსივე წახნაგი პარალელოგრამია.

პარალელოგრამი –(ბერძნული სიტყვა **– parallelos –** „პარალელური“ და „ხაზები“) ოთხკუთხედი, რომლის მოპირაპირე გვერდები წყვილ-წყვილად პარალელურია.

რადიუსი – (ლათინური სიტყვა –radius –„ჩხირი ბორბალში“) მონაკვეთი, რომელიც წრეწირის ცენტრს მის რომელიმე წერტილთან აერთებს.

რიცხვი π **–** წრეწირის სიგრძის დიამეტრთან ფარდობა. $\pi \approx 3{,}1415926...$

სტერეომეტრია – (ბერძნული სიტყვა **– stereos–**„მოცულობითი“ და **metreo –**„გაზომვა“) გეომეტრიის ნაწილი, რომელიც სივრცით ფიგურებს შეისწავლის.

ტრიგონომეტრია – (ბერძნული სიტყვა – trigonon – „სამკუთხედი“ და metreo –„გაზომვა“) შეისწავლის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და მათ გამოყენებას გეომეტრიაში.

ფუნქცია – (ლათინური სიტყვა **– functio –**„შესრულება“) მათემატიკის ერთ ერთი ძირითადი ცნება, რომელიც გამოსახავს ერთი ცვლადი სიდიდის დამოკიდებულებას მეორეზე.

ჰიპერბოლა – (ბერძნული სიტყვა **– hyperballo – „**გავდივარ რაღაცის გავლით“) გახსნილი მრუდი ორი უსასრულოდ გაგრძელებული შტოთი.

ჰიპოტენუზა – (ბერძნული სიტყვა **–gyipotenusa** „ მომჭიმავი“) მართკუთხა სამკუთხედის, მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.

ჰომოთეტია – (ბერძნული სიტყვა **–** „ ტოლი“, „ერთნაირი“) მსგავსი ფიგურების ისეთი განლაგება, რომლის დროსაც ამ ფიგურების შესაბამისი წერილების შემაერთებელი წრფეები ერთ წერტილში გადაიკვეთება.

პასუხები

თავი 1

1.1 1. ა), დ) და ე). 3. ლუკას ვარაუდი. 4. შეასრულა. 5. არ შეასრულა. 6. 13. 7. 3. 8. ა). 9. ა) და დ). 14. არაა ტოლფასი. 15. $A \Rightarrow B$ ჭეშმარიტია, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ მცდარი. 16-17. ჭეშმარიტია სამივე გამონათქვამი.

1.2 1. გ). 2. დ) $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2};+\infty\right)$. 3. ა) 10-ის ჯერადი რიცხვები; დ) კენტი რიცხვები. 4. ნამრავლი – $\varnothing$, ჯამი – $(-\infty;1) \cup (4;+\infty)$. 5. ნამრავლი (2;5) წერტილი; ჯამი– ორი წრფის გაერთიანება. 7. ნამრავლი–რგოლი, ჯამი მთელი სიბრტყე. 8. პარალელოგრამების სიმრავლე.

1.3 4. შეიძლება ორივე იყოს ჭეშმარიტი ან ორივე მცდარი 5. ა) 1 არც მარტივია და არც შედგენილი; ბ) 25 არ იყოფა 2-ზე და არ იყოფა 3-ზე, მაგრამ იყოფა 5-ზე; გ) $\sqrt{2}$ არაა რაციონალური; დ) არ ჩაიხაზება თუ კვადრატი არაა.

1.4 7. გ) სამკუთხედი მაშინ და მხოლოდ მაშინაა მართკუთხა, როცა რომელიმე გვერდის მედიანა ამ გვერდის ნახევრის ტოლია.

თავი 2

2.1 5. ე. 6. ე) -3,75. 8. ე) 3,(142857). 11. ა) $\frac{7}{9}$; ბ) 1; ი) $1\frac{4182}{99900}$; კ) $9\frac{2}{165}$. 12. $\frac{11}{20}$. 13. $\frac{22}{27}$, $\frac{23}{27}$.

2.2 1. ა) 2,2; ბ) 2,6. 3. 4,882. 4. ა), ე) და ვ). 6. ა) $1\frac{3}{7}$ ბ) 10; გ) 11; დ) $\sqrt{2}$. 8. პირველის, 2-ჯერ. 9. 1,414 მ. 10. 50 სმ. 12. $\frac{7931}{9999}$.

