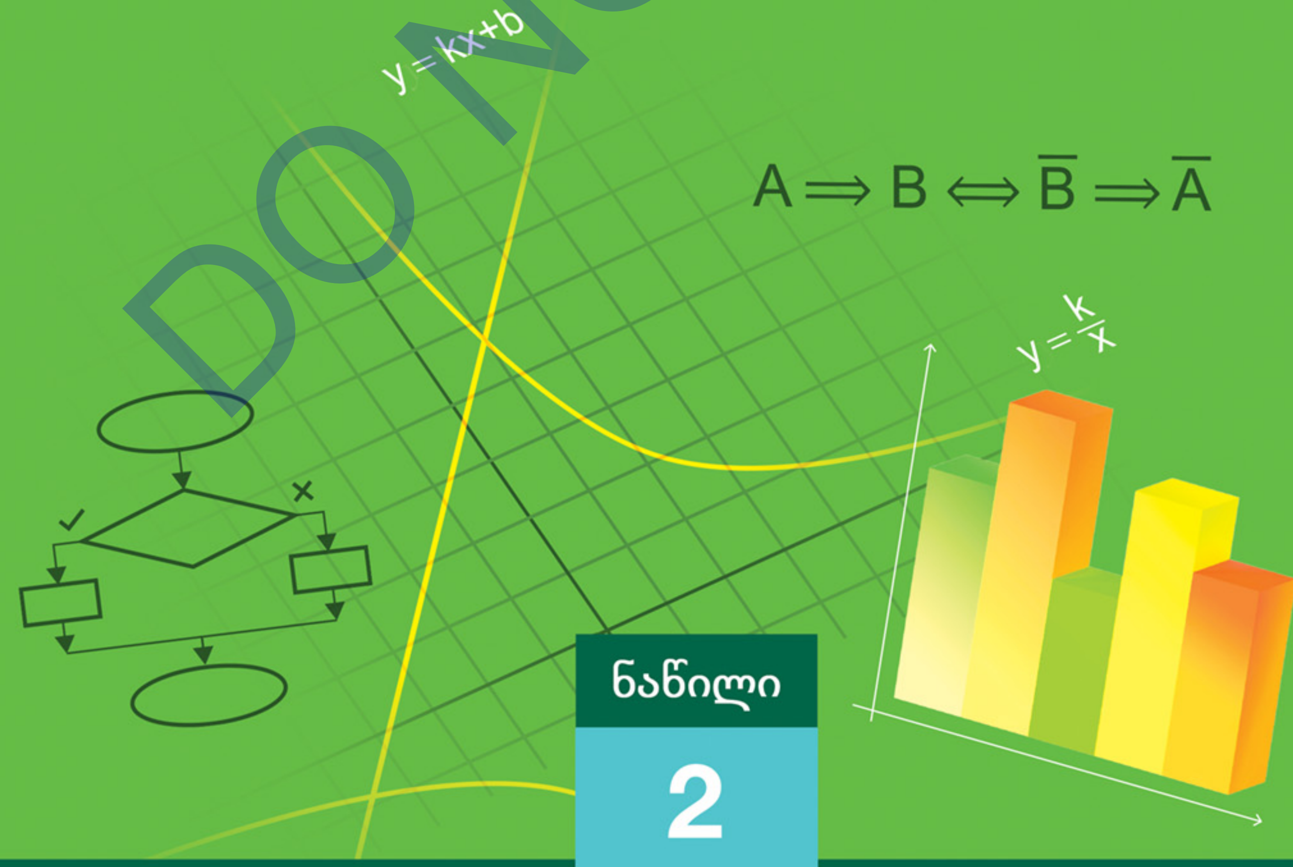
თინა ბექაური
ავთანდილ საგინაშვილი

მათემატიკა 10



ნაწილი
2

თინა ბექაური
ავთანდილ საგინაშვილი

მათემატიკა 10

მოსწავლის წიგნი
ნაწილი II

მეორე ნაწილი

გრიფმინიჭებულია საქართველოს განათლებისა და
მეცნიერების სამინისტროს მიერ 2022 წელს

2022

თინა ბექაური,
ავთანდილ საგინაშვილი

მათემატიკა 10

II ნაწილი

X კლასის სახელმძღვანელო

რედაქტორი: ავთანდილ საგინაშვილი
გარეკანის დიზაინი: ივანე საგინაშვილი
დიზაინი და დაკაბადონება: ალექსი კახნიაშვილი

საკონტაქტო ინფორმაცია: ტელ.: 599 68 09 74
ელ-ფოსტა: avtandilsaginashvili@yahoo.com
ელ. რესურსი: www.mat.ge

გამოცემულია 2022 წელს

ISBN 978-9941-8-4878-0

ს ა რ ჩ ე ვ ი

II ნაწილი

სახელმძღვანელოში გამოყენებული პირობითი ნიშნები და რუბრიკები

პირობითი ნიშნები

– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული სტანდარტული დავალებები

– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული არასტანდარტული (მაღალი კოგნიტური დონის) დავალებები

რუბრიკები

შესაძლებელია თუ არა? **აბა, სცადე!**	კვლევითი ხასიათის დავალებები
ჯგუფური სამუშაო **წყვილებში სამუშაო**	დავალებები, რომელთაც მოსწავლეთა ჯგუფები ან წყვილები ასრულებენ კლასში.
პრაქტიკული სამუშაო –	პრაქტიკული ხასიათის დავალებები

თავი 4. ალგებრული გამოსახულება

ამ თავში ისწავლი:

- სხვადასხვა სახის ალგებრულ გამოსახულებათა გარდაქმნებს;
- რიცხვის რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს;
- რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებებს;
- ალგებრულ მოქმედებებს ფესვებსა და რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხებზე;
- ფესვისა და რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველი გამოსახულების გამარტივებასა და რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლას;
- ფესვიდან ფესვის ამოღებას.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- რიცხვის რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ამოცნობას, ჩაწერასა და წაკითხვას;
- რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ფესვისა და ხარისხის გამოყენებით ჩაწერას და პირიქით, ფესვის ნიშნით წარმოდგენილი რიცხვის წილადი მაჩვენებლით ჩაწერას;
- ალგებრული მოქმედებების შესრულებას ფესვისა და რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველ გამოსახულებებზე;
- ფესვისა და რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველი გამოსახულების გამარტივებასა და მნიშვნელობის გამოთვლას.

აბა, სცადე!

დააკვირდი ტოლობათა მიმდევრობას და დაადგინე, სადაა დაშვებული შეცდომა.

$$4 = 2^2 = \left(\sqrt[6]{64}\right)^2 = \sqrt[6]{64^2} = \sqrt[6]{(-64)^2} =$$

$$= (-64)^{\frac{2}{6}} = (-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4$$

მივიღეთ, რომ 4=–4.

„ალგებრა სიტყვებით გამოთქმული გეომეტრიაა, გეომეტრია კი სურათებით გამოხატული ალგებრა“

სოფი ჟერმენი

1776-1831

ფრანგი მათემატიკოსი

კომპლექსური დავალება

„საპროცენტო დარიცხვა წილადი მაჩვენებლით“

საბანკო დარიცხვებთან დაკავშირებულ ამოცანებში გასულ წლებში ვიყენებდით ორი სახის საპროცენტო დარიცხვას:

ა) მარტივ საპროცენტო დარიცხვას, როდესაც დროის ყოველ ერთეულში ხდება ერთი და იმავე თანხის დარიცხვა და მიღებული საბოლოო შედეგი გამოითვლება ფორმულით:

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{np}{100}\right) \qquad (1)$$

ბ) რთულ საპროცენტო დარიცხვას, როდესაც დროის ყოველ ერთეულში ირიცხება ერთი და იგივე თანხა და საბოლოო შედეგი გამოითვლება ფორმულით:

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad (2)$$

ამ ფორმულებში a_0 ბანკში შეტანილი საწყისი თანხაა, p – დასარიცხი პროცენტი, n-დროის ერთეულთა რაოდენობა (როგორც წესი, დროის ერთეულად ვიღებთ წელიწადს), ხოლო a_n–n წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა.

ჩვენ მიერ განხილულ ყველა ადრინდელ ამოცანაში წლების რაოდენობას – n-ს ვთვლიდით ნატურალურ რიცხვად. მაგრამ, რა მოხდება იმ შემთხვევაში, თუ დაგროვილი თანხის რაოდენობა გვაინტერესებს თანხის შეტანიდან არა 2 წლის, არამედ 2 წლისა და 3 თვის შემდეგ, ანუ იმ შემთხვევაში, როცა $n = 2\frac{1}{4}$?

1-ელი ფორმულის შემთხვევაში არამთელი n არანაირ სიძნელეს არ წარმოქმნის, რადგან ამ რიცხვზე ხდება გამრავლების მოქმედება. მაგრამ, მე-2 ფორმულაში n ხარისხის მაჩვენებელია, ამიტომ თუ ამ ფორმულით გვინდა ვისარგებლოთ, უნდა შეგვეძლოს რიცხვის რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის გამოთვლა.

რიცხვის რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის და მისი თვისებების შესწავლა ამ თავის ერთ-ერთი ძირითადი მიზანია.

შენი დავალება:

1. გაიმეორე ამ თავში მოცემული მოქმედებები ალგებრულ გამოსახულებებზე;
2. შეისწავლე რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხისა და n-ური ხარისხის ფესვის თვისებები;
3. ამოხსენი ქვემოთ მოცემული ამოცანები:
   I. ნინომ ბანკში შეიტანა 1000 ლარი. რა თანხა დაუგროვდება ნინოს 1 წლისა და 3 თვის შემდეგ 10%-იანი წლიური დარიცხვით: ა) მარტივი საპროცენტო დარიცხვის შემთხვევაში? ბ) რთული საპროცენტო დარიცხვის შემთხვევაში?
   II. რა თანხა შეიტანა გიგიმ ბანკში, თუ 2 წლისა და 6 თვის განმავლობაში 10%-იანი რთული საპროცენტო დარიცხვით 2538 ლარი დაუგროვდა?
   III. რამდენპროცენტიანი სესხი აიღო მერიმ, თუ 1 წელსა და 4 თვეში მის მიერ ნასესხებ 10000 ლარს რთული საპროცენტო დარიცხვით 4641 ლარი დაემატა?

   გამოთვლების საწარმოებლად გამოიყენე კალკულატორი და მიღებული შედეგები დაამრგვალე მეასედამდე სიზუსტით.
4. შეადგინე და ამოხსენი ანალოგიური ამოცანები საპროცენტო დარიცხვაზე წლების არამთელი რაოდენობის შემთხვევაში;
5. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც:
   - რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
   - რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ კვლევას.
6. ნაშრომში ხაზგასმით წარმოაჩინე:
   - როგორ ადგენ ხარისხის მაჩვენებელს რთული საპროცენტო დარიცხვის დროს არამთელი წლების შემთხვევაში;
   - როგორ იყენებ რაციონალური ხარისხის ცნებას მოცემული ამოცანების ამოსახსნელად;
   - როგორ იყენებ ტექნოლოგიებს ზუსტი და მიახლოებითი გამოთვლების ჩასატარებლად.

4.5 n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვის თვისებები

მიზანი

n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვის ძირითადი თვისებების გაცნობა და გამოსახულების გამარტივებასა და მნიშვნელობის გამოთვლაში გამოყენება

წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ n-ური ხარისხის არითმტიკული ფესვის შემთხვევაში ($n \geq 2$), როგორც ფესვქვეშა გამოსახულება, ისე ფესვის მნიშვნელობა, არაუარყოფითი რიცხვებია. ამიტომ ამ და მომდევნო პარაგრაფებში $\sqrt[n]{a}$ სახის ჩანაწერში ყოველთვის, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, იგულისხმება, რომ $a \geq 0$ და $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

გავეცნოთ n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვის ძირითად თვისებებს:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad (1)$$

მაგალითად, $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ b \neq 0; \qquad (2)$$

მაგალითად, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \ m \in N; \qquad (3)$$

მაგალითად, $\left(\sqrt[4]{2}\right)^8 = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{256} = 4$;

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \text{ სადაც } m \in N, \ m \geq 2; \qquad (4)$$

მაგალითად, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[3 \cdot 4]{7} = \sqrt[12]{7}$;

$$\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}, \ m \in N. \qquad (5)$$

მე-5 ტოლობა საშუალებას გვაძლევს შევკვეცოთ ფესვისა და ხარისხის მაჩვენებლები. მაგალითად, $\sqrt[12]{8^4} = \sqrt[3 \cdot 4]{8^4} = \sqrt[3]{8} = 2$.

ჩამოთვლილი ყველა თვისება არითმეტიკული ფესვის განმარტებიდან გამომდინარეობს. ნიმუშად მოვიყვანოთ 1-ელი თვისების დამტკიცება (დანარჩენი თვისებების დამტკიცება სცადე დამოუკიდებლად):

არითმეტიკული ფესვის განმარტების თანახმად, $\sqrt[n]{ab}$ არის $x^n = ab$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი. ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ნამრავლიც ამავე განტოლების ამონახსნია.

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

ჩამოყალიბებული თვისებებიდან გამომდინარეობს მამრავლის ფესვიდან გატანის წესი:

$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$,

ე.ი.

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}. \qquad (6)$$

მაგალითად, $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$.

თუ მე-6 ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს გადავანაცვლებთ, მივიღებთ მამრავლის ფესვში შეტანის წესს:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

მაგალითად, $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=\sqrt[3]{250}$.

ზემოთ მოყვანილი თვისებები დაგვეხმარება ფესვის შემცველი გამოსახულების გარდაქმნაში, გამარტივებასა და მნიშვნელობის გამოთვლაში.

მაგალითი 1. შევასრულოთ მოქმედება: ა) $\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{54}$; ბ) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{48}$; გ) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}$.

ამოხსნა: ა) $\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{8\cdot 2}+4\sqrt[3]{27\cdot 2}=2\sqrt[3]{2}+12\sqrt[3]{2}=14\sqrt[3]{2}$;

ბ) თუ 1-ელი ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს გადავანაცვლებთ, მივიღებთ $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ტოლობას, საიდანაც ვასკვნით, რომ ტოლი ფესვის მაჩვენებლის მქონე თანამამრავლების შემთხვევაში ფესვქვეშა გამოსახულებები შეგვიძლია გადავამრავლოთ.

$$\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{27\cdot 48}=\sqrt[4]{27\cdot 3\cdot 16}=\sqrt[4]{81\cdot 16}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{16}=3\cdot 2=6;$$

გ) ვისარგებლოთ მე-5 თვისებით და თანამამრავლები დავიყვანოთ ფესვის ტოლ მაჩვენებელზე: $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{b^3}=\sqrt[12]{a^4b^3}$.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ: ა) $\left(\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{4}\right)\left(\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{4}\right)$; ბ) $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)$.

ამოხსნა: ა) შემოვიღოთ აღნიშვნები: $a=\sqrt[4]{9}, b=\sqrt[4]{4}$. ამ აღნიშვნებით მივიღებთ:

$$\left(\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{4}\right)\left(\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{4}\right)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2=\left(\sqrt[4]{9}\right)^2-\left(\sqrt[4]{4}\right)^2=3-2=1;$$

ბ) შემოვიღოთ აღნიშვნები: $a=\sqrt[3]{2}, b=\sqrt[3]{3}$. ამ აღნიშვნებით მივიღებთ:

$$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=2+3=5.$$

მაგალითი 3. გამოვრიცხოთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; ბ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; გ) $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

ამოხსნა: ა) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; ბ) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}=\dfrac{a\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{a\cdot\sqrt[3]{b^2}}{b}$;

$$\text{გ) }\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}.$$

კენტი ფესვის მაჩვენებლის შემთხვევაში მოცემული პირველი შვიდი თვისება მართებულია უარყოფითი ფესქვეშა გამოსახულების შემთხვევაშიც.

მაგალითად,

$$\sqrt[3]{8\cdot(-27)}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{(-3)^3}=2\cdot(-3)=-6.$$

$$\sqrt[3]{(-64)\cdot(-125)}=\sqrt[3]{(-4)^3}\cdot\sqrt[3]{(-5)^3}=-4\cdot(-5)=20.$$

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ ჩამოაყალიბებ პარაგრაფში მოცემულ პირველ თვისებას სიტყვიერად?
2. როგორ გამოიტან მამრავლს ფესვიდან?
3. როგორ შეიტან მამრავლს ფესვქვეშ?
4. შეიძლება თუ არა ხარისხის მაჩვენებლისა და ფესვის მაჩვენებლის შეკვეცა?

სავარჯიშოები

1 იპოვე კუბური ფესვი რიცხვებიდან: 125; 0,125; 0,027; 1000000; $-\frac{8}{27}$.

2 იპოვე მე-4 ხარისხის არითმეტიკული ფესვი რიცხვებიდან: 16; 1; $\frac{64}{81}$; 0,0625; 0,0001.

გამოთვალე № 3-5:

3
ა) $\sqrt[3]{64\cdot125}$; ბ) $\sqrt[3]{16\cdot32}$; გ) $\sqrt[4]{81\cdot16}$; დ) $\sqrt[4]{27\cdot48}$; ე) $\sqrt[5]{32\cdot243}$;

ვ) $\sqrt[3]{10^6}$; ზ) $\sqrt[3]{4^{12}}$; თ) $\sqrt[6]{25^3}$; ი) $\sqrt[8]{16^2}$; კ) $\sqrt[12]{64^2}$;

ლ) $\sqrt[3]{-5^{12}}$; მ) $\sqrt[3]{(-7)^{12}}$; ნ) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$; ო) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{7}\right)^{12}}$; პ) $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{64}\right)^{0}}$.

4
ა) $\frac{40}{\left(4\sqrt{5}\right)^2}$; ბ) $\frac{6}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}$; გ) $\sqrt[6]{4^3\cdot10^6}$; დ) $\sqrt[3]{5^3\cdot8}$; ე) $\sqrt[4]{3^{12}\cdot1^{16}}$;

ვ) $\sqrt[5]{(0,5)^5\cdot5^5}$; ზ) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$; თ) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^4$; ი) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^3$; კ) $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^6$.

ლ) $\left(\sqrt[6]{5^3}\right)^2$; მ) $\left(\sqrt[10]{32}\right)^2$; ნ) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-3}$; ო) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$; პ) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$;

ჟ) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$; რ) $\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$; ს) $\frac{\sqrt[3]{81}}{3\sqrt[3]{3}}$; ტ) $\frac{\sqrt[3]{25}}{2\sqrt[3]{0,2}}$; უ) $\frac{\sqrt[6]{128}}{2\sqrt[6]{2}}$.

5
ა) $2\sqrt{2}\cdot5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$; ბ) $3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot4\sqrt{10}$; გ) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{36}$;

დ) $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{8}$; ე) $\sqrt[4]{(-2)^4}+\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{-3}$; ვ) $9\sqrt[5]{-32}-3\sqrt[9]{-1}$;

ზ) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}+10\sqrt[4]{625}$; თ) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{64}-2\sqrt[3]{-125}$; ი) $\sqrt[6]{(-3)^6}+\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{-4}$;

კ) $\sqrt[7]{5-\sqrt{26}}\cdot\sqrt[7]{5+\sqrt{26}}$; ლ) $\sqrt[9]{6-\sqrt{35}}\cdot\sqrt[9]{6+\sqrt{35}}$; მ) $\sqrt[4]{\sqrt{17}-1}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{17}+1}$.

6 ჩაწერე გამოსახულება ფესვის ნიშნის გარეშე. გაითვალისწინე, რომ გამოსახულებებში შემავალი ცვლადები დადებითია.

ა) $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^{-4}$; ბ) $\sqrt[3]{1000x^6y^{12}}$; გ) $\sqrt{\frac{x^2y^6}{4m^8n^4}}$; დ) $\sqrt{\frac{36m^{-6}}{b^{-2}c^4}}$;

ე) $\sqrt[3]{\frac{27x^{15}y^{-12}}{64z^{-6}k^{-3}}}$; ვ) $\sqrt[4]{\frac{81a^{12}}{625b^4}}$; ზ) $\sqrt[4]{\frac{0,0081m^8n^{24}}{256k^{12}}}$; თ) $\sqrt[6]{\frac{64x^{18}}{27^2y^{-12}}}$.

7 გამოიტანე მამრავლი ფესვიდან:

ა) $\sqrt{12}$; ბ) $\sqrt[3]{16}$; გ) $\sqrt[3]{54}$; დ) $\sqrt[4]{32}$; ე) $\sqrt[5]{64}$;

ვ) $\sqrt{a^3}$; ზ) $\sqrt[3]{x^4}$; თ) $\sqrt[3]{b^7}$; ი) $\sqrt[4]{48b^5}$; კ) $\sqrt[3]{a^4b^6}$.

8 შეიტანე მამრავლი ფესვში:

ა) $2\sqrt{5}$; ბ) $3\sqrt[3]{2}$; გ) $2\sqrt[3]{3}$; დ) $4\sqrt[4]{0,25}$; ე) $2\sqrt[5]{0,5}$;

ვ) $a\sqrt{a^3}$; ზ) $2\sqrt[3]{x}$; თ) $3\sqrt[3]{b^2}$; ი) $2b\sqrt[4]{4b^3}$; კ) $ab\sqrt[3]{b^2}$.

გაამარტივე გამოსახულება №9-10:

9 ა) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a}}$; ბ) $\frac{\sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[5]{b}}$; გ) $\frac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt[6]{b}}$; დ) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$; ე) $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^{-4}$; ვ) $\left(\sqrt[6]{2}\right)^3$;

ზ) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2$; თ) $\sqrt[6]{a}\sqrt[6]{a^5}$; ი) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{4}$; კ) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}$; ლ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$; მ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

10 ა) $5\sqrt{18}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}$; ბ) $2\sqrt{0,2}+0,5\sqrt{20}-\sqrt{0,8}$; გ) $3\sqrt{27}-\sqrt{75}+0,5\sqrt{12}$.

დ) $4\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{-128}$; ე) $\sqrt[3]{40}-3\sqrt[3]{135}+4\sqrt[3]{-5}$; ვ) $\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}+5\sqrt[3]{-3}$.

11 ჩაწერე ფესვის ერთი ნიშნით:

ა) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; ბ) $\sqrt{\sqrt[4]{2}}$; გ) $\sqrt{3\sqrt{2}}$; დ) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; ე) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a}}$; ვ) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; ზ) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

12 გამორიცხე ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; ბ) $\frac{6}{\sqrt{18}}$; გ) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; დ) $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; ე) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; ვ) $\frac{5a}{\sqrt[3]{a^2}}$.

13 გამოთვალე:

ა) $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)$; ბ) $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{61}}\cdot\sqrt[3]{16-4\sqrt[3]{61}+\sqrt[3]{61^2}}$;

გ) $\sqrt{4+\sqrt[8]{(-15)^4}}\cdot\sqrt{4-\sqrt[8]{(-15)^4}}$; დ) $\sqrt[5]{4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}\cdot\sqrt[5]{2-\sqrt[3]{7}}$.

14 იპოვე რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$; ბ) $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$; გ) $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$;

დ) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+1}$; ე) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2$; ვ) $\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}+\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2$.

15 ჭეშმარიტია თუ მცდარი ქვემოთ მოცემული ტოლობა?

ა) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^4}=\sqrt{2}-\sqrt{3}$; ბ) $\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right)^3}=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$;

გ) $\sqrt[6]{(7-x)^2}=\sqrt[3]{7-x}$, თუ $x>7$; დ) $\sqrt[4]{(x-2)^2}=\sqrt{2-x}$, თუ $x<2$;

ე) $x\sqrt{a}=-\sqrt{ax^2}$, თუ $x\leq0$; ვ) $\sqrt{ax^2}=-x\sqrt{a}$, თუ $x\leq0$.

16 შეკვეცე წილადი, თუ ცნობილია რომ $x\neq1$, $x>0$:

ა) $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$; ბ) $\frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$; გ) $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$; დ) $\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; ე) $\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$.

17 გამოთვალე:

ა) $\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; ბ) $\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^2-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4\sqrt{3}}$; გ) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+4}+\frac{4\sqrt{y}}{y-16}$, თუ $y=18$.

18 გაამარტივე:

ა) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$; ბ) $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$ $(x>2)$.

19 გამორიცხე ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$; ბ) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}}$; გ) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$; დ) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$.

4.6 რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები

მიზანი

- *რიცხვის რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის განმარტება და თვისებების გაცნობა;*
- *რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის გამოყენება გამოსახულების მნიშვნელობის გამოთვლასა და გამარტივებაში.*

ვთქვათ, m და n ნატურალური რიცხვებია, $n>1$ და m ჯერადია n-ის, $m=kn$. ამ პირობებში, არითმეტიკული ფესვის თვისებებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი დადებითი a რიცხვისათვის შესრულდება ტოლობა:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = a^k = a^{\frac{m}{n}}.$$

მივიღეთ, რომ როცა m ჯერადია n-ის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

ეს ტოლობა საშუალებას გვაძლევს, ხარისხის ცნება განვმარტოთ ნებისმიერი რაციონალური ხარისხის მაჩვენებლის შემთხვევაში.

ვთქვათ, r ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია. რაციონალური რიცხვის განმარტების ძალით r შეგვიძლია ჩავწეროთ წილადის სახით $r=\frac{m}{n}$, სადაც $m \in Z$, $n \in N$. ამასთან, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $n>1$. ამ პირობებში, ნებისმიერი $a>0$ რიცხვისათვის, a^r განიმარტება ტოლობით:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

მაგალითად,

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2};\quad a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3};\quad 7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7};\quad 11^{\frac{3}{2}} = \sqrt{11^3};\quad a^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

რაციონალური რიცხვი მრავალნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ $\frac{m}{n}$ წილადის სახით. მაგალითად, $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\ldots$. დავამტკიცოთ, რომ ხარისხი რაციონალური მაჩვენებლით არაა იმაზე დამოკიდებული, თუ რა სახითაა ჩაწერილი ხარისხის მაჩვენებელი.

მაშასადამე, უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, მაშინ $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

მართლაც, თუ $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, მაშინ $mq=np$ და $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$.

მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის ყველა თვისება მართებულია რაციონალური ხარისხის მაჩვენებლის შემთხვევაშიც.

კერძოდ, ნებისმიერი a და b დადებითი რიცხვებისა და რაციონალური r, r_1, r_2 რიცხვებისათვის მართებულია ტოლობები:

$$(ab)^r = a^r b^r. \qquad (1)$$

მაგალითად, $(8\cdot 27)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}\cdot\sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 2^2\cdot 3^2 = 36$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \qquad (2)$$

მაგალითად, $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{8^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}}=\frac{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$.

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}. \qquad (3)$$

მაგალითად, $5^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=5$;

$$a^{r_1}:a^{r_2}=a^{r_1-r_2}. \qquad (4)$$

მაგალითად, $64^{\frac{2}{3}}:64^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{2}}=8$.

$$\left(a^{r_1}\right)^{r_2}=a^{r_1r_2}. \qquad (5)$$

მაგალითად, $\left(16^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{8}}=16^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}}=16^{\frac{1}{12}}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{4}{12}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$.

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}. \qquad (6)$$

მაგალითად, $64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{64}}=\frac{1}{4}$.

მოცემული თვისებები ადვილად მტკიცდება მთელმაჩვენებლიანი ხარისხისა და არითმეტიკული ფესვის თვისებების გამოყენებით. დავამტკიცოთ, მაგალითად, მე-5 თვისება:

დამტკიცება: ვთქვათ, $r_1=\frac{m_1}{n_1}$, $r_2=\frac{m_2}{n_2}$.

$$\left(a^{r_1}\right)^{r_2}=\left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}=\sqrt[n_2]{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}}=\sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{\left(a^{m_1}\right)^{m_2}}}=\sqrt[n_1n_2]{a^{m_1m_2}}=a^{\frac{m_1m_2}{n_1n_2}}=a^{r_1r_2}.$$

დანარჩენი თვისებების დამტკიცება სცადე დამოუკიდებლად.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{8}\cdot 125^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$; ბ) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

ამოხსნა.

ა) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{8}\cdot 125^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{9}{16}}-\sqrt[3]{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{125}}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=0{,}65$;

ბ) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{\left(\left(\frac{4}{3}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^4}=$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}.$$

მაგალითი 2. გავამარტივოთ გამოსახულება: $\frac{x\,\square 1}{x+x^{0,5}+1}\cdot\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}\,\square 1}+\frac{2}{x^{\square 0,5}}$, სადაც x>0.

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნა: $x^{0,5}=a$. ამ აღნიშვნით $x=a^2$, ხოლო $x^{1,5}=a^3$. შევიტანოთ ეს ტოლობები მოცემულ გამოსახულებაში:

$$\frac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}=\frac{a^2-1}{a^2+a+1}:\frac{a+1}{a^3-1}+\frac{2}{a^{-1}}=$$

$$\frac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{\cancel{a^2+a+1}}\cdot\frac{(a-1)\cancel{(a^2+a+1)}}{\cancel{a+1}}+2a=a^2+1=x+1.$$

პასუხი: x+1.

შევნიშნოთ, რომ უარყოფითი ფუძის შემთხვევაში რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ჩანაწერს აზრი არ აქვს, რადგან ასეთ ჩანაწერს წინააღმდეგობამდე მივყავართ. მაგალითად, თუ $\sqrt[3]{-1}=-1$ ტოლობას $(-1)^{\frac{1}{3}}=-1$ სახით ჩავწერთ და $\frac{1}{3}$-ს $\frac{2}{6}$-ით შევცვლით, მივიღებთ $(-1)^{\frac{2}{6}}=-1$. მეორეს მხრივ, $(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$. ეს ორი ტოლობა კი ეწინააღმდეგება ერთმანეთს.

ასევე არ განიმარტება 0-ის უარყოფითი ხარისხი, რადგან ნულზე გაყოფა არ შეიძლება, ხოლო 0-ის ნებისმიერი დადებითი ხარისხი 0-ის ტოლია.

რაციონალური ხარისხის გამოსათვლელად შეგიძლია გამოიყენო კალკულატორი. მაგალითად, $2,3^{1,2}$-ის გამოსათვლელად ვმოქმედებთ შემდეგი თანმიმდევრობით:

შევიყვანოთ ხარისხის ფუძე „2,3“;

დავაჭიროთ „x^y“ კლავიშს;

შევიყვანოთ ხარისხის მაჩვენებელი „1,2“;

ვაჭერთ კლავიშს „=“ ან კლავიატურაზე კლავიშს “Enter” ;

ეკრანზე დაიწერება ხარისხის მიახლოებითი მნიშვნელობა (2,71689843. . .).

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება $a^{\frac{m}{n}}$, სადაც a>0, $m\in Z, n\in N$?
2. რის ტოლია 0^r, სადაც r ნებისმიერი დადებითი რაციონალური რიცხვია?
3. რა შემთხვევაში იკრიბება ხარისხის მაჩვენებლები?
4. რა შემთხვევაში მრავლდება ხარისხის მაჩვენებლები?
5. რატომ არ განიმარტება რაციონალური ხარისხი უარყოფითი ფუძის შემთხვევაში?