2.3 5. ა) $\sqrt[60]{a^{47}}$; ვ) $\sqrt[24]{x^{65}}$. 7. ა) 2; ო) 225. 8. ა) 0,2; დ) 2. 9. ა) $3\frac{1}{3}$; ბ) 26; გ) 2; დ) 6. 11. ა) 0,5; ბ) $-\frac{16}{45}$. 12. ა) x+1; ბ) $-\sqrt{x}$. 13. ა) 8; ბ) -2x; გ) 2x; დ) 2x. 14. ა) $x=\frac{2}{7}$, $y=\frac{1}{14}$; ბ) $x=\frac{7}{9}$, $y=-\frac{2}{3}$. 15. ა) 2; ბ) 2; გ) 0,1. 16. ა) 20; დ) 2 5. 17. 3000 ლარი. 18. 2000 ლარი. 19. 71 დოლარი. 20. 20%- ით. 21. 1023.

2.4 1. 20%. 2. 1000 ლარი. 3. 3,71 ლარი. 4. ა) 50%-ით; ბ) 125%-ით. 5. ა) 25%-ით; ბ) 43,75%-ით. 6. ა) 33,(3)%-ით; ბ) 70,37%-ით. 7. 715,82 ლარი. 8. 40000 ლარი. 9. 3570 ლარი. 10. 2000 ლარი. 11. 1516 ლარი. 12. 13800 ლარი. 13. 219,40 ლარი. 14. 64680 ლარი. 15. 3,4%. **აბა, სცადე!** 2038წლის მარტში.

თავი 3

3.1 1. 3-ჯერ. 2. 5 დღის. 3. ა) 9; ბ) 9. 4. ა) -3; ბ) -3; გ) -3. 5. 20. 10. 2. 11. პერიოდია ყოველი რაციონალური რიცხვი, უმცირესი დადებითი პერიოდი არ აქვს. 13. დ) 0,5. 14. $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}$. 15. ა)1; ბ)1; გ)1; დ)1.

3.2 3. ა)(x;y); ბ) (x;y); გ)(-x;-y). 6. ა)დადებითი; ბ)უარყოფითი; გ) უარყოფითი; დ)დადე-ბითი. ვ)დადებითი. 7. ა)დადებითი; ბ)დადებითი; გ) უარყოფითი; დ)დადებითი. 9. ა)უარყოფითი; ბ)დადებითი; გ) დადებითი. 13. ვ) $tg\,10°$. 15. გ) -c. 16. $60°$ და $120°$. 17. $45°$ და $225°$. 18. $90°$ და $270°$. 20. ა) -1; დ) 0. 21. ა) $2a-5a^2$; დ)15. 22. ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) π; გ) $\frac{\pi}{12}$. 23. გ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}$. 24. ა) $160°$; ბ) $200°$. 25. ა) $160°$; ბ) $340°$. 26. ა) $180°\cdot k,\ k\in Z$; ბ) $90°+180°\cdot k,\ k\in Z$. 30. გ) $\sqrt{0,91}$.

3.3 6. უარყ., დადებ., დადებ. 8. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$. 9. $12°, 36°, 132°$. 12. ა) 0; დ)-2. 13. ა) $2a-a^2$; დ) $\frac{a+b}{a-b}$. 15. ა) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; ბ) $2\pi k, k\in Z$; გ) $\pi k, k\in Z$. 16. ანიშ. 17. ა) $\sin 0,5<0,5$; ბ) $\cos 0,5>0,5$; გ) $tg1>1$. 18. 12სმ². 24. ლუწია: ბ) და გ); კენტია: ა) და ვ).

3.4 2. ლუწია ბ), კენტი ა) და გ). 4. ა) $\frac{2\pi}{5}$; ვ) 2π. 9. $-\frac{\sqrt{21}}{5}$. 10. $\frac{\sqrt{15}}{16}$. 11. ა) $[-3;1]$; ბ) $[-1;0]$; გ) $[-1;2]$; დ) $[0;+\infty)$. 13. ა) 2π; ბ) π; გ) π; დ) π; ე) 2π; ვ) ზ) π; თ) 12π. 14. $\left[\frac{3}{4};3\right]$; 15. ა) 0,5.

შესაძლებელია თუ არა. შეუძლებელია. აბა, სცადე! $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

3.5 8. ა) $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; ბ) $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; გ) π. 9. ა) $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; ბ) $0,\ \pi$; გ) $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. 10. ა) $\cos\alpha$; ბ) $-\frac{1}{\cos\alpha}$; თ) $\sin^2\alpha$. 11. დ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12. ა)-6; ე) $-\frac{6+\sqrt{6}}{6}$. 13. ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ)1; გ) 0. 14. ა)-1; ბ) $\frac{\sin 50°}{2}$. 17. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{4}$; გ) $\frac{1}{3}$. 18. ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{1}{4}$. 20. ა) -a; დ) -a.
21. cos10 =-cos(10-3π); sin11=-cos(11-3,5π). 24. ა) 0; ბ) 2; გ)1.