სავარჯიშოები

1 ჩაწერე ფესვის სახით:

ა) $16^{\frac{2}{3}}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $8^{-\frac{2}{3}}$, $(0,5)^{-0,5}$, $6^{0,25}$, $7^{-0,75}$;

ბ) $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{-0,2}$, $x^{1,5}$, $y^{-0,8}$, $c^{-1,25}$, $z^{1,2}$;

გ) $(3a)^{\frac{1}{3}}$, $(4a)^{\frac{2}{3}}$, $(1,5a)^{-\frac{1}{3}}$, $(2x)^{\frac{2}{5}}$, $(2x)^{-\frac{2}{5}}$, $(a^2b)^{\frac{2}{5}}$, $(a^2x)^{-\frac{2}{5}}$;

დ) $(a-b)^{\frac{1}{2}}$, $(a-b)^{\frac{3}{4}}$, $(a+b)^{-\frac{3}{5}}$, $(a+b)^{-\frac{1}{4}}$, $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{3}}$.

2 წარმოადგინე ფესვის სახით რიცხვები:

ა) $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{-\frac{1}{3}}$, $4^{\frac{2}{3}}$, $5^{-\frac{1}{4}}$, $6^{0,5}$, $7^{0,25}$, $(0,2)^{0,75}$;

ბ) $11^{\frac{1}{2}}$, $12^{-\frac{2}{3}}$, $13^{\frac{3}{4}}$, $14^{-\frac{1}{4}}$, $15^{0,8}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,8}$, $3^{1\frac{1}{3}}$;

გ) $10^{\frac{2}{5}}$, $5^{-2,5}$, $7^{0,75}$, $4^{-1\frac{1}{4}}$, $2^{1,5}$, $3^{-\frac{1}{2}}$, $4^{-0,4}$, $6^{-\frac{2}{3}}$.

3 წარმოადგინე კვადრატის სახით:

a, a^{10}, $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{-\frac{1}{4}}$, b^{15}, $b^{0,9}$, $c^{\frac{3}{2}}$, $c^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{c}$; $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

4 წარმოადგინე კუბის სახით:

a, $a^{\frac{10}{3}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{-\frac{1}{4}}$, b^{-12}, $b^{0,1}$, $c^{\frac{2}{15}}$, $c^{-\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}}$; $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

5 წარმოადგინე 3-ის ტოლი ფუძის მქონე ხარისხის სახით:

ა) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt[3]{9}}{27}$, $\frac{3}{\sqrt[4]{81}}$, $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2$, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{27}\right)^4$;

ბ) $\sqrt{\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}}$.

6 თუ $\sqrt{5}=a$, მაშინ რის ტოლია: ა) $5^{-\frac{1}{2}}$? ბ) $5^{1,5}$? გ) $5^{2,5}$? დ) $5^{\frac{5}{2}}$?

7 ჩაწერე რაციონალური ხარისხის სახით გამოსახულება:

$\sqrt[3]{x}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[4]{2a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{\sqrt[3]{x^5}}$, $\sqrt[3]{y\sqrt{x}}$, $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

8 წილადმაჩვენებლიანი ხარისხითა და კვადრატის S ფართობით გამოსახე კვადრატის: ა) გვერდი; ბ) პერიმეტრი.

9 წილადმაჩვენებლიანი ხარისხითა და კუბის V მოცულობით გამოსახე კუბის: ა) გვერდი; ბ) სრული ზედაპირის ფართობი.

10 წარმოადგინე ხარისხის სახით:

ა) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}$; ბ) $b^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{5}{12}}$; გ) $\left(c^{\frac{3}{4}}c^{\frac{5}{8}}c^{-\frac{1}{2}}\right)^8$;

დ) $\sqrt[5]{a^{-3}\sqrt{a^3}}$; ე) $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$; ვ) $\sqrt{\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}}$.

11 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $6^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{1}{4}}$; ბ) $16^{\frac{2}{3}}:16^{\frac{1}{6}}$; გ) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; დ) $125^{\frac{2}{3}}$; ე) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$;

ვ) $\frac{\left(a^{\frac{5}{8}}\right)^4}{\sqrt[3]{a^4}}$; ზ) $a^{\frac{2}{3}}:\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{2}{3}}$; თ) $a^{0,3}:\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,7}$; ი) $9^{\frac{1}{3}}\cdot 375^{\frac{1}{3}}$; კ) $a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{2}{3}}$;

ლ) $\sqrt[3]{x^{-3}}$; მ) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{2}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}$; ნ) $a^{\frac{7}{12}}\cdot x^{\frac{5}{6}}:a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{4}}$; ო) $\dfrac{\left(x^{-0,5}\right)^{2}x^{\frac{6}{7}}}{\left(x^{-4}\right)^{\frac{2}{7}}}$;

პ) $\sqrt[3]{\dfrac{d^{3}x^{3}}{x^{-6}y^{3}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x^{6}}}$; ჟ) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; რ) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; ს) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა №12-15 :

12 ა) $0,5\left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^{-12}$; ბ) $36^{0,4}\cdot 2^{0,2}\cdot 3^{\frac{1}{5}}$; გ) $\left(5^{-2}\cdot 25\right)^{-3}$; დ) $\left(9\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{7}}$;

ე) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}:\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; ვ) $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^{6}$; ზ) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; თ) $125^{\frac{2}{3}}$;

ი) $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$; კ) $\left(512^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}$; ლ) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 9\cdot 3^{-2\frac{1}{2}}$; მ) $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

ნ) $\left(5\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$; ო) $2^{1\frac{5}{12}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}$; პ) $25^{\frac{1}{3}}\cdot 135^{\frac{1}{3}}$; ჟ) $\dfrac{12^{\frac{5}{6}}}{2^{1\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}$.

13 ა) $6^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{3}{4}}\cdot 6^{0}$; ბ) $8^{\frac{1}{6}}\cdot 16^{\frac{2}{3}}:16^{\frac{1}{6}}$; გ) $4^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{-\frac{3}{4}}\cdot 32^{-\frac{4}{5}}$;

დ) $3^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{4}}\cdot 81^{-\frac{1}{6}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; ე) $4^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{-\frac{3}{4}}\cdot 32^{-\frac{4}{5}}\cdot 2^{3}$;

ვ) $27^{\frac{1}{3}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3}$; ზ) $\dfrac{\sqrt[3]{5^{2}}\cdot\sqrt[4]{5^{3}}}{\sqrt[6]{5^{5}}\cdot\sqrt{5}}$.

14 ა) $8^{\frac{5}{3}}$; ბ) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{9}{2}}$; გ) $\left[\left(\sqrt{6}\right)^{2}\right]^{2}$; დ) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{4,5}$; ე) $\dfrac{9^{\frac{1}{2}}\cdot 40^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}}{25^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$;

ვ) $\left(27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot 32^{\frac{2}{5}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$; ზ) $(0,64)^{0,5}\cdot 7^{0}\cdot(0,027)^{\frac{2}{3}}:(0,25)^{-0,5}$.

15 ა) $\left(100^{-0,5}\cdot 64^{\frac{2}{3}}\cdot 0,2^{-\frac{1}{2}}\cdot 4^{-\frac{3}{4}}\cdot 4^{-0,75}\right)^{2}$; ბ) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+3\cdot 0,0081^{-0,25}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}$;

გ) $64^{-\frac{5}{6}}-(0,125)^{-\frac{1}{3}}-32\cdot 2^{-4}\cdot 16^{-1,5}+\left(0,125^{0}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 4$.

16 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left[\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{9}}}\right)^{-9}\right]^{\frac{1}{4}}$, თუ $a=\dfrac{1}{4}$; ბ) $\left[\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{16}}}\right)^{-16}\right]^{\frac{1}{6}}$, თუ $a=0,04$;

გ) $\sqrt{x\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}}$, თუ $x=5^{-\frac{30}{19}}$; დ) $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[7]{x}}}$, თუ $x=5^{-\frac{14}{9}}$.

17 რომელია მეტი:

ა) $2^{\frac{1}{2}}$ თუ $3^{\frac{1}{4}}$? ბ) $5^{\frac{1}{3}}$ თუ $7^{\frac{1}{4}}$ გ) $7^{\frac{1}{4}}$ თუ $12^{\frac{1}{12}}$?

დ) $80^{\frac{1}{6}}$ თუ $9^{\frac{1}{3}}$? ე) $7^{\frac{1}{5}}$ თუ $47^{\frac{1}{10}}$? ვ) $\sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$ თუ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{13}}$?

ზ) $\sqrt[8]{3^5}$ თუ $3^{\frac{8}{13}}$? თ) $2^{\frac{1}{2}}$ თუ $\sqrt[5]{\sqrt{31}}$? ი) $3^{\frac{1}{2}}$ თუ $\sqrt[3]{\sqrt{28}}$?

18 რომელია ნაკლები:

ა) $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{5}{4}}$ თუ $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}$? ბ) $2^{\frac{1}{6}}$ თუ $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$? გ) $2^{\frac{1}{6}}$ თუ $\sqrt{\sqrt[7]{13}}$?

დ) $\sqrt{\sqrt{3}}$ თუ $3^{\frac{1}{6}}$? ე) $5^{\frac{4}{9}}$ თუ $\sqrt{5\sqrt[3]{5}}$? ვ) $\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}}$ თუ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{8}}$?

გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა №19-20:

19

ა) $27^{-\frac{2}{3}}+81^{\frac{3}{4}}+(0,25)^{-2}$; ბ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}+3\cdot 0,0081^{-0,25}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$;

გ) $\left(27^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$; დ) $\left[8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}$;

ე) $\frac{5^{-5a}}{5^{-14a}}$, როცა $a=\frac{1}{3}$; ვ) $4^{6p}\cdot 4^{-4p}$, როცა $p=\frac{1}{4}$.

20

ა) $\left(4^{-2}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(81\cdot 10^4\right)^{\frac{1}{4}}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{0,2}+(4,5)^0$;

ბ) $\left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\left(2^6\right)^{\frac{2}{3}}-\left(2^3\right)^{-1\frac{1}{3}}+\left(3^3\right)^0\cdot 5$;

გ) $\left(15^0\right)^n+\left(81\cdot 10^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(3^{-0,8}\cdot 5^{0,5}\cdot 81^{\frac{1}{5}}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$;

დ) $\left(5^4\cdot 10^{-4}\right)^{0,25}+\left(\frac{1^{-1}}{4}\right)-\left(5^3+3^{-2}\right)^0+\left(5^{-0,8}\cdot 5^{0,5}\cdot 25^{\frac{2}{5}}\right)^2$.

21 მოცემული ტოლობიდან , სადაც a>0, b>0, გამოსახე b-ს საშუალებით a:

ა) $b=a^{10}$; ბ) $b=a^{\frac{1}{2}}$; გ) $b=a^{-\frac{1}{4}}$; დ) $b=a^{\frac{2}{3}}$; ე) $b=a^{0,9}$; ვ) $b=\sqrt[5]{a}$; $(a>0, b>0)$.

22 კალკულატორისა და მოცემული ტოლობის გამოყენებით მეასედამდე სიზუსტით გამოთვალე x-ის რიცხვითი მნიშვნელობა:

ა) $x^{0,5}=0,9$; ბ) $x^{1,5}=18$; გ) $x^{0,25}=18$; დ) $x^{0,75}=5$; ე) $x^{1,25}=10$.

23 დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}\right)=x-y$;

ბ) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}\right)=x+y$.

24 გამოთვალე:

ა) $\dfrac{12^{0,5}}{7^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{0,5}}\cdot\dfrac{3^{0,5}\cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{-\frac{1}{6}}}$;

ბ) $\left\{\left[\left(2\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(625^{0,25}\cdot 25\right)^{2}\right]:\left(\dfrac{125^{\frac{2}{3}}\cdot 16^{\frac{13}{4}}}{625^{-\frac{1}{2}}\cdot 32^{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$.

გ) $\left[\left(5\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}-81^{-0,25}\right]\cdot\left[\left(5\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}+81^{-0,25}\right]$.

25 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$; ბ) $\dfrac{1-x^{-2}}{x^{0,5}+x^{-0,5}}-\dfrac{2}{x^{1,5}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{0,5}-x^{-0,5}}$;

გ) $\dfrac{1+b}{1-\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}-2b^{\frac{1}{6}}$; დ) $\dfrac{1+b^{\frac{3}{4}}}{1-b^{0,25}+b^{0,5}}-2b^{\frac{1}{8}}$;

ე) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; ვ) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:(x-y)+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

აბა, სცადე!

V კუბური მეტრი მოცულობის მქონე კუბის ფორმის შენობის კედელზე, ერთ-ერთი წახნაგის ცენტრში, ზის ადამიანი-ობობა, ხოლო მოპირდაპირე წახნაგის წვეროზე – ვენუმი. რა უმცირესი მანძილით უნდა გადაადგილდეს ადამიანი-ობობა, რომ ვენუმთან (ამერიკული სერიალის სუპერგმირი) მივიდეს?

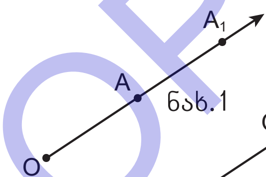
5.11 ჰომოთეტია და პარალელური გადატანა

მიზანი

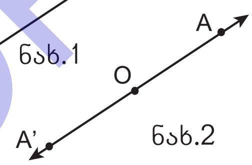
პარალელური გადატანისა და ჰომოთეტიის გამეორება, კოორდინატებში ჩაწერა და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება

გავიხსენოთ ჰომოთეტიის განმარტება: ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია O წერტილი და ნებისმიერი დადებითი k რიცხვი. სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, რომლის დროსაც სიბრტყის ყოველი A წერტილი აისახება OA სხივზე მდებარე ისეთ A_1 წერტილში, რომ სრულდება $\frac{OA_1}{OA}=k$ ტოლობა, ეწოდება ჰომოთეტია O ცენტრითა და k კოეფიციენტით და H_O^k ჩანაწერით აღინიშნება.

1-ელ ნახაზზე A_1 წერტილი მიღებულია A წერტილის H_0^2 ჰომოთეტიით, რადგან A_1-წერტილი OA სხივზე მდებარეობს და სრულდება $\frac{OA_1}{OA}=2$ ტოლობა.



ნახ.1

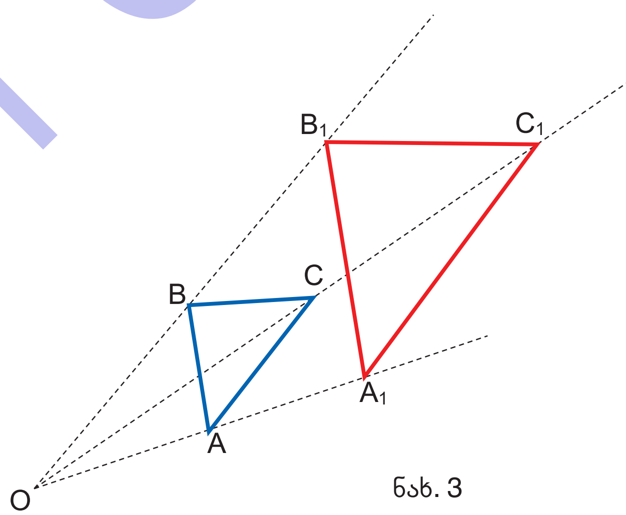


ნახ.2

ჰომოთეტია განიმარტება უარყოფითი კოეფიციენტისთვისაც. ამ შემთხვევაში A_1 წერტილი აიღება OA-ს დამატებით სხივზე ისე, რომ $\frac{OA_1}{OA}=-k$. მე-2 ნახაზზე მოცემულია წერტილების განლაგება $H_O^{-1}(A)=A'$ შემთხვევაში.

თუ H_0^k ჰომოთეტიით F ფიგურა F_1 ფიგურაში გადადის, მაშინ F_1 ფიგურას ეწოდება F ფიგურის ჰომოთეტიური ფიგურა k კოეფიციენტით.

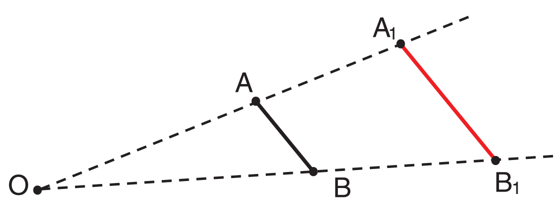
მე-3 ნახაზზე მოცემულია ABC სამკუთხედის ჰომოთეტიური $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი 2-ის ტოლი კოეფიციენტით. ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება: $H_O^2(ABC)=A_1B_1C_1$.



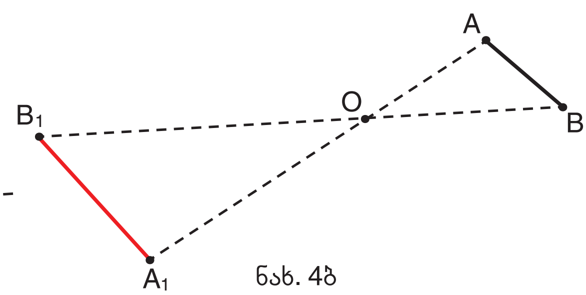
ნახ. 3

ამოცანა 1. ავაგოთ AB მონაკვეთის ჰომოთეტიური მონაკვეთი მოცემული O ცენტრით და k კოეფიციენტით.

ამოხსნა: საკმარისია ავაგოთ A და B წერტილების ჰომოთეტიური წერტილები და შევაერთოთ. მე-4 ა ნახაზზე აგება შესრულებულია 1,5 კოეფიციენტის, ხოლო მე-4 ბ ნახაზზე –1,5 კოეფიციენტისთვის.



ნახ. 4ა



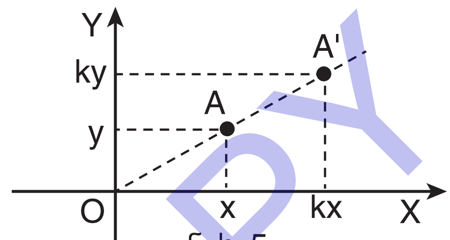
ნახ. 4ბ

ორივე ნახაზზე $\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=|k|=1,5$. ეს კი ნიშნავს, რომ $A_1B_1C_1$ და ABC მსგავსი სამკუთხედებია მსგავსების |k| კოეფიციენტით (ახსენი რატომ). ამასთან, ჰომოთეტიით AB მონაკვეთი მის პარალელურ მონაკვეთში გადავიდა. აქედან ვასკვნით:

თეორემა 1. H_O^k ჰომოთეტიით წრფე პარალელურ წრფეში, ხოლო ფიგურა მსგავს ფიგურაში გადადის.

თეორემა 2. ჰომოთეტიით კუთხის სიდიდე არ იცვლება, ხოლო მონაკვეთის სიგრძე |k|-ზე მრავლდება.

შედეგი. ჰომოთეტიური ფიგურების პერიმეტრების შეფარდება |k|-ს, ხოლო ფართობების შეფარდება k^2-ის ტოლია.



ნახ. 5

განვიხილოთ ჰომოთეტია საკოორდინატო სიბრტყის შემთხვევაში. თუ ჰომოთეტიის ცენტრად კოორდინატთა სათავეს ავიღებთ, მაშინ ყოველი A (x; y) წერტილი A'(kx; ky) წერტილში გადავა (ნახ. 5).

ამოცანა 2. რა კოორდინატები ექნება A (x;y) წერტილის ანასახს, თუ მასზე $H_O^{k_1} o H_O^{k_2}$ კომპოზიციით ვიმოქმედებთ?

ამოხსნა: $H_O^{k_2}(A)=A_1(k_2x;k_2y)$, ხოლო $H_O^{k_1}(A_1)=A_2(k_1k_2x;k_1k_2y)$.

პასუხი: ანასახის კოორდინატებია $(k_1k_2x;k_1k_2y)$.

ამოცანა 3. საკოორდინატო XOY სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი: $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$. რა სიგრძე ექნება AB მონაკვეთის H_O^k ჰომოთეტიით მიღებულ ანასახს?

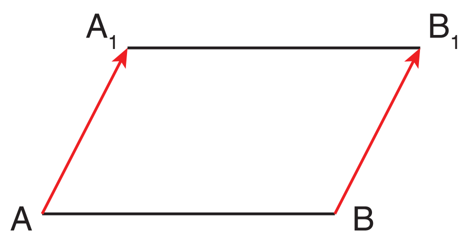
ამოხსნა: მე-2 თეორემის თანახმად, AB მონაკვეთის ანასახის სიგრძე იქნება AB-ს სიგრძე გამრავლებული k-ს მოდულზე. ამიტომ, საკმარისია გამოვთვალოთ AB მონაკვეთის სიგრძე და გავამრავლოთ |k|-ზე. AB მონაკვეთის სიგრძე კი, A და B წერტილების მოცემული კოორდინატების მიხედვით, როგორც ვიცით, გამოითვლება ფორმულით:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

პასუხი: $|k|\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

გავიხსენოთ **პარალელური გადატანა.**

პარალელურ გადატანას ყოველი წერტილი ერთი და იმავე მიმართულებით და ერთი და იმავე მანძილზე გადააქვს.



ნახ. 6

მე-6 ნახაზზე მოცემულია პარალელური გადატანა, რომელსაც A წერტილი A_1 წერტილში, B წერტილი B_1 წერტილში, ხოლო AB მონაკვეთი A_1B_1 მონაკვეთში გადააქვს. იმის გამო, რომ ნახაზზე მოცემული AA_1B_1B ოთხკუთხედი პარალელოგრამია (ახსენი, რატომ), შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ:

ა) A_1B_1 =AB, ანუ პარალელური გადატანა მანძილებს არ ცვლის;

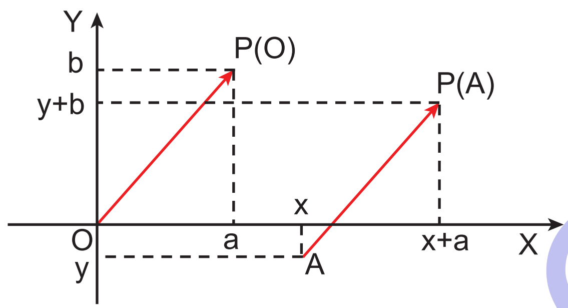
ბ) $A_1B_1 \parallel AB$, ანუ პარალელურ გადატანას მონაკვეთი მის პარალელურ მონაკვეთში გადააქვს.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა. პარალელურ გადატანას ფიგურა მის ტოლ ფიგურაში გადააქვს.

პარალელურ გადატანას, თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად, ისრით აღნიშნავენ. მაგალითად, მე-6 ნახაზზე AA_1 და BB_1 ისრებით ერთი და იგივე პარალელური გადატანაა აღნიშნული, რადგან მათ ერთი და იგივე სიგრძე და ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ. პარლელურ გადატანას P ასოთი აღვნიშნავთ. ის ფაქტი, რომ P პარალელური გადატანით A წერტილი A_1 წერტილში გადადის, ასე ჩაიწერება: $P(A)= A_1$.

მე-7 ნახაზზე მოცემულია XOY საკოორდინატო სიბრტყე და P პარალელური გადატანა. P(0) წერტილის კოორდინატებს პარალელური გადატანის კოორდინატები ეწოდება. მოცემულ ნახაზზე P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (a;b).



ნახ. 7

როგორც ნახაზიდან ჩანს (a;b) კოორდინატების მქონე P პარალელურ გადატანას ყოველი (x;y) კოორდინატების მქონე A წერტილი (x+a; y+b) კოორდინატების მქონე P(A) წერტილში გადააქვს.

ხშირად პარალელურ გადატანას ვექტორთან აიგივებენ, რადგან ვექტორიც ისევე, როგორც პარალელური გადატანა, მიმართულებითა და სიგრძით განისაზღვრება. ასეთი გაიგივების შემთხვევაში ორი ვექტორის ჯამს ორი პარალელური გადატანის კომპოზიცია შეესაბამება.

ამოცანა 4. რა კორდინატები ექნება A(x;y) წერტილის ანასახს, თუ მასზე P_1oP_2 კომპოზიციით ვიმოქმედებთ, სადაც P_1 და P_2 პარალელური გადატანებია, შესაბამისად $(a_1; b_1)$ და $(a_2; b_2)$ კოორდინატებით?

ამოხსნა: $P_2(A)=A_1(x+a_2;y+b_2)$, $P_1(A_1)=A_2(x+a_2+a_1;y+b_2+b_1)$..

პასუხი: ანასახის კოორდინატებია $(x+a_1+a_2;y+b_1+b_2)$.

ამ ამოცანაში მიღებული პასუხიდან ვასკვნით, რომ ორი პარალელური გადატანის კომპოზიციის კოორდინატები თითოეული პარალელური გადატანის კოორდინატების ჯამის ტოლია.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ ააგებ: ა) მრავალკუთხედის ჰომოთეტიურ მრავალკუთხედს? ბ) წრფის ჰომოთეტიურ წრფეს?
2. რა ფიგურაში გადაიყვანს ჰომოთეტია წრფეს?
3. როგორ სამკუთხედში გადაიყვანს ჰომოთეტია სამკუთხედს?
4. რა კოორდინატები აქვს მოცემული წერტილის ჰომოთეტიით მიღებულ წერტილს, თუ ჰომოთეტიის ცენტრი კოორდინატთა სათავე, ხოლო კოეფიციენტი k-ს ტოლია?
5. თუ ჰომოთეტია ცენტრული სიმეტრიაა, მაშინ რის ტოლია მისი კოეფიციენტი?
6. რას გვიჩვენებს პარალელური გადატანის კოორდინატები?
7. როგორ გამოითვლება ორი პარალელური გადატანის კომპოზიციის კოორდინატები?

სავარჯიშოები

1 დახაზე AB მონაკვეთი და ააგე მისი ჰომოთეტიური A_1B_1 მონაკვეთი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრი მონაკვეთს არ ეკუთვნის და: ა) k= 2; ბ) k=0,5.

2 დახაზე AB მონაკვეთი და ააგე მისი ჰომოთეტიური A_1B_1 მონაკვეთი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრი მონაკვეთის შიგა წერტილია და: ა) k= -2; ბ) k=0,5.

3 დახაზე AB მონაკვეთი და ააგე მისი ჰომოთეტიური A_1B_1 მონაკვეთი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრია A წერტილი და: ა) k= 2; ბ) k=-0,5;

4 მესამე ნახაზის მიხედვით დაადგინე O ცენტრის მქონე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ ჰომოთეტიით:
ა) A წერტილი A_1 წერტილში გადავიდა;
ბ) A_1 წერტილი A წერტილში გადავიდა.

5 დახაზე ABCD ოთხკუთხედი და ააგე მისი ჰომოთეტიური $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრი ოთხკუთხედის შიგა წერტილია, თუ: ა) k= 2; ბ) k=0,5.

6 იპოვე A(2; –3) წერტილის ჰომოთეტიური წერტილის კოორდინატები, თუ ჰომოთეტიის ცენტრია კოორდინატთა სათავე, ხოლო კოეფიციენტი –2,5.

7 იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ 2 სმ-იანი რადიუსის წრეს იგი 7 სმ-იანი რადიუსის წრეში ასახავს.

8 იპოვე იმ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, რომელიც:
ა) დედამიწას მზეზე ასახავს;
ბ) დედამიწას მთვარეზე ასახავს.

9 იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ 12,6 სმ-ის სიგრძის მონაკვეთი ჰომოთეტიით 16,8 სმ სიგრძის მონაკვეთში აისახა.

10 იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ ის 9 სმ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედს, 27 სმ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედში ასახავს.

11 იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ ის 10 სმ^2 ფართობის ოთხკუთხედს 40 სმ^2 ფართობის მქონე ოთხკუთხედში ასახავს.

12 რა კოორდინატების მქონე წერტილში გადავა A(3; –2,5) წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიით, რომლის კოეფიციენტია: ა) 4; ბ) –1.

13 კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიით A(1; 7) წერტილი A_1(–4; x) წერტილში გადავიდა. იპოვე x.

14 იპოვე კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ A(3; 0) წერტილი ამ ჰომოთეტიით B(–9; 0) წერტილში გადავიდა.

15 რამდენი განსხვავებული ჰომოთეტიით შეიძლება ორი კონცენტრირებული წრიდან ერთის მეორეზე ასახვა?

16 P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (1; –1). იპოვე P(A) წერტილის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია: ა) (–1; 1); ბ) (4; –3).

17 იპოვე P პარალელური გადატანის კოორდინატები, თუ მას A(3; –2) წერტილი B(–1; 4) წერტილში გადააქვს.

18 პარალელურმა გადატანამ A(–5; 2,2) წერტილი B(0; 2,7) წეტილში ასახა. რა კოორდინატების მქონე წერტილში ასახავს იგივე პარალელური გადატანა კოორდინატთა სათავეს?

19 პარალელური გადატანით D(7; –2) წერტილი კოორდინატთა სათავეში აისახა. იპოვე პარალელური გადატანის კოორდინატები.

20 რა წერტილში აისახება A(1; 3) წერტილი, თუ მასზე ჯერ კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით, ხოლო შემდეგ P(1; –1) პარალელური გადატანით ვიმოქმედებთ?

21 რა წერტილში აისახება A(3; –3) წერტილი, თუ მასზე ჯერ ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიით, ხოლო შემდეგ P(1; –1) პარალელური გადატანით ვიმოქმედებთ?

22 P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (–2; 3). რა კოორდინატები აქვს PoP კომპოზიციას?

23 დაამტკიცე რომ: $H_O^k \circ H_O^{\frac{1}{k}}$ კომპოზიცია ერთი და იმავე O ცენტრის მქონე ჰომოთეტიების შემთხვევაში იგივური გარდაქმნაა.

24 დაამტკიცე, რომ P(a,b) და P(-a;-b) პარალელური გადატანების კომპოზიცია იგივური გარდაქმნაა.

25 რამდენი განსხვავებული ჰომოთეტიით შეიძლება $R_1 \neq R_2$ რადიუსების მქონე თანაუკვეთი წრიდან ერთის მეორეზე ასახვა? თითოეულ შემთხვევაში გამოთვალე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი.

26 გამოთვალე ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი, თუ k=3 კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტიით ეს სამკუთხედი $36\sqrt{3}$ სმ² ფართობის მქონე სამკუთხედზე აისახება.

27 დაამტკიცე, რომ ჰომოთეტიის ცენტრზე გამავალი წრფე ჰომოთეტიით თავის თავზე აისახება.

28 გამოთვალე $P \circ H_O^k$ და $H_O^k \circ P$ გარდაქმნებით A(x;y) წერტილის ანასახების კოორდინატები, თუ P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (a;b), ხოლო ჰომოთეტიის ცენტრია კოორდინატთა სათავე. რა შემთხვევაში იქნება მოცემული ორი გარდაქმნა ერთი და იგივე?

29 რა წრფეში აისახება y=2x+3 ფუნქციის გრაფიკი (-2; 4) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანით?

30 რა წრფეში აისახება y=ax+b ფუნქციის გრაფიკი ჰომოთეტიით, რომლის ცენტრია კოორდინატთა სათავე, ხოლო კოეფიციენტი – k.