3.6 13. ა) 3 და 1; დ) 1 და 0,5. 14. 45. 15. ა) 5, -4; ბ) $\frac{\pi k}{2}, k\in Z$. 17. $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. 19. a. 20. ა) a; ბ) -a; g) a; დ) -a; ე) $\sqrt{1-a^2}$.

3.7 9. $\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{2}, \cos\frac{4\pi}{3}$. 11. $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. 12. ა) 3 და -1; დ) 1 და 0,5. 13. $\pm\frac{5\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6}$. 14. ა)5 და -2; ბ) $\frac{\pi k}{2}, k\in Z$. 15. $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$. 16. 30.

17. ა) 5; დ) 0,2. 18. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

3.8 3. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$. 4. $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$. 4,8 მ³. 5. $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.
7. $\pi k, k\in Z$. 9. ა) 1; ბ) 1; გ) $\mathrm{tg}^{-1}\alpha$. 11. ა) $\sin\alpha=\pm 0,6, \cos\alpha=\pm 0,8$.

3.9 1. ა) $\frac{\pi}{4}$; გ) $-\frac{\pi}{4}$; ე) $\frac{\pi}{2}$; ზ) 0. 2. ა) $\frac{\pi}{4}$; გ) $\frac{3\pi}{4}$; ე) 0; ზ) $\frac{\pi}{2}$. 3. ა) $\frac{\pi}{4}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{6}$; ზ) 0. 4. დ). 5. ა) 1სმ; ბ) 0,13; გ) 7; დ) 0,5. 6. ა) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$;
გ) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; ზ) $\pi k, k\in Z$. 7. ა) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$;
გ) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; ე) $2\pi k, k\in Z$; ზ) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. 8. ა) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$;
გ) $\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; ზ) $\pi k, k\in Z$. 9. ა) $\frac{\pi}{2}k, k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$.
10. $\frac{7\pi}{6}$ და $\frac{11\pi}{6}$. 11. $\frac{7\pi}{4}$. 12. $-\frac{2\pi}{3}$. 13. ა) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$;
გ) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; დ) $\pi k, k\in Z$. 14. $\pi k, k\in Z$. 15. ბ) $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi k, k\in Z$.
16. ა) 0; ბ) $2\pi-4$; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; ე) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 17. ა) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; გ) $\pi k, k\in Z$; დ) $\pi k, -\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$. 18. ა) a; ე) $\sqrt{1-a^2}$; 19. $AB=\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $AC=\frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$.
20. ა) $\frac{\alpha}{2}$; ბ) $180°-\frac{\alpha}{2}$.

3.10 1. ა) 5სმ; ბ) $\sqrt{37}$ სმ; გ) $\sqrt{13}$ სმ. 2. ა) $\sqrt{169-60\sqrt{3}}$ სმ; ბ) 13სმ; გ) $\sqrt{169+60\sqrt{3}}$ სმ.
4. $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ სმ. 5. $5\sqrt{10}$ სმ. 6. ა) $4\sqrt{5}$ სმ; ბ) $4\sqrt{5}$ სმ ან $8\sqrt{5}$ სმ. 7. ა) 45°, 45°, 90°; ბ) 30°, 30°, 120°. 8. ა) 90°; ბ) 150°. 9. ა) ბლაგვკუთხა; ბ) მართკუთხა; გ) მახვილკუთხა.
10. 8სმ. 11. $2\sqrt{13}$ სმ. 12. $2\sqrt{7}$ სმ და $2\sqrt{19}$ სმ. 13. 3სმ და $\sqrt{17}$ სმ. 14. $\frac{\sqrt{241}}{2}$ სმ, 7სმ, $\frac{\sqrt{145}}{2}$ სმ. 15. $3\sqrt{2}$ სმ. 16. $\frac{\sqrt{190}}{2}$. 17. $4\sqrt{7}$ სმ, $2\sqrt{37}$ სმ, 14სმ; ან $2\sqrt{97}, 2\sqrt{13}, 4\sqrt{19}$.
19. $\frac{2\sqrt{31}}{\sqrt{7}}$. 20. $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ მ. 21. $2\sqrt{3}$ სმ. 22. $\arccos\frac{16}{65}$ ან $\arccos\frac{56}{65}$. 23. 4სმ. 24. $1<x<3$.
25. $\frac{a}{\sin\alpha}$. **აბა, სცადე!** გამომდინარეობს კოსინუსების თეორემიდან.