მეხუთე თავის მიმოხილვა

რა გავიმეორეთ ამ თავში?

- გეომეტრიის ძირითადი ცნებები;
- სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები;
- ტოლფერდა სამკუთხედის, კუთხის ბისექტრისისა და და მონაკვეთის შუა მართობის თვისებები;
- სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები;
- სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება;
- მეტრული და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში;
- ოთხკუთხედების კლასიფიკაცია და თვისებები;
- მრავალკუთხედების ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები;
- წრეწირთან დაკავშირებული კუთხეების გამოთვლა;
- წრისა და მისი ნაწილების ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები;
- გადამკვეთი ქორდების, მხებებისა და მკვეთების თვისებები;
- წესიერი მრავალკუთხედები;
- გეომეტრიული გარდაქმნები და მათი თვისებები.

უპასუხე კითხვებს:

- როგორ ბრტყელ ფიგურებს ეწოდება ტოლი ფიგურები?
- სამკუთხედების ტოლობის დასადგენად მათი რამდენი და რომელი ელემენტების გაზომვაა საკმარისი?
- ტოლფერდა სამკუთხედების რა თვისებები იცი?
- სამკუთხედის ტოლფერდობის რა ნიშნებია შენთვის ცნობილი?
- რაში მდგომარეობს კუთხის ბისექტრისის თვისება?
- რაში მდგომარეობს მონაკვეთის შუა მართობის თვისება?
- საკმარისია თუ არა მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობისათვის კათეტისა და ჰიპოტენუზის ტოლობა?
- სამკუთედების მსგავსების დასადგენად საკმარისია თუ არა ორი კუთხის ტოლობა?
- მსგავსებია თუ არა მართკუთხა სამკუთხედები, თუ მათ თითო მახვილი კუთხე ტოლი აქვთ?
- რა თვისება აქვს სამკუთხედის ბისექტრისას? მედიანას?
- სამკუთხედის ფართობის რამდენი პროცენტია შუა ხაზით ჩამოჭრილი ოთხკუთხედის ფართობი?
- როგორ გამოითვლი ტრაპეციის ფართობს?
- სად მდებარეობს სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრი?
- რა ფომულით გამოითვლება მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი?
- როგორ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი?
- რომელი გეომეტრიული გარდაქმნები ასახავს ფიგურას მის ტოლ ფიგურაში?
- რომელი გეომეტრიული გარდაქმნა ასახავს ფიგურას მის მსგავს ფიგურაში?
- როგორ გამოითვლება ჰომოთეტიით მიღებული წერტილის კოორდინატები?

შეარჩიე მარჯვენა სვეტიდან სათანადო სიტყვა და ჩასვი წინადადებაში გამოტოვებულ ადგილზე	
მონაკვეთის ბოლოებიდნ ტოლად დაშორებული წერტილი მონაკვეთის ----- მდებარეობს.	ბისექტრისაზე გვერდების შუა მართობზე ნამრავლის ჯამის მსგავსი ტოლი ფარდობა კუთხეების
კუთხის გვერდებიდან ტოლად დაშორებული წერტილი კუთხის ------ მდებარეობს.	
წრეზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე ------- ჯამი ტოლია.	
წრეში ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე ------ ჯამი ტოლია..	
რომბის ფართობი დიაგონალების ------- ნახევრის ტოლია.	
მრავალკუთხედის პერიმეტრი გვერდების ------- ტოლია.	
მსგავსი ფიგურების გვერდების ----- მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია.	
პარალელური გადატანით ფიგურის ------ ფიგურა მიიღება.	
ჰომოთეტიით ფიგურის -------- ფიგურა მიიღება.	

სავარჯიშოები

1 მოსაზღვრე კუთხეებს შორის ფარდობაა 5:13. იპოვე თითოეულის სიდიდე.

2 იპოვე 20°-იანი კუთხის მოსაზღვრე კუთხის სიდიდე.

3 მოცემული A, B და C წერტილებიდან რომელი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის, თუ AB=7 სმ, BC=9 სმ, AC=2 სმ.

4 ტოლფერდა სამკუთხედის ერთი კუთხე 100°-ის ტოლია. გამოთვალე დანარჩენი კუთხეები.

5 მართკუთხა ტრაპეციის ორი კუთხის შეფარდებაა 1:5. იპოვე ეს კუთხეები.

6 იპოვე რომბის კუთხეები, თუ ერთ-ერთი დიაგონალი გვერდთან 10°-ის ტოლ კუთხეს ადგენს.

7 რას უდრის წესიერი რვაკუთხედის შიგა კუთხე?

8 გამოთვალე 5სმ გვერდის მქონე ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი.

9 გამოთვალე ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი ამ სამკუთხედში ჩახაზული r წრის რადიუსით.

10 გამოთვალე ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი ამ სამკუთხედზე შემოხაზული R წრის რადიუსით.

11 გამოთვალე კვადრატის ფართობი, თუ შემოხაზული წრის რადიუსია R.

12 გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი გვერდებია 3 სმ და 5სმ, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე – 30°.

13 გამოთვალე პარალელოგრამის დიდ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, თუ მცირე გვერდია a, ხოლო მახვილი კუთხე – α.

14 გამოთვალე ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, თუ ფერდი 13 სმ-ია, ხოლო ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ფუძეს 5 სმ-იან და 15 სმ-იან მონაკვეთებად ყოფს.

15 გამოთვალე მართკუთხა ტრაპეციის ფართობი, თუ ჩახაზული წრის რადიუსია r, ხოლო მახვილი კუთხე – α.

16 გამოთვალე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები, თუ მათი ჰიპოტენუზაზე გეგმილებია p და q.

17 გამოთვალე $\sin^2 15° + \cos^2 15° + \sin^2 30°$.

18 გამოთვალე $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

19 გამოთვალე $\sin\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\cos\alpha = 0{,}5$.

20 გამოთვალე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha = 1{,}2$.

21 გამოთვალე მხების მონაკვეთი, თუ იმავე წერტილიდან გავლებული მკვეთის გარე მონაკვეთია a , ხოლო შიგა მონაკვეთი – b.

22 საკოორდინატო XOY სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი: A(–2; 6) და B(1; 2). რა სიგრძე ექნება AB მონაკვეთის:

ა) P(1; 1) პარალელური გადატანით მიღებულ ანასახს?

ბ) $R_O^{15°}$ - მობრუნებით მიღებულ ანასახს?

გ) H_O^5 ჰომოთეტიით მიღებულ ანასახს?

23 გამოთვალე A(4; –1) წერტილისგან მიღებული წერტილის კოორდინატები, თუ A-ზე ჯერ P(–3; 4) პარალელური გადატანით, ხოლო შემდეგ H_O^3 ჰომოთეტიით ვიმოქმედებთ.

შესაძლებელია თუ არა ?

α მახვილი კუთხისათვის შესრულდეს ტოლობა: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1$.

აბა, სცადე!

იპოვე x-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ 3 სმ, 4 სმ და x სმ: ა) ბლაგვკუთხა; ბ) მახვილკუთხა სამკუთხედის გვერდებია.

წყვილებში სამუშაო

„სამკუთხა ნაკვეთის გაყოფა“

ა) სამმა ძმამ სამკუთხედის ფორმის ნაკვეთი უნდა გაიყოს. დაეხმარეთ ძმებს ნაკვეთის ტოლად გაყოფაში.

ბ) როგორ გაუყოფდი სამკუთხედის ფორმის ნაკვეთს თანაბრად 4 ძმას? 6 ძმას?

ტესტი თვითშეფასებისთვის

1. ორი წრფის გადაკვეთით მიღებული ორი ვერტიკალური კუთხის ჯამი 140 გრადუსია. გამოთვალე ერთ-ერთის მოსაზღვრე კუთხე.
ა) 70°; ბ) 90°; გ) 110°; დ) 70°.

2. გამოთვალე სამკუთხედის გარე კუთხე, თუ მისი მოსაზღვრე შიდა კუთხე 40-გრადუსიანია.
ა) 140°; ბ) 50°; გ) 320°; დ) 80°.

3. მოცემული A, B და C წერტილებიდან რომელი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის, თუ AB=9 სმ; BC=9 სმ, AC=18 სმ.
ა) A; ბ) B; გ) C; დ) არცერთი.

4. ტოლფერდა სამკუთხედის ორი კუთხის შეფარდებაა 2:1. გამოთვალე წვეროსთან მდებარე კუთხე.
ა) 30° ან 40°; ბ) 45° ან 90°; გ) 36° ან 90°; დ) 72° ან 120°.

5. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრია 28 სმ, ხოლო ორი გვერდის შეფარდება 1:3. გამოთვალე ფუძე.
ა) 12 სმ; ბ) 10 სმ; გ) 8 სმ; დ) 4 სმ.

6. ტრაპეციის ფუძეებია 8 სმ და 16 სმ. რას უდრის შუა ხაზი?
ა) 12 სმ; ბ) 13 სმ; გ) 14 სმ; დ) 15 სმ.

7. ტრაპეციის შუა ხაზის სიგრძეა 10 სმ, ხოლო ფუძების შეფარდება – 2:3. იპოვე ფუძეები.
ა) 8 სმ და12 სმ; ბ) 4 სმ და 6 სმ; გ) 9 სმ და 11 სმ; დ) 6 სმ და 9 სმ.

8. პარალელოგრამის ორი კუთხის შეფარდებაა 5:13. რას უდრის უმცირესი კუთხე?
ა) 40°; ბ) 50°; გ) 60°; დ) 80°.

9. პარალელოგრამის ორი კუთხის ჯამია 300°. რას უდრის პარალელოგრამის მახვილი კუთხის სიდიდე?
ა) 60°; ბ) 45°; გ) 30°; დ) 80°.

10. იპოვე რომბის მახვილი კუთხე, თუ ერთ-ერთი დიაგონალი გვერდთან 60°-ის ტოლ კუთხეს ადგენს.
ა) 60°; ბ) 45°; გ) 30°; დ) 120°.

11. რას უდრის წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი, თუ შემოხაზული წრის რადიუსია 8 სმ?
ა) 12 სმ; ბ) 10 სმ; გ) 8 სმ; დ) 4 სმ.

12. რას უდრის წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის სკვერის ფართობი, თუ მისი გვერდი 4 მ-ია?
ა) 16 მ²; ბ) $8\sqrt{3}$ მ²; გ) $24\sqrt{3}$ მ²; დ) $24\sqrt{2}$ მ².

13. რას უდრის კვადრატული ფორმის მოედნის ფართობი, თუ მასში ჩახაზული წრის რადიუსი 2 მ-ია?
ა) 16 მ^2; ბ) $8\sqrt{3}$ მ^2; გ) $24\sqrt{3}$ მ^2; დ) $24\sqrt{2}$ მ^2.

14. გამოთვალე $2\sqrt{3}$ სმ გვერდის მქონე ტოლგვერდა სამკუთხედის ჩახაზული წრის რადიუსი.
ა) 2 სმ; ბ) $\sqrt{3}$ სმ; გ) 3 სმ; დ) 1 სმ.

15. რამდენჯერ აღემატება ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსს შემოხაზული წრის რადიუსი.
ა) 1,5-ჯერ; ბ) 2-ჯერ; გ) 2,5-ჯერ დ) 3-ჯერ.

16. რამდენჯერ აღემატება კვადრატზე შემოხაზული წრის რადიუსი ჩახაზული წრის რადიუსს?
ა) $\sqrt{2}$-ჯერ; ბ) $\sqrt{3}$-ჯერ; გ) 2-ჯერ; დ) 3-ჯერ.

17. სამკუთხედის გვერდებია 4 სმ და 5 სმ, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსი – 0,2. გამოთვალე ფართობი.
ა) 4 სმ^2; ბ) 2 სმ^2; გ) 10 სმ^2; დ)8 სმ^2.

18. გამოთვალე წრის ფართობი, თუ მისი დიამეტრია 10 სმ.
ა) 25π სმ^2; ბ) 100π სმ^2; გ) 10π სმ^2; დ) 5π სმ^2.

19. წრის ორი გადამკვეთი ქორდიდან გადაკვეთის წერტილით ერთი 2 სმ და 18 სმ მონაკვეთებად, ხოლო მეორე ტოლ მონაკვეთებად გაიყო. რა სიგრძისაა მეორე ქორდა?
ა) 24 სმ; ბ) 9 სმ; გ) 6 სმ; დ) 12 სმ.

20. გამოთვალე რომბის ფართობი, თუ მისი დიაგონალებია 7 სმ და 8 სმ.
ა)14 სმ^2; ბ) 56 სმ^2; გ) 15 სმ^2; დ) 28 სმ^2.

21. გმოთვალე $\sin^2 30°\cdot \mathrm{tg}^2 60°$.
ა) 0,75; ბ) 0,5; გ) 1; დ) 0,09.

22. გამოთვალე მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, თუ კათეტი 7 სმ, ხოლო მიმდებარე კუთხის ტანგენსი 2-ის ტოლია.
ა) 14 სმ^2; ბ) 49 სმ^2; გ) 98 სმ^2; დ) 21 სმ^2.

23. რა სიგრძისაა მონაკვეთი, თუ 2,5 კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტიით ის 10 სმ სიგრძის მონაკვეთზე აისახა?
ა) 2 სმ; ბ) 4 სმ; გ) 25 სმ; დ) 12,5 სმ.

24. რა კოორდინატები აქვს A წერტილს თუ P(3, 5) პარალელური გადატანით ის B(–2; 0) წერტილში გადავიდა.
ა) (–5; 5); ბ) (1; 5); გ) (–6; 0) ; დ) (–5; –5).

25. გამოთვალე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდება თუ ჰიპოტენუზაზე მათი გეგმილების შეფარდება 9-ის ტოლია.
ა) 1; ბ) 2; გ) 3; დ) 4.

თავი 6. განტოლება, უტოლობა, განტოლებათა სისტემა

ამ თავში გაიმეორებ და გაიღრმავებ ცოდნას თემებზე:

- ტოლობისა და უტოლობის თვისებები;
- განტოლება, განტოლების ფესვი, ტოლფასი განტოლებები;
- წრფივი, კვადრატული, რაციონალური და მოდულის შემცველი განტოლებები;
- წრფივი, კვადრატული და რაციონალური უტოლობები;
- უტოლობათა ამოხსნის ინტერვალთა მეთოდი;
- განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები;
- ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა და უტოლობათა გამოყენებით.

აბა, სცადე!

სკვერში უნდა მოეწყოს პარალელოგრამის ფორმის საბავშვო მოედანი, რომლის ფართობი იქნება S მ^2, ხოლო მახვილი კუთხე α. გამოთვალე, რა სიგრძის გვერდები უნდა ჰქონდეს სკვერს, რათა მისი პერიმეტრი იყოს უმცირესი.

კომპლექსური დავალება

„საშუალო სიდიდეები, თვისებები და გამოყენება“

მათემატიკაში, როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული საჭიროებიდან გამომდინარე, სხვადასხვა სახის საშუალოს განიხილავენ. მაგალითად, რიცხვით მონაცემთა სტატისტიკური ანალიზისთვის იყენებენ საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო კვადრატულ გადახრას, ხელოვნებასა და არქიტექტურაში გამოიყენება საშუალო გეომეტრიული (იგივე საშუალო პროპორციული), ფიზიკაში საშუალო სიჩქარის გამოთვლისას მიიღება საშუალო ჰარმონიული, გეომეტრიაში სხვადასხვა მონაკვეთს შორის კავშირი საშუალო გეომეტრიულით ხორციელდება და ა.შ. მოვიყვანოთ სხვადასხვა საშუალოს განმარტება და თვისებები ორი a და b დადებითი რიცხვის შემთხვევაში:

1. საშუალო ჰარმონიული $= \dfrac{2ab}{a+b}$;
2. საშუალო გეომეტრიული (პროპორციული) $=\sqrt{ab}$;
3. საშუალო არითმეტიკული $=\dfrac{a+b}{2}$;
4. საშუალო კვადრატული $=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

საშუალოთა თვისებები

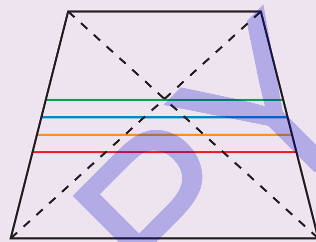
I. თუ $a<b$, მაშინ ოთხივე საშუალო მოთავსებულია $(a; b)$ შუალედში, ამასთან, მოცემულ ჩამონათვალში საშუალოები ზრდის მიხედვითაა დალაგებული;

II. ოთხი საშუალოდან რომელიმე ორი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=b$. ამ შემთხვევაში თითოეული მათგანი a-ს ტოლია.

შენი დავალება:

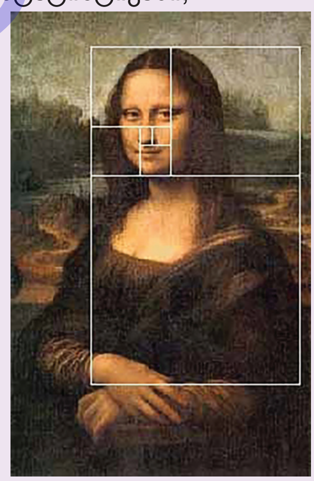
1. სცადე მოცემული თვისებების დასაბუთება;

2. მოიძიე მოცემული საშუალოების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. მაგალითად, გაარკვიე, რა მონაკვეთებია a და b ფუძეების საშუალოები ტრაპეციაში. კერძოდ, დაამტკიცე, რომ ფუძეების პარალელური წრფის ის ნაწილი, რომელიც ფერდებს შორისაა მოქცეული და:



   ა) გადის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე, ფუძეების საშუალო ჰარმონიულია (მწვანე მონაკვეთი ნახაზზე);
   ბ) ტრაპეციას ორ მსგავს ფიგურად ყოფს, ფუძეების საშუალო გეომეტრიულია (ლურჯი მონაკვეთი ნახაზზე);
   გ) ფერდებს შუაზე ყოფს, ფუძეების საშუალო არითმეტიკულია (ყავისფერი მონაკვეთი ნახაზზე);
   დ) ტრაპეციას ტოლდიდ ფიგურებად ყოფს, ფუძეების საშუალო კვადრატულია (წითელი მონაკვეთი ნახაზზე).

3. განიხილე საშუალოთა გამოყენების მაგალითები პრაქტიკაში:
   ა) საშუალო არითმეტიკული და საშუალო კვადრატული სტატისტიკაში;



   ბ) საშუალო გეომეტრიული ხელოვნებასა და არქიტექტურაში (განმარტე და გამოთვალე ოქროს კვეთის პროპორცია);
   გ) საშუალო ჰარმონიული ფიზიკაში (დაამტკიცე, რომ თუ S მანძილი ავტომობილმა ერთ შემთხვევაში V_1 სიჩქარით, ხოლო მეორე შემთხვევაში V_2 სიჩქარით დაფარა, მაშინ მისი საშუალო სიჩქარე მოცემული სიჩქარეების საშუალო ჰარმონიულის ტოლია).

4. 1-2 თვისებებიდან გამომდინარეობს უტოლობა:

   $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, ამასთან, $a+b=2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a=b$.

   ამ უტოლობის გამოყენებით:
   ა) დაამტკიცე, რომ 1-ის არატოლი ნებისმიერი დადებითი რიცხვისა და მისი შებრუნებულის ჯამი მეტია 2-ზე;
   ბ) დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი მახვილი α კუთხისათვის $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \leq 0{,}5$;
   გ) ამოხსენი თავფურცელსა და თავის მიმოხილვაში მოცემული „აბა, სცადეს“ ამოცანები.

5. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:
   - რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
   - რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ კვლევას;
   - როგორ დაასაბუთე საშუალოთა თვისებები;
   - როგორ ააგე: ა) პარალელოგრამის, ბ) სექტორის პერიმეტრის შესაბამისი გამოსახულება;
   - როგორ დაადგინე ოქროს კვეთის შეფარდების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

თავი 7. ფუნქციები და გრაფიკები

ამ თავში გაიმეორებ და გაიღრმავებ ცოდნას შემდეგ საკითხებში:

- რიცხვითი ფუნქციის ცნება;
- არგუმენტი და ფუნქცია;
- ფუნციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე;
- ფუნქციის თვისებები: ლუწობა და კენტობა, ზრდადობა და კლებადობა, მაქსიმუმი და მინიმუმი, უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, ნიშანმუდმივობის შუალედები, ნულები.
- ფუნქციის მოცემის ხერხები: ცხრილი, ფორმულა, გრაფიკი;
- წრფივი ფუნქცია და მისი გრაფიკი;
- კვადრატული ფუნქცია და მისი გრაფიკი;
- პირდაპირპროპორციულობისა და უკუპროპორციულობის ფუნქციები;
- მოდულის შემცველი და ირაციონალური ფუნქციები;
- ფუნქციათა გამოკვლევა გრაფიკის მეშვეობით;
- ფუნქციათა თვისებების გამოყენება ყოფითი ამოცანების ამოსახსნელად.

აბა, სცადე!

აბსცისათა ღერძითა და y=4–|x| ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრულ ფიგურაში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ერთი გვერდი აბსცისათა ღერძზე, ხოლო ორი წვერო y=4–|x| ფუნქციის გრაფიკზე ძევს. გამოთვალე ასეთ მართკუთხედებს შორის უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის პერიმეტრი.

„ბუნების უდიდეს წიგნს მხოლოდ ის წაიკითხავს, ვინც იცის ენა, რომელზედაც იგია დაწერილი და ეს ენაა მათემატიკა.“

ლეონარდო და ვინჩი
1452-1519

კომპლექსური დავალება
„ოპტიმიზაციის ამოცანები“

ადამიანის საქმიანობის ყველა სფეროში მნიშვნელოვანია, რომ არსებული რესურსებით შესაძლო უდიდესი შედეგი მივიღოთ.

მაგალითად, მოცემული სამშენებლო მასალით შესაძლო უდიდესი ფართობის შენობა ავაშენოთ, მინიმალური ფინანსური დანახარჯით მაქსიმალური მოგება ვნახოთ, მოცემული ავტოპარკით ქალაქის ოპტიმალური სატრანსპორტო უზრუნველყოფა შევძლოთ და ა.შ.

ასეთი სახის ამოცანები ოპტიმიზაციის ამოცანებია, რომელთა გადაწყვეტა, როგორც წესი, მათი შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნასა და გამოკვლევას მოითხოვს.

მოვიყვანოთ ოპტიმიზაციის რამდენიმე მაგალითი საყოფაცხოვრებო პრაქტიკიდან:

მაგალითი 1. ვთქვათ, ვაპირებთ სახლის აშენებას, რომლის საძირკველს მართკუთხედის ფორმა უნდა ჰქონდეს. ჩვენი მიზანია, მასალის მოცემული რაოდენობით შესაძლო უდიდესი ფართობის შენობა აშენდეს. ეს კი არსებითადაა დამოკიდებული შენობის სიგრძესა და სიგანეს შორის პროპორციაზე. ე.ი. უნდა გავარკვიოთ, ერთი და იმავე პერიმეტრის შემთხვევაში, რა პროპორცია უნდა იყოს ფუნდამენტის სიგრძესა და სიგანეს შორის, რათა შენობის ფართობი იყოს უდიდესი.

მაგალითი 2. გვსურს, მანსარდაში მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ოთახის მოწყობა. ამ შემთხვევაში უნდა გავარკვიოთ, რა შეფარდება უნდა იყოს ოთახის სიგანესა და სიმაღლეს შორის, რომ მისი მოცულობა იყოს უდიდესი.

მაგალითი 3. ცილინდრის ფორმის მორისაგან უნდა გამოვჭრათ მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ძელი. ბუნებრივია, ვეცადოთ, რომ ნარჩენი აღმოჩნდეს უმცირესი. ამ შემთხვევაშიც გასარკვევია, რა შეფარდება უნდა იყოს ძელის ორ განზომილებას შორის.

იმისათვის, რომ ამ მაგალითებში დასმულ კითხვებს ვუპასუხოთ, მათი მათემატიკური ამოცანის სახით ჩამოყალიბება, ცვლადების შემოღება, ერთმანეთთან დაკავშირება, შესაბამისი ფუნქციის აგება, მისი გამოკვლევა და დასკვნის გამოტანაა საჭირო. ოპტიმიზაციასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ამოცანა შენს სახელმძღვანელოში შეიძლება მოიძიო. ესაა, მაგალითად, მოცემული პერიმეტრის მქონე უდიდესი ფართობის მართკუთხედის ან სექტორის გამოკვლევა, მოცემულ სამკუთხედში ან წრეში უდიდესი ფართობის მართკუთხედის ჩახაზვა და სხვა.

შენი დავალება:

ა) მოცემული სამი მაგალითის მიხედვით შეადგინე მათემატიკური ამოცანები;

ბ) შედგენილი ამოცანებისთვის ააგე შესაბამისი მათემატიკური მოდელები: შემოიღე და ერთმანეთთან დააკავშირე საჭირო სიდიდეები; შეადგინე ფუნქცია, რომლის უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობებზეა ამოცანაში საუბარი (მოდელის შედგენაში დაგეხმარება 7.6 პარაგრაფში განხილული მე-2 ამოცანა);

გ) დაადგინე მიღებული ფუნქციის შესაბამისი (უდიდესი ან უმცირესი) მნიშვნელობა და საძიებელი პროპორცია;

დ) ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც:

- ჩამოაყალიბებ იმ მათემატიკურ ფაქტებსა და მეთოდებს, რომლებიც დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- კონკრეტული რიცხვითი მონაცემებისთვის შეასრულებ საჭირო გამოთვლებს, ნახაზებს და დაასაბუთებ მიღებული პასუხის ოპტიმალურობას.

ე) ნაშრომში ხაზგასმით წარმოაჩინე:

- როგორ შემოიტანე დავალებების შესაბამისი ცვლადები და როგორ დააკავშირე ისინი ერთმანეთთან;
- როგორ ააგე დავალებების შესაბამისი ფუნქციები ცვლადებს შორის კავშირების საფუძველზე;
- როგორ გამოიკვლიე მიღებული ფუნქციები; როგორ დაადგინე მათი ექსტრემალური მნიშვნელობები.

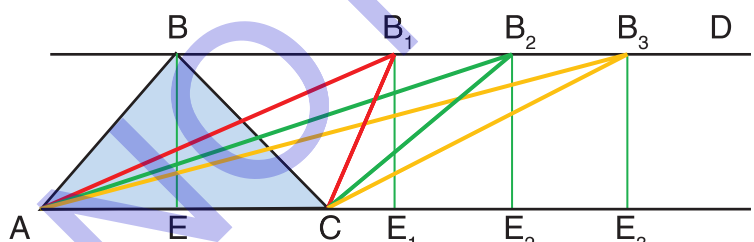
7.1 რიცხვითი ფუნქცია და მისი მოცემის ხერხები

მიზანი

ფუნქციის ცნებისა და მოცემის ხერხების შესახებ წინა კლასებში მიღებული ცოდნის გამეორება/გაღრმავება

პრაქტიკულ საქმიანობაში ადამიანი ხვდება განსხვავებული ბუნების სიდიდეებს: სიგრძეს, ფართობს, მოცულობას, მასას, ტემპერატურასა და სხვ. გარკვეულ პირობებში ზოგიერთი მათგანი იღებს ერთსა და იმავე მნიშვნელობებს, ანუ არ იცვლება, ზოგიერთი კი იცვლის მნიშვნელობებს. მაგალითად,

- ავტომანქანის ერთი პუნქტიდან მეორე პუნქტის მიმართულებით თანაბარი სიჩქარით მოძრაობისას მისი სიჩქარე მუდმივია, ხოლო განვლილი მანძილი და მასზე დახარჯული დრო – ცვლადი. ეს სიდიდეები ერთმანეთთან ფუნქციონალურ დამოკიდებულებაშია, რაც $s=vt$ ფორმულით გამოისახება. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ მოძრავი სხეულის მიერ გავლილი გზა დროის ნებისმიერი მომენტისათვის.
- ვთქვათ, მოცემულია სამკუთხედი ABC. თუ გავავლებთ AC გვერდის პარალელურ BD წრფეს და მასზე B წვეროს ვამოძრავებთ B წერტილიდან D წერტილის მიმართულებით, თანმიმდევრობით მივიღებთ სამკუთხედებს: AB_1C, AB_2C, AB_3C. ამ შემთხვევაში იცვლება AB და BC გვერდების სიგრძე და კუთხეთა სიდიდე, ხოლო სიდიდეს უცვლელად ინარჩუნებს: AC ფუძე, B წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ($BE=B_1E_1=B_2E_2=B_3E_3$) და, შესაბამისად, ABC სამკუთხედის ფართობი.



როგორც ამ მაგალითებში ვნახეთ, სიდიდე შეიძლება იცვლებოდეს, შეიძლება იყოს მუდმივი.

ამოცანის პირობის მიხედვით, ცვლად სიდიდეს სხვადასხვა მნიშვნელობის მიღება შეუძლია. მაგალითად,

- მრავალკუთხედის გვერდებისა თუ კუთხეების რაოდენობა შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, რომელიც არაა 3-ზე ნაკლები.
- წრეში ჩახაზული n-კუთხედის S_n ფართობი შეიძლება იყოს ნებისმიერი დადებითი რიცხვი, რომელიც წრის S ფართობის მნიშვნელობაზე ნაკლებია. რაც იმას ნიშნავს, რომ მრავალკუთხედის ფართობის მნიშვნელობა იცვლება $(0; S)$ ინტერვალში, ანუ $0<S_n<S$.

ორი ცვლადიდან ერთი ცვლადის მნიშვნელობა მეორე ცვლადის მნიშვნელობაზე შეიძლება იყოს დამოკიდებული. მაგალითად, წრის ფართობი დამოკიდებულია რადიუსის სიგრძეზე, საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობა დამოკიდებულია კოორდინატებზე, ხოლო ავტომობილის მიერ გავლილი მანძილი – სიჩქარესა და დახარჯულ დროზე.

x და y ცვლადებს შორის ისეთ დამოკიდებულებას, რომლის დროს x ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას y ცვლადის ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება, ფუნქცია ეწოდება. x ცვლადს

დამოუკიდებელი ცვლადი, ანუ არგუმენტი, ხოლო y ცვლადს დამოკიდებული ცვლადი ეწოდება.

ფუნქციას, როგორც წესი, f ასოთი აღვნიშნავთ. იმ ფაქტს, რომ არგუმენტის x მნიშვნელობას f ფუნქციის y მნიშვნელობა შეესაბამება, ასე ჩავწერთ: $y=f(x)$. იმ მნიშვნელობათა ერთობლიობას, რომელსაც x ცვლადი ღებულობს, ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება. f ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. y ცვლადის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც სრულდება $y=f(x)$ ტოლობა, ქმნის f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელიც $E(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ფუნქციის როგორც განსაზღვრის არე, ისე მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიძლება ნებისმიერი ბუნების სიმრავლე იყოს. მოვიყვანოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. განვიხილოთ ფეხბურთის გუნდი, რომელშიც თითოეულ ფეხბურთელს აქვს ნომერი. თუ თითოეულ ფეხბურთელს შევუსაბამებთ მის ნომერს, მივიღებთ ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე იქნება ფეხბურთელთა გუნდი, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე – ნატურალურ რიცხვთა გარკვეული ერთობლიობა, რომელსაც ფეხბურთელთა ნომრები ქმნის.