3.11 1. ა) 10სმ; ბ) $8\sqrt{2}$ სმ; გ) $4\sqrt{3}$ სმ. 2. ა)6სმ; ბ)$6\sqrt{2}$ სმ; გ)$6\sqrt{3}$ სმ; დ)12სმ; ე)$6\sqrt{3}$ სმ. 3. ა) 1; ბ) 0,5; გ) $\frac{5}{12}$. 5. $60°$ან $120°$. 6. 10სმ. 7. ა) 9; ბ) 3; გ) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. 8. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ სმ. 9. $\frac{16\sqrt{3}\sin 40°}{3}$ სმ, $\frac{16\sqrt{3}\sin 80°}{3}$ სმ. 10. $\arccos 0,2$; $\arccos\frac{19}{35}$; $\arccos\frac{5}{7}$. 11. 4, 90°, 30°. 12. $\frac{5\sqrt{13}}{3}$. 14. $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 15. $8\frac{1}{8}$სმ. 16. $\frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$მ. 17. $4R\sin\alpha+\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 20. 136სმ². 21. 27. 22. 24სმ². 23. 52სმ². 24. 8სმ².

3.12 3. ა)6სმ²; ბ)$4\sqrt{6}$ სმ²; გ)336სმ²; დ) $\sqrt{10}$ სმ². 4. ა)R= 8,5სმ; r=3სმ; h=$\frac{120}{17}$; ბ) R=$3\frac{1}{8}$ სმ; r=1,5სმ; h=4 სმ; გ)R=$\frac{77}{4\sqrt{10}}$ სმ; r= $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ სმ; h=$2\sqrt{10}$ სმ. 6. ა) 50 სმ²; დ)$100\sin 40°$ სმ². 8. ა)$\sqrt{17}$ სმ; ბ)$\sqrt{65}$ სმ. 9. 6სმ². 10. 15 სმ². 11. $25(3-\sqrt{3})$ სმ². 13. $0,25\sqrt{(a+b+2m)(a+2m-b)(b+2m-a)(a+b-2m)}$. 14. 36სმ². 18. ა)2a; ბ)$a\sqrt{3}$; გ) a; დ) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; ე) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. 19. 36.

თავი 4

4.1 4. AB წრფეზე. 5. ა) N; ბ) Q; გ) P და Q. რა. 6. მცდარია: ვ) და თ), დანარჩენი ჭეშმარიტია. 7. ე) არა, დანარჩენი კი. 8. გ) ABC; ვ) AC. 9. ა) ASC და DEF; ვ) ASB და BSC. 10. ბ)და გ). 12. $a\sqrt{5}$ სმ. 13. $\frac{a\sqrt{29}}{2}$ სმ. 14. არ ძევს.
შესაძლებელია თუ არა? შესაძლებელია.

4.2 1. ბ). 2. გ). 3. დ). 4. ბ). 6. მართებულია მხოლოდ ა). 7. ერთი ან არცერთი. 8. ჭეშმარიტია ა), მცდარია ბ). 9. ა)$90°$; ბ)$0°$; გ)$0°$; დ)$90°$; ე) $45°$. 10. ა)$45°$; ბ) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ. 11. ა) DC_1; ბ) A_1C_1; გ) A_1D; დ) A_1C_1D; $P=3\sqrt{2}a$ სმ, $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ სმ². 12. 1.
13. ჭეშმარიტია. 13. 3. შესაძლებელია თუ არა? შეუძლებელია. აბა, სცადე! 10.

4.3 3. არ შეიძლება. 4. ბ) 8სმ. 5. გ). 6. ბ) 5სმ. 9. გ) 20სმ. 10. გ)1,5aსმ; დ)$\frac{a\sqrt{7}}{2}$ სმ.

4.4 1. დ). 2. ა). 3. გ). 4. ჭეშმარიტია. 5. გ). 8. $18\sqrt{3}$ სმ². 9. OB=2,4 სმ; $A_1B_1=\frac{20}{3}$ სმ. 13. ა)24სმ; ბ)24სმ². 14. 22 სმ. 15. ა)$3\frac{1}{3}$ სმ; 10სმ; ბ)1:9.

აბა, სცადე! მიიღება ტეტრაედრის (სამკუთხა პირამიდის) კარკასი.