მაგალითი 2. საჭადრაკო დაფის ყოველ უჯრას შევუსაბამოთ მისი დასახელება, რომელიც, როგორც ვიცით, ერთი ლათინური ასოსა და ერთი ნატურალური რიცხვისაგან შედგება. ამ შემთხვევაში მივიღებთ ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე იქნება დაფის უჯრები, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე – ლათინური ანბანის პირველი რვა ასო და 1-დან 8-მდე ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი წყვილები.

მაგალითი 3. ყოველ x არაუარყოფით რიცხვს შევუსაბამოთ ისეთი y რიცხვი, რომ შესრულდეს ტოლობა: $x=y^2$. ასე განმარტებული დამოკიდებულება არაა ფუნქცია, რადგან ყოველი დადებით x რიცხვს შეესაბამება y-ის ორი მნიშვნელობა: $\sqrt{x}$ და $-\sqrt{x}$. თუ ამ დამოკიდებულების განმარტებაში დამატებით მოვითხოვთ y-ის არაუარყოფითობას, მივიღებთ ფუნქციას, რომელიც $y=\sqrt{x}$ ტოლობით გამოისახება და რომლის როგორც განსაზღვრის არე, ისე მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0; +\infty)$ შუალედი.

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, **რიცხვითი ფუნქცია** ეწოდება. იმ შემთხვევაში, როცა რიცხვითი ფუნქციის განსაზღვრის არე მითითებული არაა, განსაზღვრის არედ არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე უნდა მივიჩნიოთ.

მაგალითი 4. მოცემულია ფუნქცია $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. ვინაიდან x კვადრატული ფესვის ქვეშაა მოცემული, ამიტომ უნდა მოვითხოვოთ, რომ $x\geq 0$. განსაზღვრების თანახმად $\sqrt{x}\geq 0$, ამოტომ x-ის ყოველი არაუარყოფითი მნიშვნელობისათვის წილადის მნიშვნელი ნულისაგან განსხვავებულია. ე.ი. ასეთი x-თვის ერთადერთი y არსებობს.

მაშასადამე, მოცემული ტოლობით განისაზღვრება ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა $x\geq 0$, ანუ $D=[0; +\infty)$.

x-ის ყოველი დასაშვები მნიშვნელობისათვის $\sqrt{x}+1\geq 1$. შესაბამისად, $0<y\leq 1$. ე.ი. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $E=(0; 1]$.

მოცემულია ფუნქცია ნიშნავს, დადგენილია წესი, რომლის მიხედვით არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის მოიძებნება ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ ფუნქციის მოცემის რამდენიმე ხერხი.

I. ანალიზური ხერხი

ფუნქციის მოცემის ანალიზური ხერხი გულისხმობს ფორმულას, რომელშიც x არგუმენტზე მოცემული ოპერაციების თანმიმდევრობით შესრულებით უნდა მივიღოთ ფუნქციის y მნიშვნელობა.

მაგალითად,

- კვადრატის ფართობი შეგვიძლია გამოვსახოთ ფორმულით – $S=a^2$, სადაც a კვადრატის გვერდია, ხოლო S – ფართობი. კვადრატის ფართობი (S) მისი გვერდის სიგრძის (დამოუკიდებელი a სიდიდის) ფუნქციაა. (a – არგუმენტია, რომელსაც შეუძლია ნებისმიერი არაუარყოფითი მნიშვნელობის მიღება.)
- წრის ფართობი შეგვიძლია გამოვსახოთ ფორმულით $S=\pi R^2$, სადაც R წრის რადიუსია, S – წრის ფართობი, ხოლო $\pi \approx 3{,}14$ მუდმივი რიცხვია (გაიხსენე ამ რიცხვის განმარტება). წრის ფართობი S ფუნქციაა, რადიუსი R – არგუმენტი, რომელსაც ნებისმიერი არაუარყოფითი მნიშვნელობის მიღება შეუძლია.
- ფორმულა შეიძლება განსაზღვრის არის სხვადასხვა ქვესიმრავლეზე განსხვავებული იყოს. მაგალითად,

$$y=\begin{cases} x^2+1, & \text{როცა } x<0; \\ x+1, & \text{როცა } x\geq 0. \end{cases}$$

მაშასადამე, ფუნქციის მოცემა შეიძლება ფორმულით, რომელიც გვიჩვენებს, არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობით როგორ ვიპოვოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა.

II. ცხრილური ხერხი

ეს ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ ცხრილში იწერება არგუმენტის მნიშვნელობები: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ და მათი შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობები: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

ცხრილური ხერხის გამოყენების მაგალითები ხშირად გვხვდებოდა წინა კლასებში (კვადრატების, კუბების, კვადრატული ფესვების, კუბური ფესვების ცხრილები).

განვიხილოთ კიდევ ორი მაგალითი.

1) ვთქვათ, 1 კგ ლობიო ღირს 5 ლარი. ამ მონაცემის მიხედვით შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც გვიჩვენებს დამოკიდებულებას გაყიდული ლობიოს მასასა (კილოგრამებში) და მის მთლიან ღირებულებას (ლარებში) შორის.

მასა (კგ)	1	2	3	4	5	6
ღირებულება (ლარი)	5	10	15	20	25	30

როგორც ცხრილიდან ვხედავთ, ლობიოს მასის ყოველ მნიშვნელობას ღირებულების გარკვეული მნიშვნელობა შეესაბამება, ანუ ერთი ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას მეორე ცვლადის ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება.

2) ვთქვათ, ავტომობილი მოძრაობს 70 კმ/სთ მუდმივი სიჩქარით. მის მიერ t=1, 2, 3, 4, 5 საათში გავლილი მანძილი წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით:

დრო (სთ)	1	2	3	4	5
მანძილი (კმ)	70	140	210	280	350

აქაც ერთი სიდიდის (დროის) მნიშვნელობას მეორე სიდიდის (გავლილი მანძილის) ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება.

ცხრილური ხერხის ნაკლია ის, რომ ცხრილი სრულად არ იძლევა ფუნქციას, რადგან არაა მოცემული მისი მნიშვნელობები იმ არგუმენტებისთვის, რომელიც ცხრილში არ გვაქვს.

ცხრილური ხერხის ანალიზურ ხერხთან უპირატესობაა ის, რომ მასში წარმოდგენილი არგუმენტის მნიშვნელობებით გამოთვლების გარეშე ვპოულობთ ფუნქციის მნიშვნელობას.

III. გრაფიკული ხერხი

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია არის D სიმრავლეზე მოცემული რიცხვითი ფუნქცია. ეს ნიშნავს, რომ x-ის ყოველ მნიშვნელობას D-დან შეესაბამება y-ის გარკვეული მნიშვნელობა. ყოველი ასეთი x და y წყვილი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც საკოორდინატო სიბრტყის წერტილის აბსცისა და ორდინატა. ყველა ასეთი წერტილის გეომეტრიულ ადგილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ფუნქციის გრაფიკის აგების ყველაზე მარტივი ხერხი ე.წ. წერტილების მიხედვით აგებაა. ამ შემთხვევაში დგება ცხრილი:

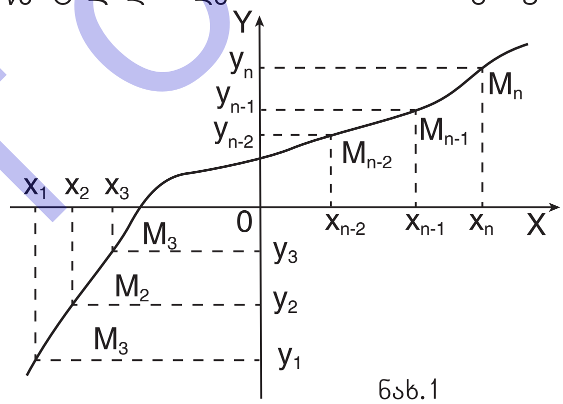
x	x_1	x_2	x_3	.	.	.	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	.	.	.	y_{n-2}	y_{n-1}	y_{n-1}

ამის შემდეგ ნახაზზე დავიტანთ წერტილებს (ნახ.1):

$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ M_3(x_3,y_3),\dots,\ M_{n-2}(x_{n-2},y_{n-2}),\ M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),M(x_n,y_n)_n.$$

ამ წერტილებს შევაერთებთ გლუვი წირით, რომელიც მიახლოებით გამოსახავს ფუნქციას. რაც მეტი წერტილი იქნება აღებული, მით უფრო ზუსტ გრაფიკს მივიღებთ.

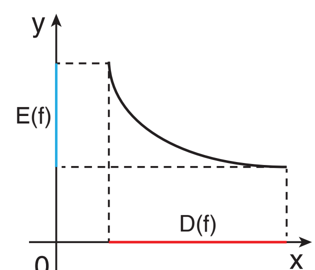
ფუნქცია თუ გრაფიკულადაა მოცემული, მაშინ არგუმენტის ყოველი (დასაშვები) მნიშვნელობისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა. ამისათვის საკმარისია, აბსცისთა ღერძზე არგუმენტის შესაბამისი წერტილიდან აღვმართოთ მართობი გრაფიკის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილიდან დავუშვათ მართობი ორდინატთა ღერძზე. მართობის ფუძის ორდინატა იქნება ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა.



ნახ.1

ფუნქციის მოცემის გრაფიკული ხერხი ფუნქციის თვალსაჩინოდ წარმოდგენის საშუალებაა. გრაფიკის მიხედვით შეგვიძლია ფუნქციის თვისებების დადგენა.

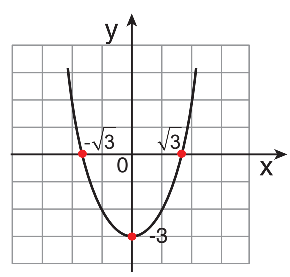
მაგალითად, განსაზღვრის არის დასადგენად უნდა მოვძებნოთ გრაფიკის პროექცია აბსცისათა ღერძზე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლის დასადგენად – პროექცია ორდინატთა ღერძზე (ნახ. 2).



ნახ. 2

მე-3 ნახაზზე მოცემული $y=x^2-3$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ:

- ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty;\ +\infty)$ ინტერვალი;
- ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-3;\ +\infty)$ ინტერვალი;
- ფუნქციის მნიშვნელობა 0-ის ტოლია, როცა არგუმენტის მნიშვნელობაა $-\sqrt{3}$ და $\sqrt{3}$;
- ფუნქცია –3-ის ტოლ მნიშვნელობას ღებულობს არგუმენტის 0-ის ტოლი მნიშვნელობისთვის;
- ფუნქცია უარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს $\left(-\sqrt{3};+\sqrt{3}\right)$ შუალედში;
- ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს, როცა $x<-\sqrt{3}$ ან $x>\sqrt{3}$.



ნახ. 3

7.7 უკუპროპორციული დამოკიდებულების ფუნქცია და მისი გრაფიკი

მიზანი $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის შესწავლა და მისი გრაფიკის აგება.

ამოცანა. კოტეს სახლიდან სამსახურამდე მანძილი 3 კმ-ია. ყოველ სამუშაო დღეს კოტემ უნდა გადაწყვიტოს, ფეხით წავიდეს სამსახურში, ველოსიპედით თუ ავტომობილით ისე, რომ არ დააგვიანოს. ფეხით კოტე საათში 5 კმ-ს, ველოსიპედით 15 კმ-ს, ხოლო ავტომობილით 60 კმ-ს გადის. რა ტრანსპორტით ვურჩიოთ კოტეს სამსახურში წასვლა იმ დღეს, როცა სახლიდან სამსახურის დაწყებამდე 15 წუთით ადრე გავიდა?

ამოხსნა: როგორც ვიცით, ერთსა და იმავე გასავლელ მანძილზე სიჩქარესა და დროს შორის უკუპროპორციული დამოკიდებულებაა. კერძოდ, დროის სიჩქარეზე ნამრავლი მუდმივი სიდიდის, გასავლელი მანძილის ტოლია: $S=vt$, საიდანაც $t=\frac{S}{v}$. ვისარგებლოთ ამ ფორმულით და გამოვთვალოთ, რა დრო დასჭირდება კოტეს სამსახურში მისასვლელად ამოცანაში მოცემულ სამ შემთხვევაში:

I. ფეხით წასვლის შემთხვევაში: $t=\frac{3}{5}=0,6=36$ წთ – დააგვიანებს;

II. ველოსიპედით წასვლის შემთხვევაში: $t=\frac{3}{15}=0,2=12$ წთ – არ დააგვიანებს;

III. ავტომობილით წასვლის შემთხვევაში: $t=\frac{3}{60}=0,05=3$ წთ – არ დააგვიანებს.

როგორც ვხედავთ, სამსახურში რომ არ დააგვიანოს, კოტეს შეუძლია ისარგებლოს ველოსიპედით ან ავტომობილით. ჩვენ, რა თქმა უნდა, ვურჩევთ ეკოლოგიურად სუფთა ტრანსპორტით, ველოსიპედით წასვლას, მით უმეტეს, რომ ავტომობილით წასვლის შემთხვევაში საცობში მოხვედრის დიდი ალბათობა არსებობს.

როგორც აღვნიშნეთ, განხილულ ამოცანაში დროსა და სიჩქარეს შორის უკუპროპორციული დამოკიდებულებაა, რომელიც $t=\frac{3}{v}$ ტოლობით გამოისახება. ამ ტოლობაში t და v ცვლადები, ხოლო 3 პროპორციულობის კოეფიციენტია.

x და y ცვლადებს შორის $y=\frac{k}{x}$ ტოლობით მოცემულ დამოკიდებულებას, სადაც k მოცემული არანულოვანი რიცხვია, **უკუპროპორციულობის ფუნქცია,** ხოლო k რიცხვს **უკუპროპორციულობის კოეფიციენტი** ეწოდება.

ავაგოთ $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი და შევისწავლოთ მისი თვისებები.

დავუშვათ $k>0$.

1) ვინაიდან $x=0$ მნიშვნელობა ერთადერთია, რომლისთვისაც $\frac{k}{x}$ გამოსახულებას აზრი არა აქვს, ამიტომ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty; 0)U(0; +\infty)$ ანუ $D(x)=R\setminus\{0\}$.

2) ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-\infty; 0)U(0; +\infty)$ ანუ $E(y)=R\setminus\{0\}$

3) $(-\infty; 0)$ და $(0; +\infty)$ შუალედები $y=\dfrac{k}{x}$ ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედებია.

x	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
y	–	+

4) კენტი ფუნქციაა (ახსენი, რატომ?) მაშასადამე, $y=\dfrac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

5) დავადგინოთ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები.

დავუშვათ, x_1 და x_2 არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობებია $(0; +\infty)$ შუალედიდან, ხოლო y_1 და y_2 – ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები. თუ $x_1<x_2$, მაშინ

$$y_1-y_2=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}=k\cdot\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0,$$ ე.ი. $y_1-y_2>0$ და $y_1>y_2$.

მაშასადამე, $(0; +\infty)$ შუალედში $y=\dfrac{k}{x}$ კლებადი ფუნქციაა.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ფუნქცია კლებადია $(-\infty; 0)$ შუალედზეც.

6) აქვს თუ არა ფუნქციას უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები?

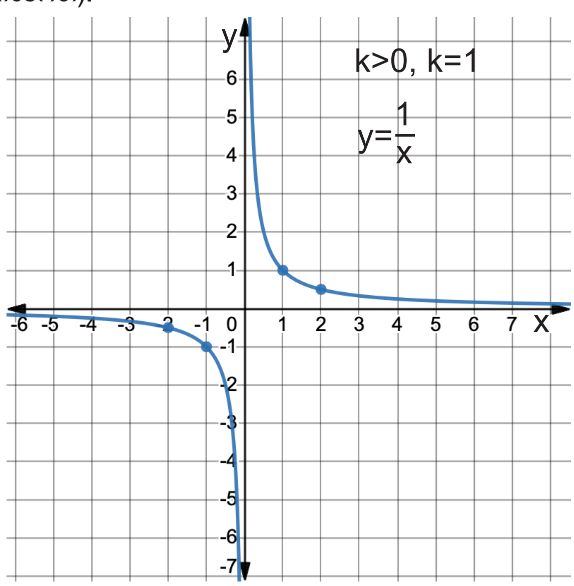
თუ x-ის მნიშვნელობებს თანდათანობით უფრო მცირეს ავიღებთ, დავინახავთ, რომ y-ის შესაბამისი მნიშვნელობები უფრო და უფრო გაიზრდება. საკოორდინატო სიბრტყეზე ეს ნიშნავს, რომ გრაფიკი x არგუმენტის კლებასთან ერთად სულ ზევით მიდის და უახლოვდება ორდინატთა ღერძს, მაგრამ მას ვერ შეეხება, რადგან 0 არ შედის განსაზღვრის არეში. პირიქით, x-ის ზრდასთან ერთად y მცირდება, ანუ გრაფიკი უახლოვდება აბსცისათა ღერძს, მაგრამ მას ვერ შეეხება, რადგან ფუნქციას ნულები არ გააჩნია. მრუდი წირისა და წრფის ასეთი განლაგებისას ამბობენ, რომ წრფე მრუდის ასიმპტოტაა, ან მრუდი ასიმპტოტურად უახლოვდება წრფეს. შესაბამისად, აბსცისათა ღერძი წარმოადგენს $y=\dfrac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალურ ასიმპტოტას, ხოლო ორდინატთა ღერძი – ვერტიკალურ ასიმპტოტას.

გრაფიკის აგებისას უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ყოველ (x, y) წერტილთან ერთად $y=\dfrac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის, როგორც (–x; –y), ისე (y; x) წერტილები (ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ გრაფიკი სიმეტრიულია y=x წრფის მიმართ).

გრაფიკის ასაგებად ავიღოთ k=1 და შევადგინოთ ცხრილი:

x	0,25	0,5	1	2	4
y	4	2	1	0,5	0,25

ცხრილის მიხედვით ავაგოთ $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

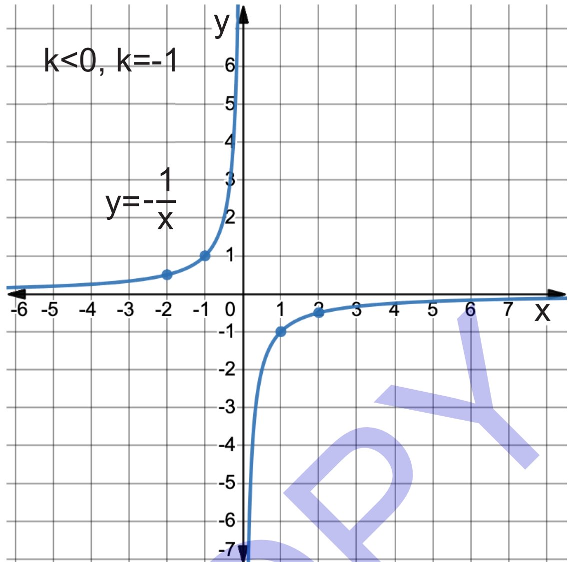


მიღებულ გრაფიკს **ჰიპერბოლა** ჰქვია, ხოლო მის ცენტრსა და სიმეტრიის ღერძებს – ჰიპერბოლის ცენტრი და ღერძები. როგორც ვხედავთ, ჰიპერბოლა ორი ნაწილისაგან შედგება. თითოეულ მათგანს ჰიპერბოლას შტო ჰქვია.

მომდევნო ნახაზზე მოცემულია ჰიპერბოლა უარყოფითი კოეფიციენტის შემთხვევაში.

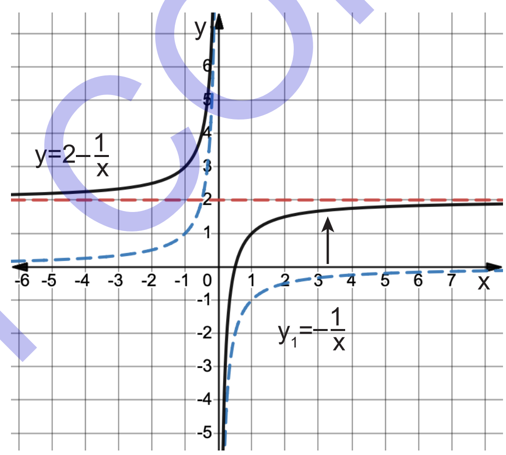
ნახაზზე შტოები $y=\frac{1}{x}$-თვის 1-ელ და მე-3 მეოთხედებშია განლაგებული, ხოლო $y=-\frac{1}{x}$ -ისათვის მე-2 და მე-4 მეოთხედებში.

გრაფიკის მიხედვით დამოუკიდებლად შეძლებ ჩამოთვალო $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები, როცა $k<0$.



მაგალითი. ავაგოთ $y=2-\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა: $y=2-\frac{1}{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა მთელი სიმრავლე, გარდა $x=0$-ისა. განვიხილოთ $y_1=-\frac{1}{x}$ ფუნქცია. მისი გრაფიკი არის ჰიპერბოლა, რომლის შტოები განლაგებულია მეორე და მეოთხე მეოთხედებში. ცხადია, ყოველი $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის y ფუნქციის მნიშვნელობა 2-ით მეტია y_1-ის მნიშვნელობაზე არგუმენტის იმავე x_0 მნიშვნელობის შემთხვევაში. ამიტომ, საკმარისია, რომ $y_1=-\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი პარალელურად გადავიტანოთ 2 ერთეულით ზემოთ, ორდინატთა ღერძის გასწვრივ. მივიღებთ $y=2-\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს.



შევნიშნოთ, რომ შევასრულეთ $y=f(x)+a$ ფუნქციის გრაფიკის აგება, სადაც a არის მოცემული რიცხვი. თუ უკვე აგებულია $y_1=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, საკმარისია, ეს გრაფიკი გადავიტანოთ ორდინატთა ღერძის გასწვრივ a ერთეულით ზემოთ, თუ $a>0$ და a ერთეულით ქვემოთ, თუ $a<0$.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა ეწოდება $y=\frac{k}{x}, \left(k\neq 0\right)$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას?
2. რა სიმრავლეს წარმოადგენს $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა სიმრავლე?
3. ლუწია თუ კენტი $f\left(x\right)=\frac{k}{x}$ ფუნქცია?
4. რა ჰქვია მრუდს, რომელიც $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს?
5. რომელ საკოორდინატო მეოთხედებშია განლაგებული: ა) $y=-\frac{3}{x}$; ბ) $y=\frac{3}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი?
6. შესაძლებელია თუ არა, $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკმა გადაკვეთოს საკოორდინატო ღერძები?

სავარჯიშოები

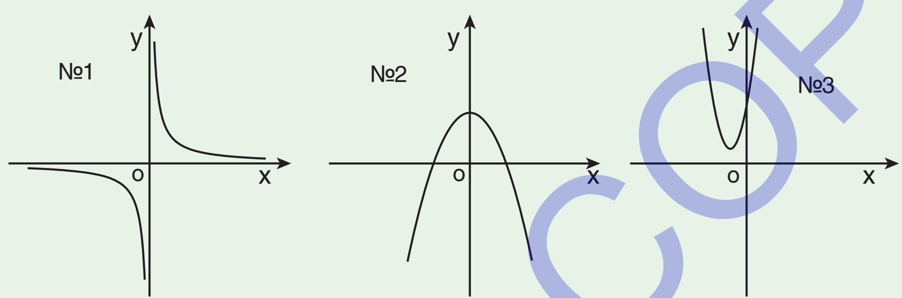
1 იპოვე k, თუ ცნობილია, რომ (2; 3) კოორდინატების მქონე წერტილი $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის.

2 ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგე მოცემული ფუნქციების გრაფიკები და გამოიტანე დასკვნა, თუ როგორ ცვლის გრაფიკს კოეფიციენტის ცვლილება.

ა) $y=\frac{2}{x}$ და $y=\frac{-2}{x}$; ბ) $y=\frac{6}{x}$ და $y=\frac{-6}{x}$; გ) $y=\frac{1}{x}$ და $y=\frac{4}{x}$.

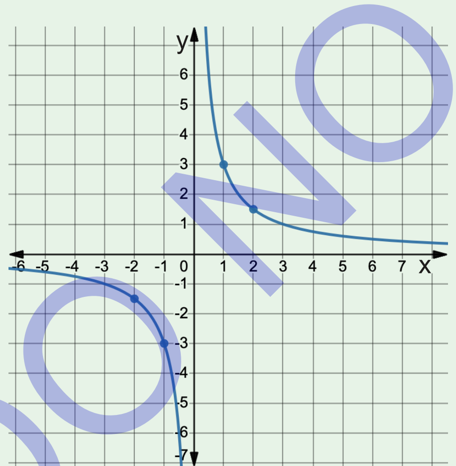
3 რომელი გრაფიკი რომელი ფუნქციისაა?

$$f(x)=-x^2+2; \quad f(x)=\frac{3}{x}; \quad f(x)=x^2+2x+4.$$

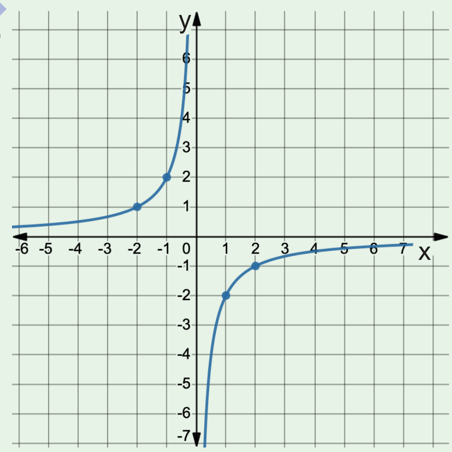


4 ნახაზზე მოცემულია $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვე k.

ა)



ბ)

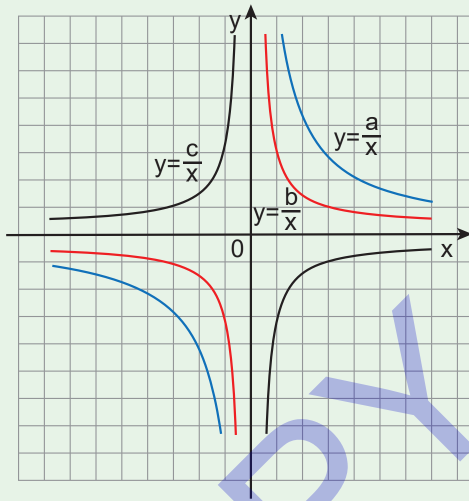


5 ნახაზზე მოცემულია $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$, $y=\frac{c}{x}$ ფუნქციათა გრაფიკები.

ნახაზის მიხედვით შეარჩიე სწორი დამოკიდებულება a, b და c კოეფიციენტებს შორის.

ა) $a>b>c$; ბ) $b>c>a$;

გ) $c>a>b$; დ) $a=c>b$.



6 (a; b) კოორდინატების მქონე წერტილი $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის. გაარკვიე, მოცემული წერტილიდან რომელი არ ეკუთვნის იმავე გრაფიკს.

ა) (–a; –b); ბ) (2a; 0,5b); გ) (b; a); დ) (–a; b).

7 იპოვე $y=\frac{3}{x}$ და $y=x+2$ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

8 იპოვე $y=-\frac{8}{x}$ და $y=x^2$ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

9 ააგე:

ა) $y=3-\frac{1}{x}$; ბ) $y=-\frac{1}{x}-3$ ფუნქციის გრაფიკი.

10 ააგე: ა) $y=3+\frac{1}{x}$; ბ) $y=\frac{1}{x}-3$ ფუნქციის გრაფიკი.

11 ააგე: ა) $y=\frac{1}{|x|}$; ბ) $y=\frac{x+2}{x+1}$ ფუნქციის გრაფიკი.

12 რამდენი საერთო წერტილი აქვს $y=\frac{2}{x}$ და $y=x^3-x$ ფუნქციათა გრაფიკებს?

7.8 $y=\sqrt{x}$ და $y=|x|$ ფუნქციები და მათი გრაფიკები

მიზანი

$y=\sqrt{x}$ და $y=|x|$ ფუნქციების თვისებების გამოკვლევა და გრაფიკების აგება.

ავაგოთ $y=\sqrt{x}$ სახის ფუნქციის გრაფიკი. x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისთვის ფუნქციას აზრი არა აქვს, ამიტომ ვიხილავთ არგუმენტის მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს.

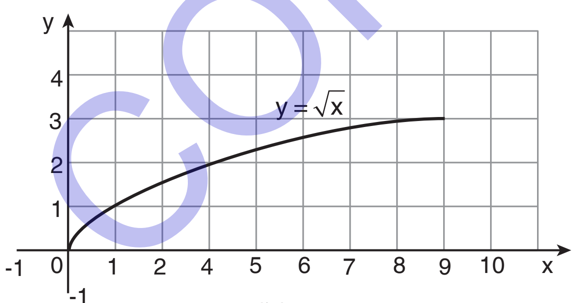
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

ავაგოთ (0; 0), (1; 1), (4; 2) და (9; 3) წერტილები.

$y=\sqrt{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეც და მნიშვნელობათა სიმრავლეც არის $[0; +\infty)$ შუალედი.

$y=0$, როცა $x=0$.

$y>0$, როცა $x>0$. ფუნქცია ზრდადია $[0; +\infty)$ შუალედში.



ნახ. 1

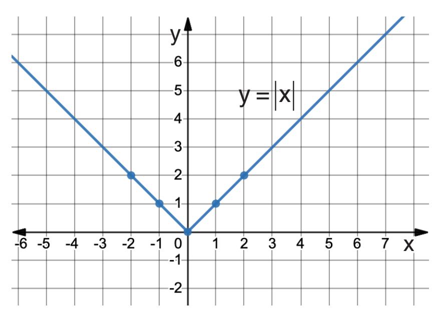
ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა 0, როცა $x=0$. უდიდესი მნიშვნელობა არა აქვს. $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი 1-ელ ნახაზზეა წარმოდგენილი.

გამოვიკვლიოთ $y=|x|$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

გავიხსენოთ, რომ

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{როცა } x\geq 0, \\ -x, & \text{როცა } x<0 \end{cases}$$

ე.ი. დადებით ნახევარღერძზე $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკი იგივეა, რაც $y=x$ ფუნქციის გრაფიკი, ხოლო უარყოფით ნახევარღერძზე – $y=-x$ ფუნქციის გრაფიკი. ამიტომ გრაფიკს ექნება მე-2 ნახაზზე მოცემული სახე. როგორც გრაფიკიდან ჩანს:



ნახ. 2

- $y=|x|$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
- $y=|x|$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0; +\infty)$;
- ფუნქცია ლუწია;
- ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა 0;
- ფუნქცია კლებადია $(-\infty; 0]$ ინტერვალზე და ზრდადია $[0; +\infty)$ ინტერვალზე.