4.5 1. გ). 2. დ). 3. დ). 4. ა). 8. ა) 7,2 სმ და 12,8 სმ; ბ)9,6სმ. 9. ა) $13+5\sqrt{13}$ სმ ან $5+5\sqrt{13}$ სმ; ბ) 39 სმ^2 ან 15 სმ^2.

4.6 2. 4. 3. ბ). 4. ტოლია. 5. შეიძლება იყოს ტოლი. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. 6 სმ. 8. $4\sqrt{5}$ სმ, 6სმ. 9. 12სმ. 10. $\frac{5}{13}$. 11. 7სმ, 1სმ. 12. არ შეიძლება. 13. ორივე. 14. ა)მართკუთხედი, $a^2\sqrt{2}$; ბ) $a\sqrt{3}$; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 16. 8სმ, 10სმ, 10სმ, $2\sqrt{34}$ სმ. 17. ა) $4\sqrt{11}$სმ; ბ) $4\sqrt{10}$ სმ. 20. $20\sin\frac{\alpha}{2}$სმ, $10\cos\frac{\alpha}{2}$სმ. 21. $\frac{3\sqrt{399}}{8}$სმ. აბა, სცადე! 180°.

4.7 1. 45°. 2. 130°. 3. 10სმ. 4. 45°. 5. 8სმ. 6. $2\sqrt{21}$ სმ. 7. 60°. 9. ბ) 3. 10. 45°. 11. 70°. 12. $16\sqrt{2}$სმ^2. 13. 12სმ^2. 14. $6\sqrt{2}$ სმ. 15. $\sqrt{2}$-ჯერ. 16. ა) $2\sqrt{3}$ სმ; ბ) $2\sqrt{39}$სმ^2; გ) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

4.8 1. 4. 2. 1. 3. მართი. 4. ბ). 5. მართებულია: ა), გ), ზ), თ), ი), კ), დანარჩენი არა. 7. ა) პერიმეტრი $(2a+2\sqrt{2}a)$, ფართობი $\sqrt{2}\,a^2$; ბ) პერიმეტრი $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})a$, ფართობი $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. 8. ა) 90°; ბ) 60°. 9. ა) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ; ბ) 30°. 10. ბ)$5\sqrt{5}$სმ. 11. 13 სმ. 12. 60°. 13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. აბა, სცადე! ა) 1; ბ) 2.

4.9 1. 15სმ, 25სმ. 2. 2,4სმ. 3. 10სმ. 4. 5სმ, 5სმ. 5. გ) 6. ა)8 სმ; ბ) $8\sqrt{2}$ სმ; გ) $8\sqrt{3}$ სმ; დ) $8\sqrt{2}$ სმ; ე) $8\sqrt{2}$ სმ; ვ) 8სმ) ზ) 8სმ; თ) $4\sqrt{2}$სმ. 7. ა) aსმ; ბ) aსმ; გ) aსმ; დ) aსმ. 8. ა) $\sqrt{82}$სმ; ბ) $\sqrt{73}$ სმ. 9. ა)$2\sqrt{34}$ სმ; ბ)$2\sqrt{41}$ სმ; გ)$10\sqrt{2}$სმ; დ)10სმ; ე)10სმ; ვ)$2\sqrt{34}$სმ; ზ) $2\sqrt{41}$სმ. 10. ა)1; ბ) 8სმ; გ) 8სმ. 11. ა) 6სმ, 9სმ, 7სმ; ბ) $7\frac{1}{3}$ სმ. 12. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ. 13. $0,4\sqrt{769}$ სმ. 14. 48სმ. 15. $\sqrt{39}$ სმ. 16. ა) $\sqrt{29}$სმ; ბ) $\sqrt{33}$სმ, $3\sqrt{5}$სმ, $\sqrt{65}$სმ. 17. ბ)$\frac{\sqrt{6}}{9}a$ სმ. აბა, სცადე! $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

თავი 5

5.1 3. ა)1; ბ) 9; გ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; დ) $\sqrt[4]{3}$. 4. ა) $\left(\frac{1}{7}\right)^2 > 7^{-2,1}$; ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5} < 1$; გ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,2} > 1$; ე) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}} < 9^{1,7}$; ვ) $2^{-\sqrt{3}} < 2^{-1,7}$; ზ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$; თ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{12}} = 9^{\sqrt{3}}$.

5. ა) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2\sqrt{2}}$; ბ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{11}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{0,01}, 1.$

6. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{3}}, \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{11}}, \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}}, \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$. 7. ზრდადი ფუნქციაა.